MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2013-04-02, TID(8.30-12.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jakob Hultgren, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS:	Ange linje samt personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* inlämnat blad. Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen
$$y''' - y = 3xe^x.$$
(8p)

2. Lös differensekvationen
$$\begin{cases} y_{n+1} - y_n = \sin n, & n = 0, 1, 2, \dots \\ y_0 = 0 \end{cases}$$
(6p)

3. (a) Sätt
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$
Avgör om gränsvärdet
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$
existerar och om så är fallet beräkna gränsvärdet.
(5p)

(b) Beräkna
$$\lim_{x\to\infty} [(x^3 - x^2 + \frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1}].$$
(5p)

4. (a) Avgör om serien
$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}}$$
konvergerar.
(4p)

(b) För vilka $x \in \mathbb{R}$ är serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}(x-1)^k \arctan(\frac{1}{k})$$

absolutkonvergent?

(6p)

5. För $a \in \mathbb{R}$ låt $\lfloor a \rfloor$ beteckna det största heltal n sådant att $n \leq a$. Beräkna

$$\int_0^1 2^{-\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}\, dx.$$

(6p)

6. För $x \in \mathbb{R}$ sätt

$$f_0(x) = \frac{1}{1+x^2},\ f_{n+1}(x) = 1 - \cos(f_n(x)),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Låt $s(x)$ beteckna summan av funktionsserien $\Sigma_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Avgör om $s(x)$ är en deriverbar funktion för alla $x \in \mathbb{R}$.

(7p)

7. Formulera och bevisa Taylors formel (kring $x = 0$) med restterm på Lagrangeform.

(8p)

8. Antag att $f : [0,1] \to [0,1]$ är en deriverbar funktion med

$$\sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| \equiv k < 1.$$

Fixera ett godtyckligt $x_0 \in [0,1]$ och betrakta talföljden $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ där $x_{n+1} = f(x_n)$. Det gäller att f har en entydigt bestämd fixpunkt $a \in [0,1]$ (behöver inte visas). Visa uppskattningarna

(a)
$$|x_{n+1} - a| \leq k^{n+1}|x_0 - a|$$

(b)
$$|x_{n+1} - a| \leq \frac{k^{n+1}}{1-k}|x_1 - x_0|$$

för $n = 1, 2, 3, \ldots$

(5p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

Lösningsförslag TMA976-tentan den 2/4 2013

① Lös $y''' - y = 3xe^x$

Lösning: Karakteristiska ekvationen

$$0 = r^3 - 1 = (r-1)(r^2+r+1) = (r-1)((r+\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2)$$

ger $r_1 = 1$, $r_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Detta ger homogena lösningen

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{-\frac{x}{2}}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) + Ce^{-\frac{x}{2}}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x).$$

Ansätt partikulärlösningen $y_p(x) = e^x \cdot z(x)$. Insättning (eller förskjutningsregeln) ger $z''' + 3z'' + 3z' = 3x$

Ansättningen $z(x) = (ax+b)\cdot x$ ger $z(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

Allmänna lösningen $y(x)$ ges av $y_h(x) + y_p(x)$

Svar: $y(x) = (A - x + \frac{1}{2}x^2)e^x + Be^{-\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + Ce^{-\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$.

② Lös $y_{n+1} - y_n = \sin n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $y_0 = 0$

Lösning: Karakteristiska ekvationen $r - 1 = 0$ ger homogena lösningen $y_n^{(h)} = A \cdot 1^n = A$. För att bestämma en partikulärlösning betrakta hjälpekvationen

$$\tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n = e^{in}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ansätt $\tilde{y}_n = Be^{in}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Insättning ger

