MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2010-12-18, TID(8.30-12.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Adam Wojciechowski, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Låt a, b vara två reella tal. Talföljden $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ definieras av $y_1 = a$, $y_2 = b$ och

$$y_{n+2} = \frac{y_n + y_{n+1}}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} y_n.$$

(8p)

2. Bestäm alla funktioner $y(x)$ som är kontinuerliga tillsammans med första- och andraderivatorna och som uppfyller ekvationen

$$y''(x) + 2y(x) = \int_0^x (2y''(t) + y'(t) + 2e^t)\, dt.$$

Ange sedan den funktion $y(x)$ som uppfyller villkoren $y(0) = y'(0) = 0$.

(8p)

3. (a) Undersök om gränsvärdet existerar. Beräkna det i så fall.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{xy^2 + x^3}.$$

(4p)

(b) Bestäm det reella tal a sådant att följande gränsvärde existerar,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a\ln(1+2x)}{x\tan x}\right).$$

Beräkna sedan gränsvärdet.

(4p)

4. Bestäm konvergensintervallet för potensserien $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ där

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(6p)

5. Talföljden $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definieras av

$$a_n = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 3a_{n-1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$(a_0 \geq -\frac{1}{3})$. Visa att talföljden är konvergent och beräkna dess gränsvärde.

(6p)

6. Låt $s(x)$ beteckna summan av funktionsserien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Visa att $\int_0^1 s(x)\,dx$ existerar samt beräkna integralen. Motivera noggrant!!

(8p)

7. Formulera och bevisa Leibniz konvergenskriterium.

(8p)

8. Antag att potensserien $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uppfyller

$$0 < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \equiv A < \infty.$$

Visa att konvergensradien ges av $\frac{1}{A}$.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

(1) $a, b \in \mathbb{R}$. Talföljden $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ definieras av

$$\begin{cases} y_{n+2} = \frac{1}{2}(y_{n+1} + y_n) & n = 1, 2, \ldots \\ y_1 = a, \quad y_2 = b \end{cases}$$

Beräkna $\lim_{n\to\infty} y_n$

Lösning: Karakteristiska polynomet till $y_{n+2} - \frac{1}{2}y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n = 0$ ges av $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = (r-1)(r+\frac{1}{2})$. Detta ger

$$y_n = A\,1^n + B\cdot(-\tfrac{1}{2})^n = A + B(-\tfrac{1}{2})^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Koefficienterna A och B bestäms av

$$\begin{cases} A - \frac{1}{2}B = a \\ A + \frac{1}{4}B = b \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{3}(a+2b) \\ B = \frac{4}{3}(b-a) \end{cases}$$

Vi får $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{3}(a+2b)$. **Svar:** $\frac{1}{3}(a+2b)$

Kommentar: y_n är det aritmetiska medelvärdet av de två föregående elementen i talföljden. Om speciellt $a = b$ får $y_n = a$ för alla n och $\lim_{n\to\infty} y_n = a$. Notera att $\frac{1}{3}(a+2b)\big|_{a=b} = a$ och att svar som är $\neq a$ då $a = b$ måste vara felaktigt.

(2) Bestäm alla $y \in C^2$ som uppfyller

$$y''(x) + 2y(x) = \int_0^x (2y''(t) + y'(t) + 2e^t)\,dt. \quad (*)$$

Ange sedan den funktion $y(x)$ som uppfyller $y(0) = y'(0) = 0$

Lösning: Då Högerledet i $(*)$ är deriverbart kan $(*)$ deriveras. Vi får

$$y''' + 2y' = 2y'' + y' + 2e^x$$

dvs

$$y''' - 2y'' + y' = 2e^x \quad (**)$$

Detta är en linjär diff.ekv av ordning 3 med konstanta koefficienter. Det karakteristiska polynomet är

$$r^3 - 2r^2 + r = r(r-1)^2.$$

Vi får $y_h(x) = A + (B + Cx)e^x$. För att bestämma en partikulärlösning ansätts $y_p(x) = z(x)\cdot e^x$. Insättning i (**) ger

$$2e^x = D(D-1)^2[z(x)e^x] = e^x(D+1)D^2[z(x)]$$

dvs

$$z''' + z'' = 2.$$

Välj t.ex. $z(x) = x^2$ vilket då ger $y_p(x) = x^2e^x$.

(**) har den allmänna lösningen $y(x) = A + (B + Cx + x^2)e^x$.

