

## MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2012-12-19,  
TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Dawan Mustafa, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

---

**OBS:** Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.  
Ange kod på *varje* inlämnat blad.  
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.  
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + y' - 2y = 1$$

som är 0 för  $x = 0$  och som har ett gränsvärde då  $x \rightarrow \infty$ .

(5p)

2. Bestäm den lösningskurva  $y = y(x)$  till differentialekvationen

$$(xy + y)y' = x^2y^2 + x^2$$

som går genom punkten  $(1, 2)$  och som är definierad på ett så stort intervall som möjligt.

(7p)

3. (a) Taylorutveckla  $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$  kring 0 med restterm på formen  $\mathcal{O}(x^8)$ .

(4p)

- (b) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left( \frac{1}{e} - \left( \frac{x}{x+1} \right)^x \right).$$

(4p)

4. (a) För vilka positiva tal  $a$  och  $b$  är serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^{\frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \dots + \frac{1}{b+k}}$$

konvergent?

(6p)

- (b) Beräkna

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k(k+1)}{k!}.$$

(6p)

5. Visa att det finns ett entydigt bestämt tal  $\alpha > 0$  sådant att talföljden

$$\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}, \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}}, \dots$$

konvergerar och har gränsvärdet  $\alpha$ .

(6p)

6. Avgör om funktionsföljden  $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ , där  $s_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$ , konvergerar likformigt på  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

(6p)

7. Formulera och bevisa Taylors formel (kring  $x = 0$ ) med restterm på Lagrangeform.

(8p)

8. Antag att  $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$  är en följd av kontinuerligt deriverbara funktioner på  $[0, 1]$ . Antag vidare att funktionsföljden konvergerar punktvis på  $[0, 1]$  samt att

$$\max_{x \in [0,1]} |s'_n(x)| \leq 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Visa att funktionsföljden konvergerar likformigt på  $[0, 1]$ .

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK

① Bestäm lösningen till

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 1 \\ y(0) = 0 & (1) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \exists & (2) \end{cases}$$

Lösning: Karakteristiska ekvationen  $r^2 + r - 2 = 0$

har rötterna  $r_1 = 1, r_2 = -2$ . Detta ger allmänna homogena lösningar  $y_h(x) = A e^x + B e^{-2x}$ . Ansätt en partikulärlösning som  $y_p(x) = C$ ,  $C$  konstant.

Insättning i differentialekvationen ger  $C = -\frac{1}{2}$ . Den allmänna lösningen  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$  uppfyller villkoren

$$(1): 0 = y(0) = A + B - \frac{1}{2}$$

$$(2): A = 0 \text{ då } e^x \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty \text{ och } \lim_{x \rightarrow \infty} (B e^{-2x} - \frac{1}{2}) \text{ existerar}$$

Detta ger  $A = 0, B = \frac{1}{2}$  och alltså  $y(x) = \frac{1}{2} e^{-2x} - \frac{1}{2}$ .

$$\text{Svar: } \frac{1}{2} e^{-2x} - \frac{1}{2}$$

② Bestäm lösningen till

$$\begin{cases} (xy + y) y' = x^2 y^2 + x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Lösning: Differentialekvationen är icke-linjär och av 1: ordet.

Omstrukturering ger  $\frac{y}{y^2+1} y' = \frac{x^2}{x+1}, x \neq -1$

och vi ser att differentialekvationen är av separabel typ,

där  $g(y) y' = f(x)$  där  $g(y) = \frac{y}{y^2+1}$  och  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Integrering ger

$$G(y) = \int \frac{y}{y^2+1} dy = \frac{1}{2} \ln(y^2+1)$$

$$F(x) = \int \frac{x^2}{x+1} dx = \int (x-1 + \frac{1}{x+1}) dx = \frac{1}{2} x^2 - x + \ln(x+1),$$

för  $x > -1$ .

$$G(y(x)) = F(x) + C \text{ ger } \ln((y(x))^2+1) = (x-1)^2 + \ln((x+1)^2) + C'$$

Vi får

$$(y(x))^2 = e^{(x-1)^2} \cdot (x+1)^2 \cdot e^c - 1 = e^{(x-1)^2} \cdot (x+1)^2 \cdot c'' - 1, \quad x > -1$$

där  $c'' > 0$ . Villkoret  $y(1) = 2$  bestämmer konstanten  $c''$

$$4 = e^0 \cdot 4 \cdot c'' - 1 \quad \text{ger} \quad c'' = \frac{5}{4}$$

För de  $x > 1$  som uppfyller  $e^{(x-1)^2} \cdot (x+1)^2 \cdot \frac{5}{4} - 1 \geq 0$  får

$$y(x) = \sqrt{e^{(x-1)^2} \cdot (x+1)^2 \cdot \frac{5}{4} - 1} \quad \text{där vi uttrycker att } y(1) > 0$$

Svar:  $y(x) = \sqrt{e^{(x-1)^2} \cdot (x+1)^2 \cdot \frac{5}{4} - 1}$

③ a) Taylorutveckla  $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$  kring 0 med resttermen på formen  $O(x^8)$

Lösning: Med standardutvecklingarna

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O(x^9), \quad x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4), \quad t \rightarrow 0$$

får vi

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + O(x^8)\right)\right) = \\ &= \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + O(x^8)\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + O(x^6)\right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{3!} + O(x^4)\right)^3 + O(x^8) = \\ &= -\frac{1}{3!} x^2 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3!}\right)^2\right) x^4 + \left(-\frac{1}{7!} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{3!}\right) \left(\frac{1}{5!}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3!}\right)^3\right) x^6 + O(x^8) = -\frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{180} x^4 + \frac{1}{1134} x^6 + O(x^8) \end{aligned}$$

Svar:  $-\frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{180} x^4 + \frac{1}{1134} x^6 + O(x^8)$

b) Beräkna  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right)$

Lösning: Omskrivning ger

$$\begin{aligned} x \cdot \left(\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right) &= \frac{x}{e} \left(1 - e^{-x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}\right) = \\ &= \left\{ \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3), \quad t \rightarrow 0 \right\} = \\ &= \frac{x}{e} \left(1 - e^{1 - x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^2 + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)}\right) = \frac{x}{e} \left(1 - e^{\frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right) = \\ &= \left\{ e^t = 1 + t + O(t^2), \quad t \rightarrow 0 \right\} = \frac{x}{e} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{2e} + O\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow -\frac{1}{2e}, \quad x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Svar:  $-\frac{1}{2e}$

④ a) För vilka  $a > 0, b > 0$  konvergerar  $\sum_{k=0}^{\infty} a^{\frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \dots + \frac{1}{b+k}}$

Lösning: Ett nödvändigt villkor för konvergens är

att  $a^{\frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \dots + \frac{1}{b+k}} \rightarrow 0$  då  $k \rightarrow \infty$ . Då  $b > 0$

är  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \dots + \frac{1}{b+k} > 0$  för  $k = 0, 1, 2, \dots$  och alltså

måste  $a < 1$ . Vidare noterar vi att  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b+k}$

divergerar (jämför med  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  och använd

jämförskriteriet på gränsvärdesform). Alltså

gäller  $a^{\frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b+k}} \rightarrow 0$  då  $k \rightarrow \infty$  för  $0 < a < 1$ .

För att avgöra om serien i uppgiften konvergerar

för vi undersöka hur snabbt  $a^{\frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b+k}}$  går mot 0

då  $k \rightarrow \infty$ . Vi noterar att (jfr beviset av  $\int$ -kriteriet)

$$\int_0^k \frac{1}{b+x} dx \leq \sum_{l=0}^k \frac{1}{b+l} \leq \int_0^k \frac{1}{b+x} dx + \frac{1}{b}$$

och alltså

$$\ln\left(1 + \frac{k}{b}\right) \leq \sum_{l=0}^k \frac{1}{b+l} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{b}\right) + \frac{1}{b} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Detta ger oss

$$a^{\ln\left(1 + \frac{k}{b}\right) + \frac{1}{b}} \leq a^{\frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b+k}} \leq a^{\ln\left(1 + \frac{k}{b}\right)}$$

