Föreläsning 25/11-13

DAGORDNING:

- övning 1818 a
- Numeriska serier $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
  konvergens/divergens
  nödvändigt villkor för konvergens
- positiva serier
  kriterier för konvergens

ÖVNING 1818 a)

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ där $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

Ska visa att $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar och bestämma gränsvärdet

Lösning:

Metod 1 Använd fixpunktssatsen

Sätt $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in I = [\frac{1}{2}, 1]$

(f avtagande $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$)

Det gäller

- $f: I \longrightarrow I$

- f deriverbar med $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $x \in I$
och alltså

$$\max_{x\in I} |f'(x)| = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{9} < 1$$

- f är en kontraktion på I eftersom

$$|f(x) - f(\tilde{x})| = \{\text{medelvärdessatsen}\} =$$

$$= |f'(\xi_{x,\tilde{x}})||x-\tilde{x}| \le \frac{4}{9}|x-\tilde{x}|$$

alla $x, \tilde{x} \in I$, $\xi_{x,\tilde{x}}$ något tal mellan x och $\tilde{x}$

Fixpunktssatsen ger att f har en entydigt bestämd fixpunkt $\alpha \in I$, dvs $\frac{1}{1+\alpha} = \alpha$, $\alpha \in I$

och $x \in I$ medför $x_n \to \alpha$, $n \to \infty$

Konvergensen visad

Beräkna α

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0, \quad \alpha \in [\tfrac{1}{2}, 1]$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \overset{+}{(-)} \sqrt{\frac{1}{4}+1} = -\frac{1}{2} \overset{+}{(-)} \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Vi har $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Metod 2:

Sats: $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ monoten talföljd

Då gäller: $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ begränsad

Beräkna $x_1, x_2, x_3, \ldots$

$x_1 = 1$	$x_5 = \frac{5}{8}$
$x_2 = \frac{1}{2}$	$x_6 = \frac{8}{13}$
$x_3 = \frac{2}{3}$	$\vdots$
$x_4 = \frac{3}{5}$	

Det verkar gälla att $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ växande

$(x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ avtagande

Om $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot β

så gäller

$$\beta \longleftarrow x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \longrightarrow \frac{1}{1+\beta} = \beta, \; n \to \infty$$

Vi får $\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ eftersom vi ser att (alla $x_n > 0$)

Påstående: $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ växande och

$$x_{2n} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{för } n = 1, 2, \ldots$$

Vi ser

$$x_2, x_4 \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$x_4 - x_2 = \frac{1}{1+x_3} - x_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x_2}} - x_2 =$$

$$= \frac{1+x^2}{2+x^2} - x^2 = \frac{1}{2+x^2}\left(1+x^2 - x^2(2+x_2)\right) =$$

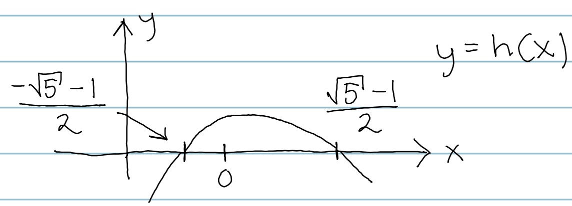
$$= \frac{1}{2+x^2}\left(1 - x_2 - x_2^2\right) \geq 0 \quad \text{Alltså } x_2 \leq x_4$$

hjälpfunktion:

$$h(x) = 1 - x - x^2 = -(x^2 + x - 1) =$$

$$= -\left((x+\tfrac{1}{2})^2 \underbrace{- (\tfrac{1}{2})^2 - 1}_{-(\frac{\sqrt{5}}{2})^2}\right) =$$

$$= -\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$



Antag att $x_{2(n-1)} \leq x_{2n}$ och $x_{2n} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

→

$$x_{2(n+1)} - x_{2(n)} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{1+x_{2n}}} - x_{2n} = \frac{1}{2+x_{2n}} \underbrace{\left(1 - x_{2n} - x_{2n}^2\right)}_{\geq 0} \geq 0$$

pga $0 < x_{2n} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Alltså

$$x_{2n} \leq x_{2(n+1)}$$

Vidare

$$x_{2(n+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x_{2n}}} = \frac{1+x_{2n}}{2+x_{2n}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2+x_{2n}} \leq 1 - \frac{1}{2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}} =$$

$$= \frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+3} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-3)}{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3)} =$$

$$= \frac{2-2\sqrt{5}}{5-9} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Induktionsprincipen ger att

$(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ växande och $x_{2n} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\forall n$

Satsen tidigare ger att $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ konvergerar

