MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2009-08-18, TID(14.00-18.00)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Urban Larsson, 0762-721860.

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen
$$y''' + y' - 10y = x - 1.$$
(8p)

2. (a) Avgör om
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + x^2 y}{x^2 + 4y^2 - 2xy}$$
existerar, och i så fall beräkna det.
(4p)

   (b) Beräkna
$$\lim_{x\to 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}.$$
(4p)

3. Antag att potensserien $\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ har konvergensradien $R = 2$. Låt n vara ett positivt heltal. Beräkna konvergensradierna för $\Sigma_{k=0}^{\infty} (a_k)^n x^k$ och $\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k (x^n)^k$. Det får antas att $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existerar.
(7p)

4. Låt $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion med $g(1) = 0$. Visa att funktionsföljden $(g(x)x^n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på $[0,1]$.
(7p)

5. Visa att serien
$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$$
konvergerar och beräkna serien summa.
(7p)

6. Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara den följd av reella tal som definieras av

$$e^{a_n} + na_n = 2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Beräkna

$$\lim_{n \to \infty} n(1 - na_n).$$

(8p)

7. Formulera och bevisa jämförelsekriteriet för positiva serier.

(8p)

8. Antag att f_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, är kontinuerligt deriverbara funktioner på det öppna intervallet I. Antag vidare att

   (a) $f_n \to f$ punktvis på I då $n \to \infty$ och att

   (b) $f_n' \to g$ likformigt på I då $n \to \infty$.

   Visa att f är deriverbar på I med $f' = g$.

(7p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

Lösningsförslag till TMA976 den 18/8 2009 (preliminär)

1) Lös $y''' + y' - 10y = x - 1$

Lösning: Kar. ekv $r^3 + r - 10 = 0$ har roten $r_1 = 2$

Polynomdivision ger $r^3 + r - 10 = (r-2)(r^2 + 2r + 5)$

Alltså $r_{2,3} = -1 \pm 2i$. Vi får

$$y_h(x) = Ae^{2x} + e^{-x}(B\cos(2x) + C\sin(2x))$$

Ansätt $y_p(x) = Dx + E$. Derivering och insättning i diff.ekv ger $y_p(x) = -\frac{1}{10}x + \frac{9}{100}$.

Lösning $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ ger

Svar: $y(x) = Ae^{2x} + e^{-x}(B\cos(2x) + C\sin(2x)) - \frac{1}{10}x + \frac{9}{100}$

2) a) Avgör om $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + x^2y}{x^2 + 4y^2 - 2xy}$ existerar, och om så beräkna det

Lösning: Sätt $f(x,y) = \frac{x^3 + x^2y}{x^2 + 4y^2 - 2xy}$

Notera att nämnaren > 0 då $(x,y) \neq (0,0)$ eftersom

$x^2 + 4y^2 - 2xy \geq x^2 + 4y^2 - (x^2 + y^2) = 3y^2$ med likhet omm $x = y$. Vi ser att $f(x,0) = x \to 0$ då $x \to 0$ så om gränsvärdet existerar så måste det vara $= 0$.

Polära koordinater ger

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - 0| = r\left|\frac{\cos^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta}{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta}\right| \leq$$

$$\leq 2r\frac{1}{\underbrace{|\cos^2\theta + 4\sin^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta|}_{(\neq 0)}}$$

Här är nämnaren en kontinuerlig funktion på kompakta mängden $[0, 2\pi]$ så finns $M > 0$ så att

$$M \geq \frac{1}{|\cos^2\theta + 4\sin^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta|} \quad \text{alla } \theta \in [0, 2\pi].$$

Alltså

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - 0| \leq 2Mr \to 0 \text{ då } r \to 0, \text{ oberoende av } \theta.$$

Svar: Gränsvärdet existerar och $= 0$

b) Beräkna $\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$

Lösning: $(1-\sin x)^{1/x} = \exp\left[\frac{1}{x}\ln(1-\sin x)\right]$ för $x \neq 0$

nära $x=0$. Kända Maclaurinutvecklingar

$$\begin{cases} \sin x = x + O(x^3) \\ \ln(1-t) = -t + O(t^2) \end{cases}$$

ger $\frac{1}{x}\ln(1-\sin x) = \frac{1}{x}\left[-x + O(x^2)\right] = -1 + O(x)$

Alltså $\lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x}\ln(1-\sin x)\right] = \frac{1}{e}$ då

e^t kontinuerlig funktion i t

Svar: $\frac{1}{e}$

3) Antag att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ har konvergensradie $R=2$

och att $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$ existerar. Beräkna konvergensradien

för

a) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^m x^k$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{mk}$ $\qquad$ m positivt heltal

