Differentialekvationer av ordning n med konstanta koefficienter

$$L[y] = (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0)[y] = f(x)$$

$a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

$P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$

Allmänna lösningen y till $L[y] = f$ ges av

$$y = y_h + y_p$$

där y_p är en lösning till $L[y] = f$ och y_h är den allmänna lösningen till $L[y] = 0$

Hur bestämmer vi y_h?

Karakteristiska polynomet till $P(D)$

$$P(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0$$

Faktorisera

$$P(r) = (r - r_1)^{m_1} \ldots (r - r_k)^{m_k}$$

där $r_1, \ldots, r_k$ är olika nollställen till $P(r)$

och $m_1, \ldots, m_k$ motsvarande multiplicitet

$n = m_1 + \ldots + m_k$

$r_i \neq r_j$ för $i \neq j$

Notera

$$P(D)[e^{rx}] = \underbrace{P(r)}_{\text{karakteristiska polynomet}} e^{rx}$$

$$P(D) = (D - r_1)^{m_1}(D - r_2)^{m_2} \ldots (D - r_k)^{m_k}$$

SATS: Antag att $P(D), P(r), r_1, \ldots, r_k$ och $m_1, \ldots m_k$ som ovan

Då gäller att den allmänna lösningen $y_h(x)$ till $P(D)[y] = 0$ kan skrivas

$$y_h(x) = \sum_{j=1}^{k} p_j(x) e^{r_j x} \qquad (*)$$

där $p_j(x)$ är polynom av grad högst $m_j - 1$, $j = 1, \ldots, k$ →

Notera $\sum_{j=1}^{k} P_j(x)e^{r_j x}$ i satsen innehåller $m_1 + \dots + m_k = n$

obestämda konstanter

Bevis:

① Visa att $P(D)\left[\sum_{j=1}^{k} P_j(x)e^{r_j x}\right] = 0$

Det gäller

$$P(D)\left[\sum_{j=1}^{k} P_j(x)e^{r_j x}\right] = \{P(D) \text{ linjär operator}\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} P(D)\left[P_j(x)e^{r_j x}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} Q_j(D)(D-r_j)^{m_j}\left[P_j(x)e^{r_j x}\right] \quad \text{där } Q_j(D) = \prod_{i \neq j}(D-r_i)^{m_i}$$

$$P(D)\left[\sum_{j=1}^{k} P_j(x)e^{r_j x}\right] =$$

Förskjutningsregeln

polynom av grad högst $m_j - 1$

$$= \sum_{j=1}^{k} Q_j(D)\Big[e^{r_j x}\underbrace{\underbrace{(D + r_j - r_j)^{m_j}}_{D^{m_j}}\left[P_j(x)\right]}_{0}\Big] = 0$$

② Visa att varje lösning till $P(D)[y] = 0$ kan skrivas

på formen (*)

Induktion över antalet olika nollställen till

karaktenstiska polynom

Induktionspåstående:

$I(k)$: För varje linjär differentialoperator med konstanta koefficienter för vilka motsvarande karakteristiska polynom har högst k st olika nollställen kan den allmänna lösningen skrivas på formen (*)

I(1) Sant

$$P(D) = (D-r)^m$$

Om $P(D)[y] = 0$ så

$$e^{-rx}(D-r)^m[y] = 0$$

$$D^m[e^{-rx}y(x)] = 0$$

Detta medför att $e^{-rx}y(x)$ är ett polynom av grad högst $m-1$, kalla det $p(x)$

Vi har

$$y(x) = p(x)e^{rx}$$

Alltså I(1) sant påstående

$I(k-1) \Longrightarrow I(k)$ Antag att $I(k-1)$ sant

Antag $P(D) = (D-r_1)^{m_1}(D-r_2)^{m_2}\dots(D-r_k)^{m_k}$

Antag att $P(D)[y] = 0$

Ska visa att y kan skrivas på formen $(*)$

Sätt $z(x) = (D-r_k)^{m_k}[y(x)]$

Alltså

$$(D-r_1)^{m_1}\dots(D-r_{k-1})^{m_{k-1}}[z(x)] = 0$$

$I(k-1)$ medför att

$$z(x) = \sum_{j=1}^{k-1} q_j(x)e^{r_jx}$$

där $q_j(x)$ polynom av grad högst $m_j - 1$, $j = 1, \dots, k-1$

Vi har $(D-r_k)^{m_k}[y(x)] = z(x) = \sum_{j=1}^{k-1} q_j(x)e^{r_jx}$

Förskjutningsregeln ger

$$D^{m_k}[e^{-r_kx}y(x)] = e^{-r_kx}(D-r_k)^{m_k}[y(x)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} q_j(x)e^{(r_j-r_k)x} \longrightarrow$$