För att få den allmänna lösningen till (*) noterar vi villkoret $y''(0) + 2y(0) = 0$. (Vi deriverade ju (*) och fick (**)). Detta villkor ger

$$2A + 3B + 2C + 2 = 0$$

och vi får

$$y(x) = -(1 + C + \tfrac{3}{2}B) + (B + Cx + x^2)e^x.$$

Den lösning som uppfyller villkoren $y(0) = y'(0) = 0$ ges då $B - (1 + C + \frac{3}{2}B) = 0 = B + C$ dvs $B = 2 = -C$

Vi får

$$y(x) = (2 - 2x + x^2)e^x - 2$$

Svar: $y(x) = (B + Cx + x^2)e^x - (1 + C + \frac{3}{2}B)$, $y(x) = (2 - 2x + x^2)e^x - 2$

Kommentar: Det går givetvis lika bra att betrakta

$$y''(x) + 2y(x) = 2(y'(x) - y'(0)) + (y(x) - y(0)) + 2e^x - 2$$

dvs

$$y'' - 2y' + y = 2e^x - (2y'(0) + y(0) + 2) \equiv 2e^x + E$$

Här ges lösningen av

$$y(x) = (B + Cx)e^x + x^2e^x + E = (B + Cx + x^2)e^x - (2y'(0) + y(0) + 2)$$

Konstanterna $B, C, y(0)$ och $y'(0)$ är ej oberoende. Vi kan bestämma $y(0), y'(0)$ i termer av B, C (eller omvänt).

$$\begin{cases} y(0) = B - (2y'(0) + y(0) + 2) \\ y'(0) = B + C \end{cases} \quad \text{dvs} \quad y(0) = -1 - C - \frac{B}{2}$$

vilket ger

$$y(x) = (B + Cx + x^2)e^x - (1 + C + \tfrac{3}{2}B).$$

3 a) Avgör om $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy^2)}{xy^2 + x^3}$ existerar och om så beräkna det.

Lösning: Sätt $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy^2)}{xy^2+x^3}$. Vi noterar att $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Vi ser att

$t \neq 0 : f(t,0) = 0 \longrightarrow 0,\ t \to 0$

$t \neq 0 : f(t,t) = \dfrac{\sin(t^3)}{2t^3} \longrightarrow \dfrac{1}{2},\ t \to 0$

Alltså existerar gränsvärdet ej.

Kommentar: Givetvis kan man studera f på andra kurvor som går genom $(0,0)$ t.ex. $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$, $y = \sqrt{x}$, $x > 0$ m.fl.

$f(t,kt) = \dfrac{\sin(k^2t^3)}{k^2t^3 + t^3} \longrightarrow \dfrac{k^2}{k^2+1},\ t \to 0$

$f(t,\sqrt{t}) = \dfrac{\sin(t^2)}{t^2 + t^3} \longrightarrow 1,\ t \downarrow 0$

Med polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ få

$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{\sin(r^3\cos\theta\sin^2\theta)}{r^3\cos\theta} \longrightarrow \sin^2\theta,\ r \downarrow 0$

för $\theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, vilket också visar att gränsvärdet inte existerar. <u>Svar:</u> existerar ej

b) Bestäm det $a \in \mathbb{R}$ sådant att

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1} - a\,\frac{\ln(1+2x)}{x\tan x}\right)$$

existerar och beräkna gränsvärdet

Lösning: Omskrivning ger

$$\frac{1}{e^x-1} - a\,\frac{\ln(1+2x)}{x\tan x} = \frac{x\cdot\sin x - a\ln(1+2x)\cdot\cos x\cdot(e^x-1)}{(e^x-1)\cdot x\cdot\sin x} \equiv h(x)$$

Standardutvecklingarna

$e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + O(t^3)$

$\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + O(t^3)$

$\sin t = t - \dfrac{t^3}{6} + O(t^5)$

$\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + O(t^4)$

ger

$$h(x) = \frac{x\left(x-\frac{x^3}{6}+O(x^5)\right) - a\left(2x-2x^2+O(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)\left(x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)\right)}{\left(x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)\right)\cdot x\cdot\left(x-\frac{x^3}{6}+O(x^5)\right)}$$

$$= \frac{(1-2a)x^2 + ax^3 + O(x^4)}{x^3+O(x^4)}$$

Härav följer att $a=\frac{1}{2}$ är nödvändigt och tillräckligt villkor för att gränsvärdet ska existera. Om $a=\frac{1}{2}$ gäller

$$h(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3+O(x^4)}{x^3+O(x^4)} = \frac{\frac{1}{2}+O(x)}{1+O(x)} \to \frac{1}{2}, \quad x\to 0$$

<u>Svar</u>: $a=\frac{1}{2}$, gränsvärdet $=\frac{1}{2}$.

Kommentar: Viss försiktighet krävs vid räkning med ordo t.ex $\frac{1}{x+O(x^2)} - \frac{1}{x+O(x^2)} = \frac{O(x^2)}{x^2+O(x^3)}$ och <u>ej</u> $=0$.

④ Bestäm konvergensintervallet för $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ där $a_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$, $n=1,2,\dots$

Lösning: Vi noterar att $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$ då $n\to\infty$ eftersom $1 \le a_n < n$ ger $1 \leftarrow \sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{n} \to 1$, $n\to\infty$ och instängningsregeln ger påståendet ovan. Detta ger att konvergensradien $R=\frac{1}{1}=1$. Då $a_n \not\to 0$ då $n\to\infty$ gäller att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ divergerar för $x=\pm 1$.