Lösning: Det gäller att $\frac{1}{2} = \frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$.

a) Konvergensradien är

$$1/\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k^m|} = 1/\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)^m = 2^m$$

b) Sätt $t = x^m$. Potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ konvergerar

om $|t|<2$ och divergerar om $|t|>2$

Alltså konvergerar $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{mk}$ om $|x|<2^{\frac{1}{m}}$

och divergerar om $|x|>2^{\frac{1}{m}}$. Konvergensradien

är alltså $2^{1/m}$

Svar: 2^m, $2^{1/m}$

4) g kontinuerlig funktion på $[0,1]$ med $g(1)=0$

Visa att $(g(x)x^n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på

$[0,1]$.

Lösning: Vi ser direkt att $g(x)x^n \to 0$ punktvis på $[0,1]$ då $n \to \infty$. Fixera $\varepsilon > 0$. Så ska vi visa att det finns N så att

$$|g(x)x^n - 0| < \varepsilon \quad \text{alla } n \geq N \text{ alla } x \in [0,1].$$

g kontinuerlig på $[0,1]$ med $g(1) = 0$ medför att det finns $0 < a < 1$ sådant att $|g(x)| < \varepsilon$ alla $x \in [a,1]$.

Alltså $|g(x)x^n - 0| \leq |g(x)| < \varepsilon$ alla $x \in [a,1]$ alla n.

Vidare g kontinuerlig på kompakt mängd $[0,1]$.

Alltså finns $M > 0$ så att $|g(x)| \leq M$ alla $x \in [0,1]$.

Fixera N sådant att $Ma^N < \varepsilon$. Då gäller

$$|g(x)x^n - 0| \leq M|x|^n \leq Ma^n \leq Ma^N < \varepsilon$$ för alla $x \in [0,a]$ och alla $n \geq N$. Klart

5) Visa att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4+k^2+1}$ konvergerar och beräkna dess summa

Lösning. Serien konvergerar då

$$0 \leq \frac{k}{k^4+k^2+1} < \frac{1}{k^3} \quad \text{alla } k \text{ och } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \text{ konv.}$$

Vi noterar att

$$\frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{k}{(k^2+1)^2 - k^2} = \frac{k}{(k^2+k+1)(k^2-k+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{k^2-k+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^2+k+1}$$

Sätt $a_k = \frac{1}{2}\,\frac{1}{k^2-k+1}$. Då gäller

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{k^2+k+1}$$

Alltså $$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{k^4+k^2+1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (a_k - a_{k+1}) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} (a_1 - a_{N+1}) = \frac{1}{2}.$$

Svar: $\frac{1}{2}$

6) Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara den följd av reella tal sådana att

$e^{a_n} + na_n = 2$, $n = 1, 2, ..$ Beräkna $\lim_{n\to\infty} n(1 - na_n)$.

Lösning: Sätt $f_n(x) = e^x + nx$. Då gäller att

$f_n(x)$ är växande funktion med $f_n(0) = 1$ och $f_n(\ln 2) = 2 + n \ln 2 > 2$. Alltså $a_n \in (0, \ln 2)$ för alla n. Vidare gäller $a_{n+1} < a_n$ då

$$f_{n+1}(a_n) = e^{a_n} + n a_n + a_n = 0 + a_n > 0 = f_{n+1}(a_{n+1})$$

där $f_{n+1}(x)$ växande funktion. Alltså

$\lambda = \lim_{n \to \infty} a_n$ existerar då $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ avtagande och nedåt begränsad följd. Dessutom måste $\lambda = 0$ ty annars $2 = e^{a_n} + n a_n \longrightarrow \infty$ då $n \to \infty$, då $\lambda > 0$.

Alltså måste $n a_n \longrightarrow 1$ då $n \longrightarrow \infty$. Men

$$1 - n a_n = e^{a_n} - 1 = \{ e^t = 1 + t + O(t^2) \} = a_n + O(a_n^2)$$

och följaktligen $n(1 - n a_n) = n a_n + \frac{1}{n} O((a_n n)^2) \longrightarrow 1$ då $n \longrightarrow \infty$.

Svar: 1.