**MATEMATIK**
**Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet**
**Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2011-08-19, TID(8.30-12.30)**
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Emil Gustavsson, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

---

**OBS:** Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Bestäm den lösningskurva $y = y(x)$ till

$$(x^2 - 9)y' = y^2$$

som går genom punkten $(0, 1)$ och är definierad på ett så stort intervall som möjligt.

(8p)

2. Bestäm den kontinuerliga funktion $f(x)$ som uppfyller

$$f(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x (3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2) f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(8p)

3. Bestäm taylorserien till $f(x)$ i punkten 0 (= maclaurinserien) för

$$f(x) = \sin x \cos 3x.$$

(8p)

4. Avgör om serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

konvergerar[1].

(6p)

V.G.V.

[1] $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n$ och $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

5. Beräkna

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

för

$$f(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Motivera ordentligt!

(6p)

6. För vilka $x$ konvergerar

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{(-1)^n n^2} x^n?$$

(8p)

7. Formulera och bevisa integralkriteriet.

(8p)

8. Formulera Stirlings formel samt visa den svaragare uppskattningen

$$(\frac{n}{e})^n \cdot e < n! < n \cdot (\frac{n}{e})^n \cdot e, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

Lösningsförslag till TMA976 den 19/8 2011

① Lös $(x^2-9)y' = y^2$, $y(0)=1$ :

Detta är en separabel diff-ekv. För $y \neq 0$, $x \neq \pm 3$ gäller

$$\frac{1}{y^2}y' = \frac{1}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \quad \text{där } A = \frac{1}{6} = -B$$

Alltså $-\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{6}\ln|x-3| - \frac{1}{6}\ln|x+3| + C$

där $C = -1$ då $y(0)=1$. Detta ger $y(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|}$

Här är $1+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|$ en växande funktion på $(-3,3)$

som $=0$ för $e^6 = \frac{3-x}{3+x}$ dvs $x = -3\cdot\frac{e^6-1}{e^6+1} \in (-3,0)$.

Alltså $y(x)$ är definierad på $\left(-3\frac{e^6-1}{e^6+1}, 3\right)$.

Svar $y(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{6}\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)}$ , $x \in \left(-3\frac{e^6-1}{e^6+1}, 3\right)$

② Bestäm den kontinuerliga funktion $f(x)$ som uppfyller

(*) $f(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x (3+6(x-t)-4(x-t)^2) f(t)\,dt$ , $x \in \mathbb{R}$ :

Vi noterar att $f$ kontinuerlig medför att HL är kont. deriverbar dvs $f$ kont. deriverbar och induktivt fås att $f$ är oändligt deriverbar. Deriverar (*) upprepade gånger!

Steg 1. $f'(x) = -2-8x+3f(x)+\int_0^x (6-8(x-t))f(t)\,dt$ , $f(0)=1$

Steg 2. $f''(x) = -8+3f'(x)+6f(x)+\int_0^x -8f(t)\,dt$ , $f'(0)=1$

Steg 3: $f'''(x) = 3f''(x)+6f'(x)-8f(x)$ , $f''(0)=1$

Vi löser nu $f'''-3f''-6f'+8f=0$ , $f(0)=1$, $f'(0)=-1$, $f''(0)=-5$

Detta är en 3:e ordn. linjär diff-ekv med konstanta koeff.

Karakteristiska polynomet $r^3-3r^2-6r+8 = (r-1)(r^2-2r-8) =$
$= (r-1)(r+2)(r-4)$.

Detta medför $f(x) = Ae^x + Be^{-2x} + Ce^{4x}$. Villkoren

$f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$ ger

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ A-2B+4C=1 \\ A+4B+16C=1 \end{cases} \quad \text{vilket ger} \quad A=1,\ B=C=0$$

Svar: $f(x) = e^x$

③ Bestäm taylorserien till $f(x) = \sin x \cdot \cos(3x)$.

Additionsformlerna ger

$$\sin x \cdot \cos(3x) = \frac{1}{2}\sin(4x) - \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Vidare gäller att

$$\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad t \in \mathbb{R}$$

vilket ger

$$\sin x \cdot \cos(3x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(4x)^{2k+1}}{(2k+1)!} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}(-1)^k \left(4^{2k+1} - 2^{2k+1}\right)\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^{2k}\left(2^{2k+1}-1\right)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Svar: $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^{2k}\left(2^{2k+1}-1\right)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$

④ Konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ ?

Sätt $a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

Serien $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ är alternerande då $a_n > 0$ alla $n$.

Vidare gäller $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1))!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2(n+1)+1)!!} =$

$= \frac{2n+2}{2n+3} < 1$ alla $n$, dvs $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är

en avtagande följd. Om $a_n \to 0$, $n \to \infty$ är serien

konvergent enligt Leibnitz konv. kriterium annars

divergerar serien då $(-1)^n a_n \to 0$, $n \to \infty$ är ett

nödvändigt villkor för konvergens för $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

$$a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} =$$

$$= \frac{2^n\, n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \{\text{Stirlings}$$

$$\text{formel } n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1+\varepsilon_n),\ \varepsilon_n \to 0 \text{ då } n \to \infty\}$$

$$= \frac{2^{2n} \cdot n^{2n} \cdot 2\pi n (1+\varepsilon_n)^2 \cdot e^{2n+1}}{e^{2n} \cdot (2n+1)^{2n+1} \cdot \sqrt{2\pi(2n+1)}\,(1+\varepsilon_{n+1})} \leq$$

$$\leq \frac{e(1+\varepsilon_n)^2}{(1+\varepsilon_{n+1})} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, \ n \to \infty.$$

Alltså $a_n \to 0$, $n \to \infty$ och serien konvergerar

Svar: konvergerar

(5) Beräkna $\int_0^1 f(x)\,dx$ för $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$.

Vi noterar att

$$\begin{cases} 0 \le \frac{1}{(x+n)^2} \le \frac{1}{n^2} & \text{för } 0 \le x \le 1,\ n = 1, 2 \ldots \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} & \text{konvergent} \end{cases}$$

och alltså följer att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ konvergerar likformigt på $[0,1]$ enligt Weierstrass majorantsats.

Vi får

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}\,dx = \{\text{serien konvergerar likformigt på } [0,1]\} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{1}{x+n} \right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{N \to \infty} \left( 1 - \frac{1}{N+1} \right) = 1.$$

Svar: 1

(6) Bestäm konvergensintervallet för $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} x^n$.

Sätt $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2}$ $\quad n = 1, 2 \ldots$

Vi ser att ($a_n > 0$ alla $n$)

$$\sqrt[2n]{a_{2n}} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \longrightarrow e \quad n \to \infty$$

$$\sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{-(2n+1)} \longrightarrow \frac{1}{e} \quad n \to \infty$$

Alltså $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e$ och potensserien har konvergensradien $\frac{1}{e}$.

Vidare gäller $\pm \frac{1}{e} \notin$ konvergensintervallet då

$$|a_n (\pm \tfrac{1}{e})^n| \not\to 0 \text{ då } n \to \infty,$$

då $$|a_{2n} (\pm \tfrac{1}{e})^{2n}| = \left( \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{e} \right)^{2n} =$$

$$= \left( e^{2n \ln(1 + \frac{1}{2n}) - 1} \right)^{2n} = e^{2n\left(2n\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1\right)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Svar: $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$

(7) och (8): se kursboken