Vi får $x_{2n} \longrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ eftersom

$$\gamma \longleftarrow x_{2(n+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x_{2n}}} \longrightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{1+\gamma}}$$

ger $\gamma = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Återstår att visa att $x_{2n-1} \longrightarrow \gamma, \ n \to \infty$

$$\Longleftrightarrow \quad x_{2n+1} \longrightarrow \gamma, \ n \to \infty$$

$$x_{2n+1} = \frac{1}{1+\underset{\to \gamma}{x_{2n}}} \longrightarrow \frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \ n \to \infty$$

Slutsats: $x_n \longrightarrow \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \ n \to \infty$

NUMERISKA SERIER

$a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$

Sätt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ , \ n = 1, 2, \ldots$$

Vi säger att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar om

$(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar

Om $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ inte konvergerar säger vi att

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar mot ∞ om $s_n \to \infty$, $n \to \infty$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar mot $-\infty$ om $s_n \to -\infty$, $n \to \infty$

Vi kallar s_n för den n:te partialsumman

av $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Om $s_n \to s$, $n \to \infty$ kallar vi s för

serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$:s summa. Beteckning: $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Ex. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergerar ?

Vi noterar

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \qquad k=1,2,\ldots$$

Alltså

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1} \longrightarrow 1, \; n\to\infty$$

Slutsats: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergerar och har summan 1.

Ex. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$s_n = \underbrace{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ st termer}, \; \geq \frac{1}{\sqrt{n}}} \geq n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} =$$

$$= \sqrt{n} \longrightarrow \infty, \quad n\to\infty$$

Ex. $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$

$$s_n = \frac{q(1-q^{n+1})}{1-q}, \quad q \neq 1$$

$$s_n = n, \quad q=1 \qquad n=1,2,\ldots$$

Vi ser att $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konvergerar om och endast om

$|q| < 1$ (geometrisk serie)

SATS: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar $\Longrightarrow$ $a_k \to 0, k \to \infty$

BEVIS

Sätt $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n = 1, 2, \ldots$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar innebär att det finns

$s \in \mathbb{R}$ s.a. $s_n \longrightarrow s, n \to \infty$

Det gäller

(*) $a_k = s_k - s_{k-1}$, $k = 2, 3, \ldots$

$$\left(\begin{array}{l} s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k \\ s_{k-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} \\ \Longrightarrow \quad s_k - s_{k-1} = a_k \end{array} \right)$$

Låt $k \to \infty$ i (*)

$a_k \longrightarrow 0, k \to \infty$

$\square$

Ex. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Här gäller

- $\frac{1}{\sqrt{k}} \longrightarrow 0, \; k \to \infty$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergerar

Anmärkning Det gäller

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \; \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergerar

eftersom

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{\substack{\longrightarrow s \\ n \to \infty \\ \text{ngt } s \in \mathbb{R}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_k}_{\substack{\longrightarrow \tilde{s} \\ n \to \infty \\ \text{ngt } \tilde{s} \in \mathbb{R}}} \xrightarrow[n \to \infty]{} s + \tilde{s}$$

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar, $c \in \mathbb{R} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (c a_k)$ konvergerar

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergerar

  $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ divergerar

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergerar $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ inget kan sägas

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar $\Longleftrightarrow$ $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergerar alla positiva heltal m

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar $\Longleftrightarrow$ $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergerar för något positivt, heltal m

SATS

1. $a > 0$ $\quad \sqrt[n]{a} \longrightarrow 1, \; n \to \infty$

2. $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1, \; n \to \infty$

3. $a \in \mathbb{R}$ $\quad \dfrac{a^n}{n!} \longrightarrow 0, \; n \to \infty$

BEVIS:

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = e^{\ln[a^{\frac{1}{n}}]} = e^{\frac{\ln a}{n}} \longrightarrow e^0 = 1$, $n \to \infty$

2. $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}} \longrightarrow e^0 = 1, \; n \to \infty$

3. Välj heltal p sådant att $|a| < p$

$\rightarrow$

För $n > p$

$$0 \leq \left| \frac{a^n}{n!} \right| = \left(\frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|a|}{p} \right) \overbrace{\left(\frac{|a|}{p+1} \cdot \ldots \cdot \frac{|a|}{n-1} \right)}^{\leq 1} \frac{|a|}{n}$$

$$\leq \frac{|a|^p}{p!} \cdot \frac{|a|}{n} \longrightarrow 0 \quad , n \to \infty$$

Alltså

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

Stirlings formel:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1 + \varepsilon_n) \quad \text{där } \varepsilon_n \to 0 \text{ då } n \to \infty$$