<u>Svar</u>: konvergensintervallet är $(-1,1)$.

⑤ Talföljden $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definieras av $a_n = \frac{1}{2}\sqrt{1+3a_{n-1}}$, $n=1,2,\dots$ där $a_0 \geq -\frac{1}{3}$. Visa att talföljden konvergerar och beräkna gränsvärdet

Lösning: Sätt $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{1+3x}$, $x\geq -\frac{1}{3}$. Vi ser att f är en strängt växande funktion och $x=f(x)$ omm $x=1$ $(f(x)\geq 0)$. Alltså konvergerar talföljden mot 1 om den konvergerar. Vidare noterar att $f([-\frac{1}{3},0]) = [0,\frac{1}{2}]$, $f: I \to I$ för $I_N = [0,N]$ för alla $N \geqslant 1$ och $\sup_{x\in I_N} |f'(x)| = \frac{3}{4} < 1$ för alla N. Vi kan då tillämpa fixpunktssatsen på $f: I_N \to I_N$ där $N = \max\{a_0, 1\}$. Vi får då att $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergerar och gränsvärdet $=1$.

<u>Svar</u>: 1

Kommentar: Vi noterar att oberoende av värdet på a_0 kommer $a_n \geq 0$ för $n = 1, 2, \ldots$ P.s.s. som ovan ser man att om talföljden konvergerar måste gränsvärdet vara $= 1$. Konvergensen kan visas genom att använda satsen: Varje monoton följd är konvergent omm den är begränsad. Vi får två fall

Fall 1: $a_1 \in [0, 1]$ Då bildar $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ en växande följd begränsad uppåt av 1

ty: Om $a_{n-1} \leq a_n$ och $a_n \leq 1$ så gäller

1) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\sqrt{1+3a_n} - \frac{1}{2}\sqrt{1+3a_{n-1}} = \frac{3}{2} \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{1+3a_n} + \sqrt{1+3a_{n-1}}} \geq 0$

2) $a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{1+3a_n} \leq \frac{1}{2}\sqrt{1+3 \cdot 1} = 1$

dvs $a_n \leq a_{n+1}$ och $a_{n+1} \leq 1$.

Dessutom gäller $a_1 \leq a_2 \leq 1$, eftersom

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{1+3a_1} - a_1 = \frac{1}{2} \frac{1+3a_1 - 4a_1^2}{\sqrt{1+3a_1} + 2a_1} \geq 0 \quad \text{och } a_2 \leq \tfrac{1}{2}\sqrt{1+3} = 1,$$

varför induktionsprincipen ger påståendet

Fall 2: $a_1 \in [1, \infty)$ Då bildar $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ en avtagande följd begränsad nedåt av 1 (eller trivialt 0)

Induktionsargument som ovan

⑥ $s(x)$ är summan av serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$, $0 \leq x \leq 1$. Visa att $\int_0^1 s(x)\,dx$ existerar och beräkna integralen

Lösning: Vi ser att $0 \leq \frac{1}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{n^2}$ för $0 \leq x \leq 1$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Weierstrass M-sats ger att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ konvergerar likformigt på $[0,1]$. Vidare är $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(x+n)^2}$ kontinuerlig funktion på $[0,1]$ för $N = 1, 2, \ldots$ varför $s(x)$ kontinuerlig på $[0,1]$.

Alltså existerar $\int_0^1 s(x)\,dx$. Den likformiga konvergensen på $[0,1]$ ger vidare att $\int_0^1 s(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\,dx =$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[-\frac{1}{x+n}\right]_0^1 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$$

Svar: 1

7. Se ELW

8. Antag att $0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \equiv A < \infty$. Visa att konvergensradien R för $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ges av $\frac{1}{A}$.

Bevis: Vi ska visa att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerar för $|x| < \frac{1}{A}$ och divergerar för $|x| > \frac{1}{A}$.

Antag att $|x| < \frac{1}{A}$: För varje $q > A$ finns N så att $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ för alla $n \geq N$, dvs $|a_n| < q^n$ alla $n \geq N$.
Välj $q > A$ så att $|x| < \frac{1}{q}$ dvs $|x|q < 1$.
Men då gäller att $\sum_{n=1}^{\infty} (|x|q)^n < \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n| < \infty$ enligt jämförelsesatsen och följaktligen är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergent då serien är absolutkonvergent.

Antag att $|x| > \frac{1}{A}$: För varje $q < A$ och varje N finns ett $n \geq N$ sådant att $\sqrt[n]{|a_n|} > q$. Välj $0 < q < A$ så att $|x| > \frac{1}{q}$, dvs $|x|q > 1$. Då finns en delföljd $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ av $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sådan att $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > q$ $k = 1, 2, \ldots$
dvs $|a_{n_k} x^{n_k}| > (q|x|)^{n_k} \not\to 0$, $k \to \infty$.
Alltså divergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Enligt satsen om potensseriers konvergens följer att $R = \frac{1}{A}$.