Notera att  $a^{\ln\left(1 + \frac{k}{b}\right)} = e^{\ln\left(1 + \frac{k}{b}\right) \ln a} = \left(1 + \frac{k}{b}\right)^{\ln a}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Serien  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$  konvergerar om  $\alpha < -1$ . Detta

ger oss via jämförskriteriet på gränsvärdesform att

$\sum_{k=0}^{\infty} a^{\frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b+k}}$  konvergerar om  $\ln a < -1$

dvs  $0 < a < \frac{1}{e}$ , beroende av  $b > 0$

Svar: Konvergerar om  $0 < a < \frac{1}{e}$ ,  $b > 0$

⑤ Beräkna  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k (k+1)}{k!}$

Lösning: Notera att Taylserien för  $e^x$  ges av

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \text{ Denna potensserie är konvergent}$$

för varje  $x \in \mathbb{R}$  (inse lätt via kvotkriteriet eller

ratkriteriet + störningsformel). Vi kan alltså derivera

potensserien termvis. Speciellt får

$$\frac{d}{dx}(xe^x) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(k+1)}{k!}$$

Alltså gäller

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k(k+1)}{k!} = \frac{d}{dx}(xe^x) \Big|_{x=3} = (e^x + xe^x) \Big|_{x=3} = 4e^3$$

Svar:  $4e^3$

- ⑤ Visa att det finns entydigt bestämt  $\alpha > 0$  sådant att  $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}, \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}}, \dots$  konvergerar och har gränsvärdet  $\alpha$ .

Lösning: Talföljden har formen  $x_1 = \sqrt{\alpha}, x_{n+1} = \sqrt{\alpha + x_n}, n=1, 2, \dots$

Vi noterar att funktionen  $\sqrt{\alpha + x}$  är kontinuerlig så

om  $x_n \rightarrow \alpha, n \rightarrow \infty$  så måste

$$\alpha \leftarrow x_{n+1} = \sqrt{\alpha + x_n} \rightarrow \sqrt{2\alpha}, \quad n \rightarrow \infty$$

dvs  $\alpha = \sqrt{2\alpha}$ . Följaktligen måste  $\alpha = 2$ .

Återstår att visa att följden  $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n=1, 2, \dots$

konvergerar. Här gäller att följden  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  är

1) växande (följer direkt från  $\sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} < \dots$ )

man får också induktivt från

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \sqrt{2 + x_{n+1}} - \sqrt{2 + x_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\sqrt{2 + x_{n+1}} + \sqrt{2 + x_n}} \quad \Bigg)$$

2) uppåt begränsad:  $x_1 = \sqrt{2} \leq 2$  och

$$\text{om } x_n \leq 2 \text{ så gäller } x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$$

Satsen om monoton talföljders konvergens ger nu att

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergerar och gränsvärdet  $x$  uppfyller  $x = \sqrt{2 + x}$

vilket ger  $x = 2$ . (Man kan också visa konvergensten

med fixpunktsatsen tillämpad på funktionen  $f: [1, 2] \rightarrow [1, 2]$

där  $f(x) = \sqrt{2 + x}$ . Notera här att  $\max_{x \in [1, 2]} |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{3}} < 1$ )

Svar:  $\alpha = 2$

- ⑥ Avgör om  $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}, s_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$ , konvergerar  
liktformigt på  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Lösning: Vi observerar att

$$s_n(0) = 0 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$s_n(x) = n(\cos x)^n \cdot \sin x \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{för } x \in (0, \frac{\pi}{2}] \text{ då}$$
$$0 \leq \cos x < 1 \quad \text{för dylika } x.$$

Alltså  $s_n \rightarrow s$  punktvis på  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , där  $s(x) = 0, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

För att avgöra om funktionsföljen konvergerar likformigt

på  $[0, \frac{\pi}{2}]$  studerar vi  $\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |s_n(x) - s(x)| \equiv d_n$

konvergensten är likformig om  $d_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

per definition. Nu gäller  $\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |s_n(x) - s(x)| = \max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} s_n(x)$ .

Vi studerar  $s_n(x)$  på  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Derivera

$$s'_n(x) = n(\cos x)^{n+1} - n^2(\cos x)^{n-1} \cdot \sin^2 x =$$
$$= n(\cos x)^{n+1} \cdot [1 - n \tan^2 x], \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}).$$

Vi noterar att  $\tan^2 x = \frac{1}{n}, x \in (0, \frac{\pi}{2})$  för  $x \approx \frac{1}{\sqrt{n}}$

( $\tan x = x + O(x^2), x \rightarrow 0$  via Taylroräkning).

