Föreläsning (1)
31/10 - 13

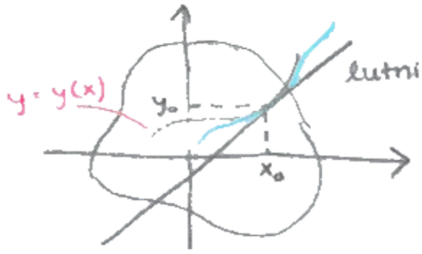
1:a ordningens differentialekvationer forts.

Ex. $y' = y^2 e^x$

Man kan inse genom att betrakta lösningarna att genom varje punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ går exakt en lösningskurva.

Allmänt

$$y' = g(x,y)$$



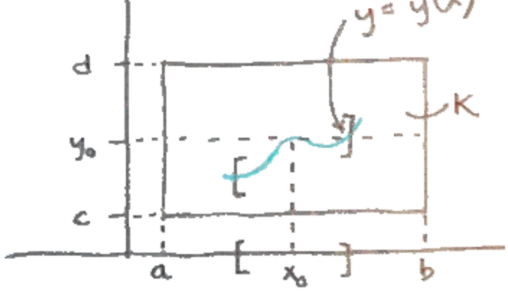
Existens-/entydighetssats (Picard)

Antag att

- $g(x,y)$ är kontinuerlig i axelparallell rektangel i xy-planet och
- Det finns $M \in \mathbb{R}$ sådant att

$$|g(x,y_1) - g(x,y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \quad \text{alla } (x,y_1), (x,y_2) \in K$$

Då finns för varje $(x_0, y_0) \in K$ en entydigt bestämd lösning $y(x)$ till $\begin{cases} y' = g(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ i en omgivning av x_0. Denna omgivning av x_0 är av formen $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap [a,b]$ där $\varepsilon = \varepsilon(M,K) > 0$ och $K = [a,b] \times [c,d]$. Om $K = [a,b] \times \mathbb{R}$ så gäller påståendet för omgivningen $[a,b]$ till x_0



→

Remark:

- $g(x,y)$ kontinuerlig i $(\tilde{x},\tilde{y})$ och det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta = \delta(\varepsilon, \tilde{x}, \tilde{y}) > 0$ så att

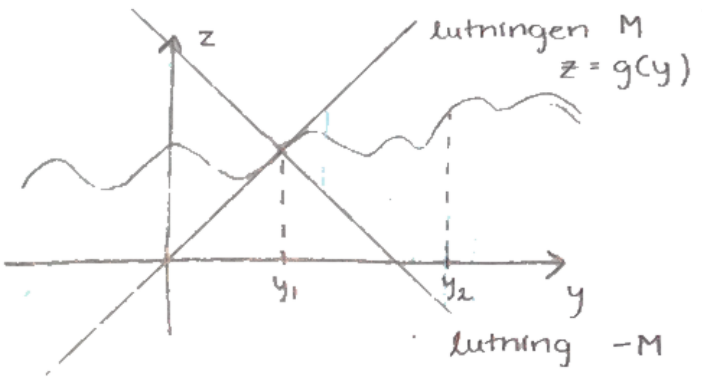
$$\sqrt{(x-\tilde{x})^2 + (y-\tilde{y})^2} < \delta \implies |g(x,y) - g(\tilde{x},\tilde{y})| < \varepsilon$$

= avståndet mellan (x,y) och $(\tilde{x},\tilde{y})$

Det andra villkoret pa g i satsen beskrivs ofta som att g ska uppfylla ett Lipschitz-villkor m.a.p andra variabeln, dvs y, i K

Antag att g ej beror på x

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \quad \text{alla } y_1, y_2$$



Ex (forts.)

