MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2010-08-20, TID(8.30-12.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Hossein Raufi, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

för vilken $y(0) = y(1) = 0$ och $y(2) = 1$.

(8p)

2. Bestäm den lösningskurva till

$$(1 + x^2)y' + xy^2 + xy = 0$$

som går genom $(0, 1)$ och är definierad på ett så stort intervall som möjligt.

(8p)

3. Bestäm det tal a så att

$$\lim_{n\to\infty} n^a e^{-\sqrt{n}} \Sigma_{k=1}^{n} e^{\sqrt{k}}$$

existerar och är $\neq 0$. Beräkna gränsvärdet i detta fall.

(8p)

V.G.V.

4. Bestäm de reella tal x för vilka potensserien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln(k+1)} x^k$$

konvergerar.

(6p)

5. För vilka värden på b konvergerar serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} (\ln \frac{n+1}{n})^b?$$

(6p)

6. Bilda funktionsföljden, $x \geq 0$,

$$f_1(x) = \sqrt{x},\ f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}},\ f_3(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, \ldots$$

Bestäm $\lim_{x\to 0}(\lim_{n\to\infty} f_n(x))$ och $\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to 0} f_n(x))$. Är följden $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ likformigt konvergent för $0 < \delta \leq x < \infty$ respektive $0 \leq x < \infty$?

(8p)

7. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats.

(8p)

8. Bevisa att om

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

är konvergent så är också

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

konvergent.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

Lösningsförslag (prel.) till TMA976 den /8 2010

(1) Lös $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$, $y(2) = 1$

Lösning: Kar. ekv $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r-1)^3 = 0$ ger homogenlösningen $y_h(x) = (A + Bx + Cx^2)e^x$. Villkoren ger

$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$y(1) = 0 \Rightarrow B + C = 0$, dvs $B = -C$

$y(2) = 1 \Rightarrow 2C \cdot e^2 = 1$, dvs $C = \frac{1}{2}e^{-2}$

Svar: $y(x) = \frac{1}{2}e^{x-2}(x^2 - x)$

(2) Lös $(1+x^2)y' + xy^2 + xy = 0$, $y(0) = 1$

Lösning: Diff. ekv. omskrivs till $y' = -\frac{x}{1+x^2} \cdot y(y+1)$.

För $y \neq 0, -1$ gäller $\frac{1}{y(y+1)}y' = \frac{x}{1+x^2}$ (separabel diff-ekv.)

Partialbråksuppdelning ger $\frac{1}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$. Vi får

$\ln|y| - \ln|y+1| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$, dvs

$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \ln(C'/\sqrt{1+x^2})$, $C' > 0$

och alla lös. $\frac{y}{y+1} = C''/\sqrt{1+x^2}$, $C'' \neq 0$. $y(0) = 1$ ger $C'' = \frac{1}{2}$

dvs $y(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2} - 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Svar: $y(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2} - 1}$, $x \in \mathbb{R}$

(3) Bestäm a så att $\lim_{n\to\infty} n^a e^{-\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} e^{\sqrt{k}}$ existerar och $\neq 0$ samt bestäm gränsvärdet

Lösning: Eftersom $\int_1^n e^{\sqrt{x}}dx \leq \sum_{k=1}^{n} e^{\sqrt{k}} \leq \int_1^{n+1} e^{\sqrt{x}}dx$ och

$\int_1^n e^{\sqrt{x}}dx = \{t = \sqrt{x},\ 2t\,dt = dx\} = \int_1^{\sqrt{n}} e^t \cdot 2t\,dt =$

$= \{[e^t 2t]_1^{\sqrt{n}} - \int_1^{\sqrt{n}} e^t\, 2dt\} = 2\sqrt{n}\,e^{\sqrt{n}} + O(e^{\sqrt{n}})$ gäller

$a = -\frac{1}{2}$ och $\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} e^{\sqrt{k}} = 2$

Svar: $a = -\frac{1}{2}$, gränsvärdet $= 2$

(4) Konvergensintervallet för $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k+1)} x^k$

Lösning: Konvergensradien R:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)\ln(k+2)}}{\frac{1}{k\ln(k+1)}} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{k}{k+1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\ln(k+1)}{\ln(k+2)}}_{\to 1} = 1.$$ Alltså $R = 1$.