Det gäller  $s_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = n \cdot (\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}))^n \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = \{\text{Taylor}\} =$

$$= n \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{n}})^2 + O(\frac{1}{n^2})\right)^n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}})\right)$$

$$= e^{n \ln(1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}))} = \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + O(\frac{1}{n}))$$

$$= e^{n \cdot (-\frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}))} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2} + O(\frac{1}{n})}$$

$$= \sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot (1 + O(\frac{1}{n}))\right) \cdot (1 + O(\frac{1}{n})) =$$

$$= \sqrt{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 + O(\frac{1}{n})) \rightarrow \infty \quad \text{då } n \rightarrow \infty$$

Alltså  $d_n \rightarrow +\infty$  då  $n \rightarrow \infty$  och funktionsföljen  $s_n$  konvergerar verkligen inte mot  $s$  likformigt på  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Alt: Man noterar att  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} s_n(x) dx = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$  då  $n \rightarrow \infty$  vilket ju inte är fullt.

Alt: Man noterar att  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} s(x) dx = 0$  vilket ju inte är fullt.

$$0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} s(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} s_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

vilket ju inte är fullt.

Svar: konvergerar inte likformigt på  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

⑦ Se PB1

⑧  $s_m \in C^1([0,1])$  med  $\max_{x \in [0,1]} |s'_m(x)| \leq 1$  för  $m=1,2,\dots$   
och  $(s_m(x))_{m=1}^\infty$  konvergerar punktvis på  $[0,1]$ .

Visa att  $(s_m(x))_{m=1}^\infty$  konvergerar likförmigt på  $[0,1]$ .

Beweis: Låt  $s(x)$ ,  $x \in [0,1]$ , beteckna den punktvisa gränsvärdet. Observera att vi inte vet om denna är integrerbar eller deriverbar. Vi ska visa att för varje  $\tilde{\epsilon} > 0$  finns  $\tilde{N}$  så att  $|s_m(x) - s(x)| < \tilde{\epsilon}$  för alla  $x \in [0,1]$  för alla  $m \geq \tilde{N}$ .  $\tilde{N}$  får bara bero på  $\tilde{\epsilon}$ . Välj ändligt många punkter  $x_1, x_2, \dots, x_M$  i  $[0,1]$  sådan att

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{M-1} < x_M = 1, \quad \max_{k=2,3,\dots,M} (x_k - x_{k-1}) < \epsilon.$$

Här beror  $M$  på  $\epsilon$ . Då  $M$  är ändligt finns det ett  $N$

så att  $|s_m(x_k) - s(x_k)| < \epsilon$  för alla  $m \geq N$  och alla  $k \in \{1, 2, \dots, M\}$ . Notera att för  $x \in [0,1]$  gäller

$$|s_m(x) - s_m(x_k)| \leq |s_m(x) - s(x)| + |s_m(x) - s_m(x_k)|$$

alltså  $|s_m(x_k) - s_m(x_k)| < 2\epsilon$  för alla  $m, m \geq N$

för alla  $k \in \{1, 2, \dots, M\}$ . Nu gäller att för godtyckligt  $x \in [0,1]$  finns  $x_k$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, M\}$  så att  $|x - x_k| < \epsilon$ .

$$\begin{aligned} |s_m(x) - s_m(x_k)| &= \left| \left( s_m(x_k) + \int_{x_k}^x s'_m(t) dt \right) - \left( s_m(x_k) + \int_{x_k}^x s'_m(t) dt \right) \right| \leq \\ &\leq |s_m(x_k) - s_m(x_k)| + \left| \int_{x_k}^x (s'_m(t) - s'_m(t)) dt \right| \leq \\ &\leq |s_m(x_k) - s_m(x_k)| + \int_{x_k}^x (|s'_m(t)| + |s'_m(t)|) dt \leq \\ &\leq |s_m(x_k) - s_m(x_k)| + 2|x - x_k| \quad \text{då } \max_{x \in [0,1]} |s'_m(x)| \leq 1 \end{aligned}$$

Följaktligen gäller för alla  $x \in [0,1]$  att

$$|s_m(x) - s_m(x_k)| < 2\epsilon + 2 \cdot \epsilon = 4\epsilon \quad \text{för alla } m, m \geq N$$

Synnerligt följer, genom att låta  $m \rightarrow \infty$ , att

$$|s_m(x) - s(x)| \leq 4\epsilon < 5\epsilon \quad \text{för alla } m \geq N.$$

Alltså  $\max_{x \in [0,1]} |s_m(x) - s(x)| < 5\epsilon$  för alla  $m \geq N$ .