**MATEMATIK**
**Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet**
**Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2010-04-10, TID(8.30-12.30)**
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: David Witt-Nyström, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

---

**OBS:** Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen
$$y'' - 2y' + y = xe^x.$$
Bestäm den lösning som satisfierar $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$.

(8p)

2. (a) Funktionerna $f_p(x, y)$, $p \in \mathbb{R}$, definieras utanför origo genom
$$f_p(x, y) = \frac{|x|^p|y|}{x^2 - xy + y^2}$$
och i origo genom $f_p(0, 0) = 0$. Ange nödvändigt och tillräckligt villkor på $p$ för att $f_p(x, y)$ ska vara kontinuerlig i hela planet.

(4p)

(b) Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n})^{\frac{1}{\ln n}}.$$

(5p)

3. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som potensserien
$$\Sigma_{n=2}^{\infty}\frac{x^n \ln n}{n(n+1)}$$
konvergerar.

(6p)

V.G.V.

4. Differentialekvationen
$$y'' + f(x)y' + xy = 0$$
har en lösning $y = z(x)$ med $z(0) = 1$ och en annan lösning $y = e^{z(x)}$. Bestäm $f(x), z(x)$ och den fullständiga lösningen.

(7p)

5. Avgör om talföljden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ med $x_1 > -1$ och $x_{n+1} = \frac{6}{1+x_n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, är konvergent, och om så är fallet så beräkna talföljdens gränsvärde.

(8p)

6. Funktionen $f(x)$ är deriverbar för $x > x_0$ och $\lim_{x\to\infty}(f(x) + f'(x))$ existerar och $= a$. Visa att $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ och $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

(6p)

7. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats.

(8p)

8. Talen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ är positiva. Visa att serien $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent om och endast om serien $\Sigma_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ är konvergent.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK