Föreläsning 11/11-13

L'Hospitals regel

$\frac{f}{g} \longrightarrow ?$

Intressanta fall: "$\frac{0}{0}$" "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\boxed{\text{Förutsättningar ???}}$ $\quad \frac{f'}{g'} \longrightarrow A \Rightarrow \frac{f}{g} \longrightarrow A$

Enkelt fall:

f, g $\boxed{}$ ggr kontinuerligt deriverbara kring x_0

Taylors formel:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2$$
$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} g''(\eta)(x-x_0)^2$$

$f(x_0) = g(x_0) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overbrace{f(x_0)}^{=0} + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2}{\underbrace{g(x_0)}_{0=} + g'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} g''(\eta)(x-x_0)^2} =$$

$$= [\text{dividera med } x - x_0] = \frac{f'(x_0) + (x-x_0)\,▨}{g'(x_0) + (x-x_0)\,◭} \xrightarrow[x \to x_0]{}$$

$$\longrightarrow \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Uppg. 1642 c) $\quad \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x} \xrightarrow[x \to 0]{} \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$

$f, g \in C^{\infty}$ $\underbrace{\text{kring } 0}_{\text{(i en omgivning av noll)}}$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$g'(x) = 1 - \cos x$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0 + \cancel{0(x-x_0)} + \frac{1}{2} f''(0)\cancel{(x-x_0)^2} + \overbrace{\cancel{\text{rest}}}^{B_1(x-x_0)}}{0 + \cancel{0(x-x_0)} + \frac{1}{2} g''(0)\cancel{(x-x_0)^2} + \underbrace{\cancel{\text{rest}}}_{B_2(x-x_0)}} \xrightarrow[x \to x_0 = 0]{} \frac{f''(0)}{g''(0)}$$

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)'}{(1 - \cos x)'} = \frac{-2 \cdot \frac{1}{\cos^3 x}(-\sin x)}{\sin x} \xrightarrow[x \to 0]{} 2$$

Vi behövde inte L'Hospitals regel två gånger:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}(1 + \cos x) \xrightarrow[x \to 0]{} 2$$

OBS! L'Hospitals regel går inte alltid att använda

förutsättningar...

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exempel: $\lim_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = " \frac{\infty}{\infty} "$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)} = 1$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

saknar lim när $x \to \infty$

OBS! Derivera INTE som kvot!

$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \to x_0} " \frac{?}{\infty} "$ räcker med ∞ i nämnaren

L'Hospitals regel fungerar (förutsatt att de förutsättningar som regeln kräver finns)

Ensidig L'Hospitals regel (stark form):

$g \neq 0$ i $(x_0, x_0+\delta)$

$f(x), g(x)$ deriverbara i $(x_0, x_0+\delta)$

$(x \to x_0+)$

g' har konstanta tecken i $(x_0, x_0+\delta)$

$$\exists \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \;;\; f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \;\&\; g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

alt. $g(x) \xrightarrow[x\to x_0+]{} \infty$ (+ eller −)

$$\exists \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

BEVIS:

Cauchys medelvärdessats

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

f, g kontinuerliga på $[a,b]$

f, g deriverbara i (a,b), $g' \neq 0$ i (a,b)

$$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b) : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

($g(b) \neq g(a)$ följer ur och Rolles sats)

BEVIS: Se tidigare

(i) $f, g \xrightarrow[x\to x_0+]{} 0$

(ii) $g(x) \xrightarrow[x\to x_0+]{} \pm\infty$

(iii) $x \to +\infty$ $\longrightarrow$

(i) $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - \overset{=0}{\text{—}}}{x) - \underset{=0}{g(x_0)}}, \quad \text{där}$$

$$f(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0+} f(x)$$

$$g(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0+} g(x)$$

$\Rightarrow$ f, g kontinuerliga i $[x_0, x_0 + \delta)$

$x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow$ f, g kontinuerliga i $[x_0, x]$

f, g deriverbara i (x_0, x)

g' har konstant tecken
$\Rightarrow g' \neq 0$

$\Rightarrow$ förutsättningarna i Cauchys medelvärdessats är uppfyllda

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (x_0, x)$ s.a.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

$$x_0 < \xi_x < x$$

$$\Rightarrow \quad \xi_x \xrightarrow[x \to x_0+]{} x_0+$$

$\longrightarrow$

$$\exists \lim_{\substack{\cancel{\xi_x \to x_0+} \\ x \to x_0}} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = A$$

$$\Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \xrightarrow[x \to x_0+]{} A$$