$B = \frac{1}{e^i - 1}$ och vi får $y_n^{(p)} = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{e^i - 1}e^{in}\right] =$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\frac{e^{i/2} - e^{-i/2}}{2i}} \cdot \frac{1}{2i} e^{i(n-\frac{1}{2})}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\cos(n-\frac{1}{2})}{\sin\frac{1}{2}}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Allmänna lösningen ges av $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} =$

$$= A - \frac{1}{2}\frac{\cos(n-\frac{1}{2})}{\sin\frac{1}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Villkoret $y_0 = 0$ ger $A = \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$. Vi får

$$y_n = \frac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}\left(\cos\tfrac{1}{2} - \cos(n - \tfrac{1}{2})\right) = \{\text{additionsformlerna}\} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n}{2} \cdot \sin\frac{n-1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$$

Svar: $y_n = \dfrac{\sin\frac{n}{2} \cdot \sin\frac{n-1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

(vilket kan skrivas om som $\sum_{k=1}^{n-1} \sin k$)

③ a) Avgör om $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar där

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Lösning: Då $f(0,y) = 0$ för $y \in \mathbb{R}$ måste gränsvärdet vara $= 0$ om det existerar. Men vi ser att

$f(t,t^2) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \not\to 0, \quad t \to 0$

Alltså existerar gränsvärdet ej.

Svar: $\nexists$

b) Beräkna $\lim_{x\to\infty} \left[(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1} \right]$.

Lösning: Standardutvecklingarna

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + O(t^4) \quad , t \to 0$

$\sqrt{1+t} = 1 + O(t) \quad , t \to 0$

ger för $x > 0$

$$(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1} = (x^3 - x^2 + \frac{x}{2})(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + O(\frac{1}{x^4})) - x^3 \sqrt{1+\frac{1}{x^6}} = x^3 + \frac{1}{6} + O(\frac{1}{x}) - x^3(1 + O(\frac{1}{x^6})) = \frac{1}{6} + O(\frac{1}{x}) \to \frac{1}{6} \quad , x \to \infty$$

Svar: $\frac{1}{6}$

④ a) Avgör om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}$ konvergerar.

Lösning: För positivt heltal k gäller $k! \leq k^k$ och alltså $\frac{1}{\sqrt[k]{k!}} \geq \frac{1}{k}$. Då $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergerar måste också $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}$ divergera enligt jämförelsesatsen. (Alt: Stirlings formel $k! = (\frac{k}{e})^k \sqrt{2\pi k}\,(1+\varepsilon_k)$, $\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$ ger $\frac{1}{\sqrt[k]{k!}} = \frac{e}{k} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi k)^{1/2k} \cdot (1+\varepsilon_k)^{1/k}}}_{\to 1,\ k\to\infty}$. Alltså gäller

$\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{\sqrt[k]{k!}}} \to \frac{1}{e} \quad , k \to \infty$ och slutsatsen blir densamma som ovan.)

Svar: serien divergerar

b) Bestäm mängden $\{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} (x-1)^k \arctan\frac{1}{k}$ absolut-konvergent $\}$.

Lösning: Sätt $t = x-1$ och betrakta potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} \arctan(\frac{1}{k}) \cdot t^k$. Då $\lim_{k\to\infty} \frac{\arctan\frac{1}{k+1}}{\arctan\frac{1}{k}} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1} + O((\frac{1}{k+1})^2)}{\frac{1}{k} + O(\frac{1}{k^2})} = 1$$

gäller att konvergensradien för potensserien är $\frac{1}{1} = 1$. Härav följer att potensserien är absolutkonvergent för $|t|<1$ och divergent för $|t|>1$. För $|t|=1$ gäller att $\sum_{k=1}^{\infty} |\arctan(\frac{1}{k}) \cdot t^k| = \sum_{k=1}^{\infty} \arctan(\frac{1}{k})$ divergerar enligt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform då $\arctan(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k} + O(\frac{1}{k^2})$. Vi får att $\sum_{k=1}^{\infty} \arctan(\frac{1}{k}) \cdot (x-1)^k$ är absolutkonvergent för $-1 < x-1 < 1$ dvs $x \in (0,2)$.

