MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2011-04-29, TID(14.00-18.00)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Adam Andersson, 0703-088304.

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS:	Ange linje samt personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* inlämnat blad. Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen
$$y'' + 2y' + y = \sqrt{x}e^{-x}.$$
(8p)

2. Bestäm den lösning till differensekvationen
$$4y_{n+2} - 2\sqrt{3}y_{n+1} + y_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
för vilken $y_0 = 0$, $y_1 = 1$. Ange speciellt y_{101}.
(8p)

3. (a) Sätt
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^p|y|^q}{x^2-xy+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$
där $p, q \in \mathbb{R}$. Ange nödvändiga och tillräckliga villkor på p, q för att $f(x,y)$ ska vara kontinuerlig i hela planet.
(4p)

   (b) Avgör om
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\ln 2} - \frac{1}{2^x-1} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$
är deriverbar i $x = 0$. Om $f(x)$ är deriverbar i $x = 0$ så beräkna $f'(0)$.
(4p)

4. Bestäm konvergensradien R för potensserien[1]

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$$

och visa att om potensserien har summan $f(x)$ så gäller

$$f'(x) = 1 + xf(x)$$

för $x \in (-R, R)$.

(6p)

5. Betrakta talföljden $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definierad av

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Avgör om talföljden konvergerar och om den konvergerar så beräkna dess gränsvärde.

(6p)

6. Avgör om funktionsserien

$$\Sigma_{n=2}^{\infty} \ln(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n})$$

konvergerar likformigt på $(-a, a)$ för varje $a > 0$.

(8p)

7. Formulera och bevisa integralkriteriet.

(8p)

8. Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en talföljd sådan att talföljderna $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$, $(a_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ och $(a_{3n})_{n=1}^{\infty}$ konvergerar. Visa att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

[1] $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)$ för $n = 1, 2, \ldots$ och $1!! = 1$