(ii) $g(x) \longrightarrow +\infty$ (WLOG) utan inskränkning (without loss of generality)

Tag $x, x_1 \in (x_0, x_0+\delta)$ s.a. $x_0 < x < x_1 < x_0 + \delta$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{för ngt } \xi \in (x, x_1)$$

$$\boxed{\xi = \xi(x, x_1)}$$

$$\Longrightarrow f(x) - f(x_1) = g(x)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - g(x_1)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \Big| : g(x$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_1)}{g(x)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \frac{g(x_1)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leq \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| + \left|\frac{f(x_1)}{g(x)}\right| \pm \left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right| \left|\left(\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - A\right)\right| \pm \left|A \frac{g(x_1)}{g(x)}\right| \quad \text{triangelolikheten}$$

$\boxed{x_0 < x < \xi < x_1}$

tag $\varepsilon > 0$, godtyckligt. Välj x_1 så nära x_0 ($|x_1 - x_0|$ så litet att) $\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \varepsilon$

$|\xi - x_0| < |x_1 - x_0| \rightarrow$

Fixera nu x_1. Då $\left|\frac{f(x_1)}{g(x)}\right| < \varepsilon$ för x tillräckligt nära x_0; $\left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right| < \varepsilon$

tal

$\xrightarrow{} \infty$

$\Rightarrow$ för x_1 så valt, x tillräckligt nära x_0 gäller

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon^2 + |A|\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

(iii) Sätt $t = \frac{1}{x}$

$$t \xrightarrow[x \to \infty]{} 0+$$

$$\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} : \quad \frac{\cancel{-\frac{1}{t^2}} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\cancel{-\frac{1}{t^2}} g'\left(\frac{1}{t}\right)}$$

ELW, kap 16

43 b) $\lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$, $= " \dfrac{\infty}{\infty} "$

$(a, b > 0)$

$x_0 = 0 \qquad \delta_{max} = \min\left(\frac{\pi}{a}, \cancel{\frac{\pi}{b}}, \frac{\pi}{2b}\right)$

$g'(x) = \left(\ln(\sin bx)\right)' = \dfrac{1}{\sin bx} \cdot \cos bx \cdot b > 0$

i $(\underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_0}}, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_0}} + \delta)$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{\cos ax}{\sin ax} \cdot a}{\frac{\cos bx}{\sin bx} \cdot b} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{b}} \frac{\cos ax}{\cos bx} \cdot \frac{\sin bx}{\sin ax} \cdot$$

$$\cdot \frac{ax}{bx} \cdot \frac{\cancel{b}}{\cancel{a}} \xrightarrow[x \to 0+]{} 1$$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{x \to 0+} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx} = 1$$

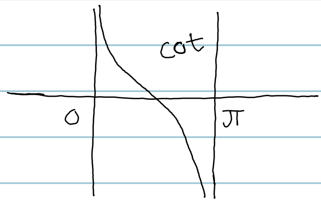
alt.

$$\ln \sin ax = \ln \frac{\sin ax}{ax} + \ln a + \boxed{\ln x}$$

43c) $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{arccot} x = " \infty \cdot 0 "$

$\operatorname{arccot} x \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

$$\boxed{\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}}$$



$$x \operatorname{arccot} x = \frac{\operatorname{arccot} x}{1/x} \xrightarrow[x\to\infty]{} " \frac{0}{0} "$$

$$\frac{(\operatorname{arccot} x)'}{(1/x)'} = \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{1+x^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to\infty} x \operatorname{arccot} x = 1$$

44a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = " 0 \cdot \infty "$

divergent

$\frac{1}{\ln t} > \frac{1}{t}$

$$\frac{\ln x \int_2^x \frac{dt}{\ln t}}{x} \qquad x \to \infty$$

$\longrightarrow$

$$\frac{\left(\ln x \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right)'}{(x)'} = \frac{\frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{\ln t} + \cancel{\ln} x \cdot \frac{1}{\cancel{\ln x}}}{1} =$$

$$= \frac{\int_2^x \frac{dt}{\ln t} + x}{x} \longrightarrow \frac{\text{"}\infty\text{"}}{\infty}$$

$$\frac{\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln t} + x\right)'}{(x)'} = \frac{\frac{1}{\ln x} + 1}{1} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{x\to\infty} \frac{\int_2^x \frac{dt}{\ln t} + x}{x} = 1$$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = 1$$