$x = 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k+1)}$ divergerar enligt jämförelsekrit.

på gränsvärdesform då jämförs med $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ som divergerar (känt.)

$x=-1$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k+1)} (-1)^k$ konvergerar enligt Leibniz konvergenskriterium då $\frac{1}{k\ln(k+1)} \downarrow 0$, $k \to \infty$.

Svar: Konvergensintervallet $[-1, 1)$

⑤ Bestäm b för vilka $\sum \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^b$ konvergerar.

Lösning: Då $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Det gäller att $\sum\left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^b$ konvergerar för $b>1$ och divergerar för $b \leq 1$ där vi utnyttjat jämförelsekrit. och att $\sum \frac{1}{n^c}$ konvergerar omm $c>1$.

Svar: $b>1$

⑥ $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$, $f_3(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, ..., $x \geq 0$

Bestäm $\lim_{x\to 0+} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0+} f_n(x)$ samt om $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ är likf konvergent på $(0,\infty)$ eller (δ,∞), $\delta>0$ eller ingetdera

Lösning: Då $\lim_{x\to 0+} f_n(x) = 0$ för alla n gäller $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0+} f_n(x) = 0$. För fixt $x>0$ gäller $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ är en växande talföljd som är uppåt begränsad av $\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}$ $\left[\ f_n(x) = \sqrt{x+f_{n-1}(x)}\right.$ och om $f_n(x) \to a$, $n \to \infty$ gäller $a = \sqrt{x+a}$ dvs $a = \frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}\ \Big|$ eftersom

$$f_n(x) = \sqrt{x+f_{n-1}(x)} \leq \sqrt{x+\tfrac{1}{2}+\sqrt{x+\tfrac{1}{4}}} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}+\sqrt{x+\tfrac{1}{4}}\right)^2} =$$
$$= \tfrac{1}{2}+\sqrt{x+\tfrac{1}{4}}$$

induktivt. Alltså följer att $f_n(x) \uparrow \frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}$ då $n \to \infty$. Detta ger att $\lim_{x\to 0+} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ (punktvisa gränsvärdesdef) eller existerar ej (opunkterade gränsvärdesdef.). Då $f_n(x)$ kont på $[0,\infty)$ för alla n gäller att $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ inte kan konvergera likformigt på $[0,\infty)$.

Återstår att studera om $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konv. likformigt på $[\delta,\infty)$ för $\delta>0$.

Vi noterar att $f_n(x) \uparrow f(x)$ för varje $x \in [\delta, \infty)$, $\delta > 0$

där $f, f_n \in C([\delta, \infty))$ så för varje kompakt intervall I dvs

$[\delta, M] = I$, $\delta > 0$ gäller $f_n \to f$ likformigt på I. (Dinis sats)

Låt oss därför studera konvergensen $f_n \to f$ på $[1, \infty)$.

Notera att

$$\left| f_n(x) - \left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{x + \tfrac{1}{4}}\right) \right| = \left| \sqrt{x + f_{n-1}(x)} - \sqrt{x + \tfrac{1}{2} + \sqrt{x + \tfrac{1}{4}}} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x + f_{n-1}(x)} + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}}} \left| f_{n-1}(x) - \left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{x + \tfrac{1}{4}}\right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left| f_{n-1}(x) - \left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{x + \tfrac{1}{4}}\right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt[4]{x}} \left| f_{n-1}(x) - \left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{x + \tfrac{1}{4}}\right) \right| \leq \ldots \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^k \left| f_{n-k}(x) - \left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{x + \tfrac{1}{4}}\right) \right| \qquad k = 1, 2, \ldots, n-2$$

Vidare gäller

$$\left| f_n(x) - \left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{x + \tfrac{1}{4}}\right) \right| \leq \tfrac{1}{2} + \sqrt{x + \tfrac{1}{4}} - \sqrt{x} \leq \tfrac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{2\sqrt{x}} \leq 1$$

för n godtyckligt och $x \geq 1$.

Det följer att $f_n \to f$ likformigt på $[1, \infty)$ och alltså $f_n \to f$ likformigt på $[\delta, \infty)$ för alla $\delta > 0$.

(7.) Se kursboken

(8.) Bevisa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ är konvergent om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent.

Bevis: Då $\left|\frac{a_n}{n}\right| \le \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$ enligt kvadreringsregeln

följer att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ är absolutkonvergent enligt jämförelsekriteriet och alltså också konvergent.