$g(x,y) = y^2 e^x$

Välj $K = [-L, L] \times [-L, L]$

Fråga: Uppfyller $g(x,y)$ ett Lipschitz-villkor i K

$(x, y_1), (x, y_2) \in K$

$$|g(x,y_1) - g(x,y_2)| = |y_1^2 e^x - y_2^2 e^x| = \underbrace{e^x}_{\leq e^L} \underbrace{|y_1 + y_2|}_{\leq 2L} |y_1 - y_2| \leq$$

$$\leq M|y_1 - y_2| \quad \text{där } M = e^L 2L$$

Svar: Ja

Föreläsning (3)
31/10-13

Bevisidé för existens-/entydighetssatsen

① Omskrivningen av $\begin{cases} y' = g(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ som en

integralekvation

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, y(t))\, dt$$

② Bilda funktionsföljden $y_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

där $\quad y_0(x) = y_0$

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, y_n(t))\, dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

③ Vill visa att

$$y_n \longrightarrow y$$

och

$$\begin{array}{ccccc} y_{n+1}(x) & = & y_0 & + & \underbrace{\int_{x_0}^{x} g(t, y_n(t))\, dt} \\ \downarrow & & \| & & \downarrow \\ y(x) & = & y_0 & + & \int_{x_0}^{x} y(t, y(t))\, dt \end{array}$$

Här måste "$\longrightarrow$" preciseras

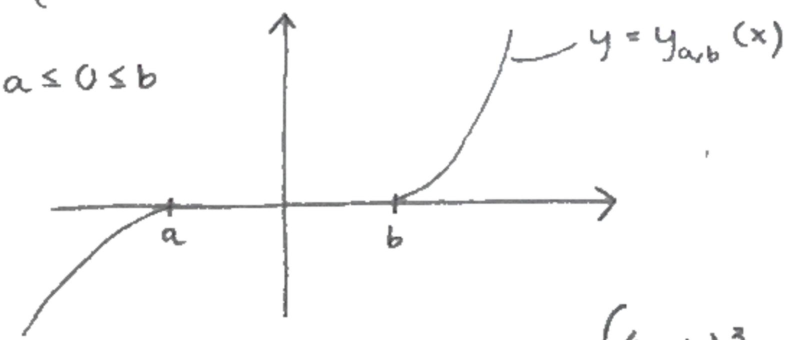
Bygger på likformig konvergens av kontinuerliga funktioner och en fixpunktssats (iterationer)

Vi återkommer till detta bevis senare

Ex. (icke-entydighet)

$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ har lösningar

$a \leq 0 \leq b$



Även $y = 0$ är en lösning

där $y_{a,b}(x) = \begin{cases} (x-b)^3 & x \geq b \\ 0 & b > x \geq a \\ (x-a)^3 & a > x \end{cases}$

$\longrightarrow$

Föreläsning (4)
31/10 -13

Observera att $g(y) = 3y^{2/3}$ uppfyller inget Lipschitz-villkor i någon axelparallell rektangel som innehåller $y=0$ (g oberoende av x)

$$|g(y) - g(0)| = 3|y^{2/3}| = \frac{3}{|y|^{1/3}}|y-0|, \quad y \neq 0$$

Linjära differentialekvationer av ordning n

förtydliga linjär diff. operator

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Deriveringsoperatorn $D = \frac{d}{dx}$

$D[y] = y'$, $D^2[y] = D[D[y]] = y''$, $D^n[y] = D^{n-1}[D[y]]$

$$L[y] = D^n[y] + a_{n-1}(x)D^{n-1}[y] + \dots + a_0(x)[y] =$$

$$= \underbrace{\left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_0(x)\right)}_{\text{Linjär differentialoperator}}[y]$$

L linjär då:

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2]$$

där c_1, c_2 konstanter, y_1, y_2 n gånger deriverbar funktion

Superpositionsprincipen

$L[y_1] = L[y_2] = 0$ (0-funktionen)

$\Longrightarrow$

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = 0$$

Föreläsning (5)
31/10-13

SATS: Antag att $L[y_p] = f$

(y_p är en partikulärlösning till $L[y] = f$)

