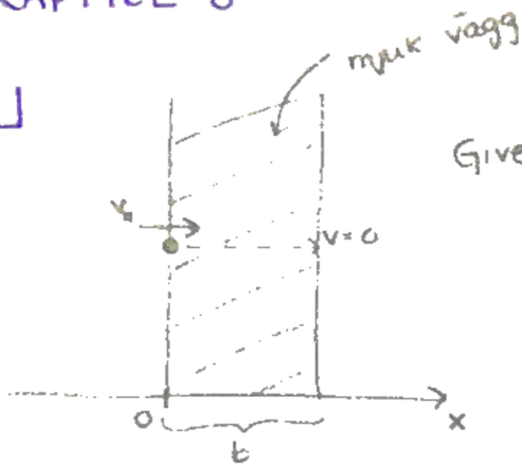
KAPITEL 8

Storgruppsövning (1)
7/11-13

8.20



Givet $\frac{dv}{dt} = -kv$

$v = v(t)$ kulans hastighet

vid tiden t, $t \geq 0$

$v(0) = v_0$

Bestäm samband mellan k, b och v_0

Givet att kulan har hastigheten 0 vid $x = b$

Lösning v uppfyller en linjär 1:a ordningens diff.ekv. med konstanta koefficienter och den är homogen

Karakteristiskt polynom: $r + k$

Vi får
$$v(t) = Ce^{-kt}$$

Villkoret $v(0) = v_0$ ger $C = v_0$.

Vi får
$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$

Låt $x(t)$ beteckna kulans position vid tiden t

$v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$

Vi får
$$x(t) = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + E$$

Vi har $x(0) = 0 \Rightarrow e = \frac{v_0}{k}$

Alltså
$$x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right), \quad t \geq 0$$

Detta ger
$$b = \frac{v_0}{k}$$

Svar $b = \frac{v_0}{k}$

$\longrightarrow$

Storgruppsövning (2)
7/11 -13

Alt. lösning Betrakta $v = \tilde{v}(x(t))$

$$\frac{dv}{dt} = -kv$$

$$\frac{d\tilde{v}}{dx} \cdot \underbrace{\cancel{\frac{dx}{dt}}}_{=\tilde{v}} = -k \cdot \cancel{\tilde{v}}$$

$$\frac{d\tilde{v}}{dx} = -k$$

$\tilde{v}(x) = -kx + F$ där $F = v_0$

$0 = -kb + v_0$

$\Leftrightarrow \; b = \frac{v_0}{k}$

8.49 (b) Lös

$$y'' - 3y' + 2y = x^2$$

Lösning 2:a ordningens diff.ekv., linjär med konstanta koefficienter

$\boxed{y_h}$: Karakteristiska polynomet $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$

$r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $m_1 = m_2 = 1$

Vi får $y_h(x) = Ae^{x} + Be^{2x}$

$\boxed{y_p}$ Ansätt $y(x) = ax^2 + bx + c$

Derivera $y'(x) = 2ax + b$

$y''(x) = 2a$

Insättning i diff.ekv.

$$2a - 6ax - 3b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$$

$$(2a-1)x^2 + (-6a+2b)x + (2a-3b+2c) = 0 \quad \forall x$$

Detta ger
$$\begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ -6a + 2b = 0 \\ 2a - 3b + 2c = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

dvs
$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{7}{4} \end{cases} \qquad \text{Alltså } y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$

Allmänna lösningen till diff ekv ges av
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{x} + Be^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$

8.51 (d) $\quad y'' + 2y' + y = xe^{-x}$

Lösning

$\boxed{y_h}$ Karakteristiska polynomet $r^2+2r+1 = (r+1)^2$

$r_1 = r_2 = -1 \;,\; m_1 = 2$

$y_h(x) = (A + Bx)e^{-x}$

$\boxed{y_p}$ Ansätt $y(x) = z(x)\cdot e^{-x}$

Insättning i diff.ekv.
$$(D+1)^2\left[z(x)\cdot e^{-x}\right] = xe^{-x}$$

Förskjutningsregeln ger
$$\cancel{e^{-x}}\,(D+1-1)^2\left[z(x)\right] = x\,\cancel{e^{-x}}$$
$$\Rightarrow \quad z'' = x$$
$$z(x) = \frac{x^3}{6}$$

Vi har
$$y_p(x) = \frac{x^3}{6}e^{-x}$$

Allmänna lösningen till diff ekv ges av
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \left(A + Bx + \frac{x^3}{6}\right)e^{-x}$$

Storgruppsövning (4)

8.58(a) 7/11-13

Lös

$$y'' - 6y' + 10y = e^{3x} \cos x$$

tittar på realdelen

Lösning: Andra ordningens diff.ekv. linjär med konstanta koefficienter, inhomogen

$\boxed{y_h}$ Karakteristiska polynomet : $r^2 - 6r + 10 = (r-3)^2 + 1 =$

$= (r-3+i)(r-3-i)$

$r_{1,2} = -3 \pm i$

$m_1 = m_2 = 1$

Vi får

$$y_h(x) = Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x \,, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

$\boxed{y_p}$ Betrakta hjälp diff.ekv.