Alternativt:

$$\frac{\int_2^x \frac{dt}{\ln t}}{x/\ln x \to \infty}$$

$$\frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{\ln x - \frac{1}{\cancel{x}}\cdot \cancel{x}}{(\ln x)^2}} = \frac{\ln x}{\ln x - 1} \longrightarrow 1$$

TALFÖLJDER

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

$a_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}$

oändlig

(ibland ändliga talföljder $a_1, \ldots, a_n$)

Speciell typ av funktion : $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbb{C})$

$$\underset{a_1}{\overset{\shortparallel}{f(1)}}, \underset{a_2}{\overset{\shortparallel}{f(2)}}, \ldots, \underset{a_n}{\overset{\shortparallel}{f(n)}}, \ldots$$

Exempel: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Definition: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, om

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A : \ \forall n > A \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

$n \to \infty$: Den enda hopningspkten $\mathbb{N}$ har är ∞

---

def $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, om

$$\forall B \ \exists A : \forall n > A \quad a_n > B$$

<u>Sats</u> Om en talföljd är uppåt begränsad och växande, alternativt nedåt begränsad och avtagande, så är den konvergent, dvs den har ett gränsvärde

<u>ELW, kap 17</u>

4 a) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$

$$\underbrace{n \cdot \frac{1}{4n^2}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} < a_n = \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2}}_{n \text{ termer}} <$$

"$0 \cdot \infty$"

$$< \underbrace{n \cdot \frac{1}{(n+1)^2}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}$$

$$\Longrightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

4 b) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$

$$\underbrace{n \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{\to \infty} < a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} < \underbrace{n \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\to \infty}$$

4c) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$? Gör själv!

"4d)" $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$

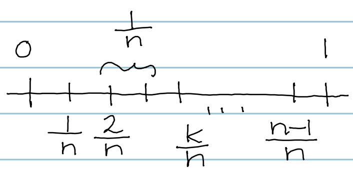
$$n\frac{1}{n\sqrt{2}} < a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} < \underbrace{n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad\qquad 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < a_n < 1 \ ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \cdot \frac{1}{n}$$



Riemannsumma för

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

integrerbar

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Rekursiv talföljd:

$$x_0 = 1 \qquad \boxed{\mu > 0}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

? $\exists \lim_{n\to\infty} x_n$, $= ?$

Om $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = x$, så när $n \to \infty$

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{x} \qquad \Big| \cdot (2x)$$

$$x^2 = 2 \qquad x = \pm\sqrt{2}$$

induktivt $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow$ om $\exists \lim_{n\to\infty} x_n$, så är det $\sqrt{2}$ $(\sqrt{\mu})$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) > \frac{3}{2}$$

→

? växande och uppåt begränsad

$$x_{n+1} \overset{?}{\geq} x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - x_n =$$

$$= \frac{1}{x_n} - \frac{1}{2} x_n = \frac{2 - x_n^2}{2x_n}$$

$$x_{n+1} - x_n \geq 0 \iff x_n^2 < 2 \iff x_n < \sqrt{2}$$

(ty $x_n > 0$)

$$? \quad x_n \begin{vmatrix} \geq \\ \leq \end{vmatrix} \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$?$$

Induktion: 1) ~~$n=0$, 1~~

$n = 0 \qquad x_0 < \sqrt{2}, \; x_1 > \sqrt{2}$

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - \sqrt{2} =$$

$$= \frac{x_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}x_n}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} > 0$$

$\Longrightarrow x_{n+1} \geq \sqrt{2} \Longrightarrow$ följden är efter x_1 nedåt begränsad av $\sqrt{2}$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} \leq 0 \quad \forall n > 1$$

$\Longrightarrow \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ efter ett par steg, avtagande, nedåt begränsad

$\longrightarrow$

$\Longrightarrow$ konvergent

$\Longrightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \sqrt{2}$