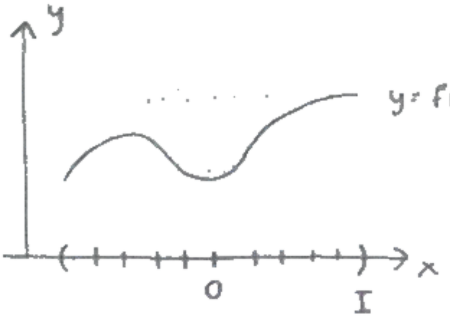
Föreläsning (1)
5/11-13

TAYLORUTVECKLINGAR



$f^{(k)}$ kontinuerlig i I $k = 0, 1, \dots, n+1$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

där $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

och $R_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt =$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

för något ξ mellan 0 och x

Vi kan skriva $\xi = \theta \cdot x$, $\theta = \theta(x) \in [0,1]$

Bevis av Taylors formel:

Variant 1: För $x \in I$

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt$$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = \{\text{partialintegrera}\} =$$

$$= f(0) + \left[(t - \overset{x}{\cancel{c}}) f'(t)\right]_0^x - \int_0^x (t - \overset{x}{\cancel{c}}) f''(t)\,dt =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \int_0^x (x-t) f''(t)\,dt =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \left[-\frac{(x-t)^2}{2} f''(t)\right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,dt =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,dt = \dots =$$

$$= \overbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}^{P_n(x)} + \overbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}\,dt}^{R_{n+1}(x)} \longrightarrow$$

Föreläsning (2)
5/11-13

Återstår att visa att resttermen $R_{n+1}(x)$ kan skrivas

på formen

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$, kallas resttermen på Lagrange form

Antag $x>0$

Sätt

$$m = \min_{t\in[0,x]} f^{(n+1)}(t)$$ ty f kontinuerlig på $[a,b]$

$$M = \max_{t\in[0,x]} f^{(n+1)}(t)$$

För $t\in[0,x]$ gäller

$$m \le f^{(n+1)}(t) \le M$$

$$m\underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{\ge 0} \le \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) \le M\frac{(x-t)^n}{n!}$$

integreras

$$m\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{m}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \int_0^x m\frac{(x-t)^n}{n!}dt \le$$

$$\le \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt \le M\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Alltså

$$m \le \frac{1}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt \le M$$

Från satsen om mellanliggande värden följer

$$\frac{1}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n+1)}(\xi)$$ ty f kontinuerlig

för något $\xi\in(0,x)$

Fallet $x<0$ behandlas analogt

Föreläsning (3)
5/11-13

Variant 2: bygger på Cauchys medelvärdessats

Cauchys medelvärdessats:

g, h kontinuerliga på $[a,b]$

g, h deriverbara i (a,b)

$\Longrightarrow \exists\ \xi \in (a,b)$ s.a.

$$(*) \quad (g(b)-g(a))\,h'(\xi) = (h(b)-h(a))\,g'(\xi)$$

Notera att om $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$ så gäller

$$\frac{h(b)-h(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{h'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Bevis av Cauchys medelvärdessats:

Sätt

$$\varphi(x) = (g(b)-g(a))\,h(x) - (h(b)-h(a))\cdot g(x)$$

Här gäller

φ kontinuerlig på $[a,b]$

φ deriverbar i (a,b)

$$\varphi(a) = (g(b)-g(a))\,h(a) - (h(b)-h(a))\cdot g(a) =$$
$$= g(b)h(a) - h(b)\cdot g(a)$$
$$\varphi(b) = (g(b)-g(a))\,h(b) - (h(b)-h(a))\cdot g(b) =$$
$$= \varphi(a)$$

Rolles sats ger att

$$\exists\ \xi \in (a,b) \text{ s.a. } \varphi'(\xi) = 0$$

$(*)$ följer

$\square$

$$\left(\varphi'(x) = (g(b)-g(a))\,h'(x) - (h(b)-h(a))\,g'(x) \right)$$

$\longrightarrow$

Sätt

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

Betrakta x som fixt och t som variabel

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \\ g(0) = P_n(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(t) = (x-t)^{n+1} \\ h(x) = 0 \\ h(0) = x^{n+1} \end{cases}$$

$$g'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} - \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}} =$$

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{f^{(\ell+1)}(t)}{\ell!}(x-t)^{\ell}$$

byt ut ℓ mot k

$$= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Alltså

$$\begin{cases} g'(t) = \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \\ h'(t) = -(n+1)(x-t)^n \end{cases}$$

Cauchys medelvärdessats ger att

$\exists\ \xi$ strikt mellan 0 och x sådant att $(\xi \neq 0, x)$

$$(g(x)-g(0))\,h'(\xi) = (h(x)-h(0))\,g'(\xi)$$

dvs

$$-(f(x)-P_n(x))(n+1)(x-\xi)^n =$$
$$= (0-x^{n+1})\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

Då $x \neq \xi$ gäller

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$\square$

ÖVNING

Räkna på fallet $g(t)$ som ovan, $h(t) = x-t$

Föreläsning (5)
5/11-13

STANDARDUTVECKLINGAR

(*) $f(x) = e^x$

$f^{(k)}(x) = e^x, \quad k = 1, 2, \ldots$

Taylors formel

$$e^x = f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}, \ \xi = \theta x, \ \theta \in [0,1]$$

Vi har

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Observation

$f(x)$ udda funktion (deriverbar

$\Rightarrow \quad f(-x) = -f(x) \quad \Big| \frac{d}{dx}$

$\Rightarrow \quad -f'(-x) = -f'(x)$

dvs $f'(-x) = f'(x)$, dvs f' jämn funktion

P.s.s $f(x)$ jämn funktion

$\Rightarrow f'(x)$ udda funktion

Dessutom

f udda

$\Rightarrow f(0) = -f(0)$

$\Rightarrow f(0) = 0$

Analogt derivatan av en jämn funktion är udda

(**) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

(***) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$(\sin x \longrightarrow \cos x \longrightarrow -\sin x \longrightarrow -\cos x \longrightarrow \sin x \longrightarrow \ldots)$$

anledningen till att man får varannan, och att varannan term är udda

Föreläsning (6)
5/11-13

Ex. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x(\cos x - 1)}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$

$x \neq 0$. $\frac{\sin x - x}{x(\cos x - 1)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) - x}{x(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) - 1)} =$

$= \frac{-\frac{x^3}{6} + O(x^5)}{-\frac{x^3}{2} + xO(x^4)} = \frac{-\frac{1}{6} + O(x^2)}{-\frac{1}{2} + O(x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

$h(x) = O(x^n)$

$\left|\frac{h(x)}{x^n}\right| \leq M$

för alla $x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \setminus \{0\}$

OBS! $O(x^n) - O(x^n) = O(x^n)$

$3\,O(x^n) = O(x^n)$