<u>Svar:</u> $(0,2)$

⑤ Beräkna $\int_0^1 2^{-\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} dx$

Lösning: Vi noterar att $\frac{1}{x} \geq 1$ för $x \in (0,1]$ och

$\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = k \iff \frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$

Alltså gäller

$$\int_0^1 2^{-\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} 2^{-\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} dx = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Vidare har vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^k}{k} = \{\text{standardutveckling}\} =$$

$$= -\ln(1-\tfrac{1}{2}) = -\ln\tfrac{1}{2} = \ln 2$$

och alltså

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \ln 2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-(k+1)}}{k+1} =$$

$$= \ln 2 - 2(\ln 2 - \tfrac{1}{2}) = 1 - \ln 2$$

<u>Svar:</u> $1 - \ln 2$

⑥ $f_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f_{n+1}(x) = 1 - \cos(f_n(x))$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in \mathbb{R}$.
Summan av $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ betecknas $s(x)$.

Avgör om $s(x)$ är en deriverbar funktion för alla $x \in \mathbb{R}$

Lösning: Vi noterar att enligt sats är $s(x)$ deriverbar funktion för $x \in \mathbb{R}$ om $f_n \in C^1(\mathbb{R})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ konvergerar likformigt på $\mathbb{R}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergerar punktvis på $\mathbb{R}$. Det gäller att

$$|f_{n+1}(x)| = 2\sin^2\left(\frac{f_n(x)}{2}\right) \leq 2\left(\frac{f_n(x)}{2}\right)^2 = \frac{(f_n(x))^2}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Då $|f_0(x)| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$ gäller induktivt $|f_n(x)| \leq 2^{-n}$, $n = 0, 1, \ldots$ (enkelt induktionsbevis). Alltså konvergerar $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ likformigt på $\mathbb{R}$ enligt Weierstrass M-sats.

Vidare fås induktivt att

$$|f_{n+1}'(x)| = |\sin(f_n(x))| \cdot |f_n'(x)| \leq 2^{-n} \cdot |f_n'(x)|$$

och $|f_n'(x)| \leq 2^{-n}$, $n = 0, 1, \ldots$, $x \in \mathbb{R}$ då $|f_0'(x)| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Alltså $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ konvergerar likformigt på $\mathbb{R}$ enligt Weierstrass M-sats. Då $f_n \in C^1(\mathbb{R})$ $n = 0, 1, \ldots$ (induktion) så gäller att $s(x)$ ~~som~~ är en deriverbar funktion för alla $x \in \mathbb{R}$.

Svar: $s(x)$ deriverbar för alla $x \in \mathbb{R}$.

(7) se ELW

(8) $f: [0,1] \to [0,1]$ uppfyller $\sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| = k < 1$. Det gäller att f har en entydigt bestämd fixpunkt $a \in [0,1]$. $x_0 \in [0,1]$ godtycklig och $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$. Visa

(i) $|x_{n+1} - a| \leq k^{n+1} |x_0 - a|$

Bevis: Enligt medelvärdessatsen gäller

$|f(z_1) - f(z_2)| \leq k\,|z_1 - z_2|$ för alla $z_1, z_2 \in [0,1]$. Alltså

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| \leq k\,|x_n - a| \leq \{\text{induktion}\} \leq$$
$$\leq k^{n+1} |x_0 - a|.$$

(ii) $|x_{n+1} - a| \leq \dfrac{k^{n+1}}{1-k} |x_1 - x_0|$

Bevis: Vi noterar att

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - a| \leq \{\text{triangel olikheten}\} \leq$$

$$\leq |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+1} - a| \leq |x_{n+1} - x_n| + k|x_n - a|$$

Alltså får vi

$$|x_n - a| \leq \frac{1}{1-k} |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{k}{1-k} |x_n - x_{n-1}| \leq \dots \leq$$

$$\leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$$

Vi har då

$$|x_{n+1} - a| \leq \frac{k^{n+1}}{1-k} |x_1 - x_0|$$

Ⓔ