L som ovan

Då gäller

$$L[\tilde{y}] = f$$

om och endast om

$$L[\tilde{y} - y_p] = 0$$

Slutsats: Den allmänna lösningen till $L[y] = f$ ges av

$y = y_h + y_p$ där y_p är en partikulärlösning och

y_h är den allmänna lösningen till $L[y] = 0$

BEVIS AV SATS:

$$L[\tilde{y} - y_p] = \{L \text{ linjär}\} = L[\tilde{y}] - L[y_p] =$$

$$= L[\tilde{y}] - f$$

$\square$

Önskar bestämma den allmänna lösningen y_h till $L[y] = 0$

h = homogen

Liten kalkyl:

$$(D + a(x))(D + b(x))[y] = (D + a(x))\left[(D + b(x))[y]\right] =$$

$$= (D + a(x))[y' + b(x)y] = y'' + b'(x)y + b(x)y' + a(x)y' + a(x)y +$$

$$+ a(x)b(x)y =$$

$$= \left(D^2 + (a(x) + b(x))D + (a(x)b(x) + b'(x))\right)[y]$$

Om $a(x), b(x)$ är konstanta funktioner får vi

$$(D + a)(D + b)[y] = \left(D^2 + (a + b)D + ab\right)[y]$$

Om $P(r)$ och $Q(r)$ är polynom (med konstanta koefficienter) så

$$P(D)Q(D)[y] = (PQ)(D)[y]$$

$\longrightarrow$

Föreläsning (6)
31/10-13

Vi antar att koefficienterna i differentialoperatorn är konstanter

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

$a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ konstanter

Vi kallar

$$P(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

det karaktäristiska polynomet till L

$$P(r) = 0$$

kallas för den karaktäristiska ekvationen till L

Med hjälp av algebrans fundamentalsats och faktorsatsen får

$$P(r) = (r-r_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (r-r_k)^{m_k}$$

där $r_1, \dots, r_k$ är de olika nollställena till $P(r)$ med multipliciteterna $m_1, \dots, m_k$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$$

Vi har $L[y] = P(D)[y] = (D-r_1)^{m_1}(D-r_2)^{m_2}\dots(D-r_k)^{m_k}[y]$

$$P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

Vi vet.

$$c = \alpha + i\beta \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$e^{cx} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$$

$$\frac{d}{dx} e^{cx} = \alpha e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) + e^{\alpha x}\underbrace{(-\beta\sin(\beta x) + i\beta\cos(\beta x))}_{i\beta(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))} =$$

$$= (\alpha + i\beta)e^{\alpha x}e^{i\beta x} = ce^{cx}$$

Föreläsning (7)
31/10-13

Förskjutningsregeln

$P(D)$ linjär diff. operator med konstanta koefficienter

$c \in \mathbb{C}$

$$\Longrightarrow \quad P(D)\left[e^{cx} z(x)\right] = e^{cx} P(D+c)\left[z(x)\right]$$

BEVIS:

$$D\left[e^{cx} \cdot z(x)\right] = c e^{cx} \cdot z(x) + e^{cx} \cdot z'(x) =$$

$$= e^{cx}\left(z'(x) + c z(x)\right) = e^{cx}(D+c)\left[z(x)\right]$$

$$D^2\left[e^{cx} \cdot z(x)\right] = D\left[D\left[e^{cx} \cdot z(x)\right]\right] =$$

$$= D\left[e^{cx}(D+c)\left[z(x)\right]\right] = e^{cx}(D+c)\left[(D+c)\left[z(x)\right]\right] =$$

$$= e^{cx}(D+c)^2\left[z(x)\right]$$

På samma sätt

$$D^k\left[e^{cx} \cdot z(x)\right] = e^{cx}(D+c)^k\left[z(x)\right]$$ alla positiva heltal k

Alltså:

$$P(D)\left[e^{cx} z(x)\right] = \left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right)\left[e^{cx} z(x)\right] =$$

$$= \underbrace{D^n\left[e^{cx} \cdot z(x)\right]}_{e^{cx}(D+c)^n[z(x)]} + a_{n-1}\underbrace{D^{n-1}\left[e^{cx} \cdot z(x)\right]}_{e^{cx}(D+c)^{n-1}[z(x)]} + \ldots + a_1 \underbrace{D\left[e^{cx} \cdot z(x)\right]}_{e^{cx}(D+c)[z(x)]} + a_0\left[z(x)\right]$$

$$= e^{cx}\left((D+c)^n + a_{n-1}(D+c)^{n-1} + \ldots + a_1(D-c) + a_0\right)\left[z(x)\right] =$$

$$= e^{cx} P(D+c)\left[z(x)\right]$$