Vi noterar att för varje $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ och polynom $p(x)$

$$\int e^{cx} p(x)\,dx = \frac{1}{c} e^{cx} p(x) - \frac{1}{c} \int e^{cx} p'(x)\,dx = \ldots =$$

$$= e^{cx} \tilde{p}(x) + C$$

där $\tilde{p}(x)$ är ett polynom med samma grad som $p(x)$

Upprepad integration ger

$$e^{-r_k x} \cdot y(x) = \sum_{j=1}^{k-1} P_j(x) e^{(r_j - r_k)x} + P_k(x)$$

där $P_j(x)$ polynom av grad $m_j - 1$, $j = 1, 2, \ldots, k$

Alltså

$$y(x) = \sum_{j=1}^{k} P_j(x) e^{r_j x}$$

dvs $y(x)$ har formen $(*)$

Alltså är $I(k)$ sant

Induktionsprincipen ger att $I(k)$ sant för alla positiva heltal k

Föreläsning (5)
1/11-13

$P(D)\,[y] = f(x)$

$y = y_h = y_p$

$y_h(x) = $ " $(*)$ "

Hur bestämmer vi y_p ?

Metod: lämplig ansats

$f(x)$	ansats för $y_p(x)$	
$p(x)$ polynom	$q(x) \cdot x^m$	där $q(x)$ polynom av samma grad som $p(x)$ och $m = \min_{a_k \neq 0} k$
$p(x) \cdot e^{ax}$, p polynom	$e^{ax}\, z(x)$	

Ex. $y'' + 3y' + 2y = x e^{\boxed{}}$?

Karakteristiska polynomet $r^2 + 3r + 2 = (r + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 2 =$

$= (r + \frac{3}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 = (r+2)(r+1)$

$r_1 = -2,\ r_2 = -1$

$m_1 = m_2 = 1$

$y_h(x) = A e^{-2x} + B e^{-x}$

Ansats $y_p(x) = e^{-x} \cdot z(x)$

Diff. ekv.

$$(D+2)(D+1)\,[y] = x e^{-x}$$

Med $y = e^{-x} \cdot z(x)$

$$(D+2)(D+1)\,[e^{-x} \cdot z(x)] = x e^{-x}$$

Förskjutningsregeln ger

$$e^{-x} \cdot (D+1) D\,[z(x)] = x e^{-x}$$

$$(D+1) D\,[z] = x$$

$$z'' + z' = x$$

Ansätt $z(x) = (ax+b) \cdot x = ax^2 + bx$ $\longrightarrow$

Föreläsning (6)
1/11-13

$z'(x) = 2ax + b$

$z''(x) = 2a$

Insättning i $z'' + z' = x$ ger

$$2a + 2ax + b = x$$

$$(2a-1)x + 2a + b = 0$$

Alltså $\begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$ dvs $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$

Vi har

$$z(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

och

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{-x}$$

$f(x)$	ansats för $y_p(x)$
$p(x)$ polynom	$q(x)\,x^m$ $\deg q = \deg p$ $m = \min k$, $a_k \neq 0$
• $p(x) \begin{cases} \cos(bx) \\ \sin(bx) \end{cases}$	Betrakta hjälpekvationen $P(D)[u] = p(x)e^{ibx}$ $(\operatorname{Re} e^{ibx} = \cos(bx),$ $\operatorname{Im} e^{ibx} = \sin(bx))$ Om samtliga koefficienter i $P(D)$ och $p(x)$ är reella gäller: $P(D)[\operatorname{Re} u] = p(x)\cos(bx)$ $P(D)[\operatorname{Im} u] = p(x)\sin(bx)$
• $p(x)e^{ax} \begin{cases} \cos(bx) \\ \sin(bx) \end{cases}$	Betrakta hjälpekv. $P(D)[u] = p(x)e^{(a+ib)x}$

$\longrightarrow$

Föreläsning (7)
1/11-13

- $f_1(x) + f_2(x)$

$$P(D)[y_1] = f_1, \; P(D)[y_2] = f_2$$

$$P(D)[y_1 + y_2] = f_1 + f_2$$

- Allmänt $f(x)$

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \underbrace{k(x-t)}_{\text{kallas Greenfunktion}} f(t)\,dt \quad \text{där} \quad P(D)[K] = 0$$

och $K(0) = K'(0) = \ldots = K^{(n-2)}(0) = 0$

$K^{(n-1)}(0) = 1$

Det gäller

$$y_p(x_0) = y_p'(x_0) = \ldots = y_p^{(n-1)}(x_0) = 0$$