$(*)$ $u'' - 6u' + 10u = e^{(3+i)x}$

Vi får

$$Re(u) = u_p$$

eftersom $Re\left(e^{(3+i)x}\right) = e^{3x}\cos x$

Vi kan skriva $(*)$ på formen

$(D-3-i)(D-3+i)\,[u] = e^{(3+i)x}$

Sätt $u(x) = e^{(3+i)x} z(x)$

$(D-3-i)(D+i)\left[e^{(3+i)x} z(x)\right] = e^{(3+i)x}$

$e^{(3+i)x}(D-3-i+3+i)(D-3+i+3+i)\,[z(x)] = e^{(3+i)x}$

Vi får

$$D(D+2i)\,[z(x)] = 1$$

Ansätt $z(x) = ax \qquad a \in \mathbb{C}$

Insättning i diff.ekv. $z'' + 2iz' = 1$ ger

$$2ia = 1$$

dvs $a = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$

$\longrightarrow$

Detta ger $u(x) = -\frac{1}{2}ix \cdot e^{(3+i)x}$

Alltså
$$y_p(x) = Re\left(u(x)\right) = Re\left(-\frac{ix}{2} e^{3x}(\cos x + i\sin x)\right) =$$
$$= \frac{x}{2} e^{3x} \sin x$$

Allmänna lösningen $y(x)$ till $y'' - 6y' + 10y = e^{3x}\cos x$ ges av
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{3x}\cos x + \left(B + \frac{x}{2}\right)e^{3x}\sin x$$

8.67 Lös
$$y' + y^2 = \frac{1}{x^2} \quad , \; x > 0$$
ej linjär, ej separabel

genomför variabelbyte
$$y(x) = \frac{z(x)}{x}$$

Lösning: Derivera $y(x)$
$$y'(x) = \frac{x\, z'(x) - z(x)}{x^2}$$
Insättning i diff.ekv. ger
$$\frac{x \cdot z'(x) - z(x)}{x^2} + \frac{(z(x))^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} \quad , \; x > 0$$
dvs $z' = \frac{1}{x}(1 + z - z^2) \; , \; x > 0$ (*)

detta är en separabel diff ekv.

$1 + z - z^2 = 0$

$z^2 - z - 1 = 0 = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$

$\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

Vi noterar att
$$z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$
är lösningar till (*) →

Storgruppsövning (6)
7/11-13

Antag att $z \neq \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Då gäller
$$\frac{1}{(z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})(z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})} z' = -\frac{1}{x}$$

$$g(z) = \frac{1}{(z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})(z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

$$F(x) = \int f(x)\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx = -\ln|x| = \{x>0\} = -\ln(x)$$

$$G(z) = \int g(z)\,dz = \int \frac{1}{(z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})(z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})}\,dz =$$

$$= \int \left(\frac{A}{z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{(z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)dx =$$

$$= A\ln\left|z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right| + B\ln\left|z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right|$$

där $A=-B$, $A=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

Alltså
$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|$$

Vi har
$$\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| = -\ln x + \underset{\substack{\uparrow \\ \ln\tilde{C},\ \tilde{C}>0}}{C'} = \ln\frac{\tilde{C}}{x},\ \tilde{C}>0$$

$$\ln\left|\frac{z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| = \ln\left(\frac{\tilde{C}^{\sqrt{5}}}{x^{\sqrt{5}}}\right) = \ln\left(\frac{\bar{C}}{x^{\sqrt{5}}}\right),\ \bar{C}>0$$

ln-funktionen strängt växande ger

$$\left|\frac{z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| = \frac{\bar{C}}{x^{\sqrt{5}}} = \bar{C}x^{-\sqrt{5}}$$

$$\frac{z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} = \hat{C}x^{-\sqrt{5}},\quad \hat{C}\neq 0$$

→

$$z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \left(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \hat{C}\, x^{-\sqrt{5}} \quad , \hat{C} \neq 0 \quad , x > 0$$

$$z(x) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \hat{C}\, x^{-\sqrt{5}}}{1 - \hat{C}\, x^{-\sqrt{5}}}$$

Detta ger $y(x) = \frac{1}{2x} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1 + (\sqrt{5} - 1)\hat{C}\, x^{-\sqrt{5}}}{1 - \hat{C}\, x^{-\sqrt{5}}}$, $x > 0$, $\hat{C} \neq 0$

OBS. $\hat{C} = 0$ ger $\frac{1}{2x} + \frac{\sqrt{5}}{2x} = x\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$