MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättning F, TMA976, 19/12 2008, 14.00-18.00
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: David Heintz, 0762-721860.

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' + y' - 6y = e^{-3x}\cos x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

(8p)

2. (a) Avgör om

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \cdot \sin y}{(x+y)^2 + (x-y)^2}$$

existerar, och i så fall beräkna det.

(4p)

(b) Bestäm det reella tal a sådant att

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{\sqrt[x]{x} - a}{\ln x} = 1.$$

(4p)

3. (a) Avgör om serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2k+1}{k(k+1)}$$

konvergerar. Beräkna serien summa om serien konvergerar.

(4p)

(b) Beräkna konvergensradien för potensserien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}\right)^2 x^k.$$

(3p)

4. Låt a vara ett positivt reellt tal. Visa att

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} x^{a+2} e^{-kx^2}$$

konvergerar likformigt på $[0, \infty)$.

(7p)

5. Avgör om följden $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, där

$$c_n = \ln(1 + \frac{1}{n^2}) + \ln(1 + \frac{2}{n^2}) + \ln(1 + \frac{3}{n^2}) + \ldots + \ln(1 + \frac{n}{n^2}),$$

konvergerar, och i så fall beräkna gränsvärdet.

(7p)

6. Antag att den positiva serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar samt att potensserien $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ har konvergensradien 1. Sätt

$$s_n = \Sigma_{k=1}^{n} a_k (1 - \frac{1}{n})^k, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Visa att $s_n \to \infty$ då $n \to \infty$.

(6p)

7. Betrakta differensekvationen

$$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

där $a, b \in \mathbb{R}$ uppfyller $a^2 > 4b$. Visa att differensekvationen har en entydigt bestämd lösning för varje val av begynnelsevillkor y_0, y_1.

(8p)

8. Antag att

   (a) $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ samt att

   (b) f är Lipschitzkontinuerlig med Lipschitskonstanten $k < 1$, dvs

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \text{alla } x, y \in [-1, 1].$$

   Visa att

   (a) det finns ett entydigt bestämt $\alpha \in [-1, 1]$ sådant att

$$f(\alpha) = \alpha,$$

   (b) för varje $x_0 \in [-1, 1]$ gäller att följden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, där $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ konvergerar mot fixpunkten α för f, samt att

(c)

$$\begin{cases} |x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}\,|x_1 - x_0| \\ \\ |x_n - \alpha| \leq \frac{k}{1-k}\,|x_n - x_{n-1}| \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(9p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

Lösningsförslag till TMA976 den 19/12 2008

① Lös differentialekvationen

$$y'' + y' - 6y = e^{-3x}\cos x \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Lösning: Karakteristiska polynomet $r^2 + r - 6 = (r+3)(r-2)$ ger $y_h(x) = Ae^{-3x} + Be^{2x}$. Ansätt $y_p(x) = e^{-3x}z(x)$.

Förskjutningsregeln ger $\left((D-3)^2 + (D-3) - 6\right)[z] = z'' - 5z' = \cos x$.

Ansätt $z(x) = E\cos x + F\sin x$. Insättning i $z'' - 5z' = \cos x$ ger $E = -\frac{1}{26}$, $F = -\frac{5}{26}$. Detta ger

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-3x} + Be^{2x} - e^{-3x}\left(\tfrac{1}{26}\cos x + \tfrac{5}{26}\sin x\right)$$

Konstanterna A och B bestäms av villkoren $y(0) = y'(0) = 0$.

$$\begin{cases} 0 = y(0) = A + B - \frac{1}{26} \\ 0 = y'(0) = -3A + 2B + \frac{3}{26} - \frac{5}{26} \end{cases} \quad \text{ger } A = 0,\ B = \frac{1}{26}$$

Svar: $y(x) = \frac{1}{26}e^{2x} - e^{-3x}\left(\frac{1}{26}\cos x + \frac{5}{26}\sin x\right)$

② a) Avgör om

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \cdot \sin y}{(x+y)^2 + (x-y)^2}$$

existerar.

Lösning: Sätt $f(x,y) = \frac{\sin x \cdot \sin y}{(x+y)^2 + (x-y)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin x \cdot \sin y}{x^2 + y^2}$.

Funktionen $f(x,y)$ är definierad för alla $(x,y) \neq (0,0)$.

Vi noterar att

1) $f(0,t) = f(t,0) = 0$ för alla $t \neq 0$

2) $f(t,t) = \frac{\sin^2 t}{4t^2} \to \frac{1}{4}$ då $t \to 0$

Alltså existerar gränsvärdet i uppgiften ej.

Svar: Gränsvärdet existerar ej.

b) Bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att $\lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{\sqrt[x]{x} - a}{\ln x} = 1$

Lösning: Omskrivning ger

$$x \cdot \frac{\sqrt[x]{x} - a}{\ln x} = \frac{x}{\ln x} \cdot \left(e^{\frac{1}{x}\ln x} - a\right)$$

där vi noterar att $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Maclaurinutv.

$e^t = 1 + t + O(t^2) \quad (t \to 0)$ ger

$$x \cdot \frac{\sqrt[x]{x} - a}{\ln x} = \frac{x}{\ln x} \cdot \left(1 + \frac{\ln x}{x} + O\left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) - a\right) =$$
$$= (1-a)\frac{x}{\ln x} + 1 + O\left(\frac{\ln x}{x}\right).$$

Alltså gäller $\lim_{x \to \infty} x \cdot \frac{\sqrt[x]{x} - a}{\ln x} = 1$ omm $a = 1$.

Svar: $a = 1$

③ a) Avgör om serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k+1}{k(k+1)}$ konvergerar, och om den konvergerar beräkna dess summa.

Lösning: Sätt $a_k = \frac{2k+1}{k(k+1)}$ $k = 1, 2, \ldots$. Vi noterar att serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ är alternerande då $a_k > 0$.

Vidare gäller

1, $\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{2 + \frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k}} = 0$

2, $a_k - a_{k+1} = \frac{1}{k+1}\left(\frac{2k+1}{k} - \frac{2k+3}{k+2}\right) = \frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2}\right) > 0$

för $k = 1, 2, \ldots$

Leibniz konvergenskriterium ger att $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ konvergerar.

För att beräkna seriens summa görs partialbråksuppdeln.

$$\frac{2k+1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \quad \text{där } A = B = 1.$$

Alltså gäller

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= 1 + (-1)^{n-1} \frac{1}{n+1} \to 1, \quad n \to \infty$$

Svar: Serien konvergerar och har summan 1.

b) Beräkna konvergensradien för $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}\right)^2 x^k$

Lösning: Sätt $a_k = \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}\right)^2$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)^2}{(2(k+1)+1)^2} = \frac{(1+\frac{1}{k})^2}{(2+\frac{3}{k})^2} \to \frac{1}{4}, \quad k \to \infty$$

Detta medför att konvergensradien $R = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

Svar: 4

④ $a > 0$. Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} x^{a+2} \cdot e^{-kx^2}$ konvergerar likformigt på $[0, \infty)$.

Lösning: Sätt $f_k(x) = x^{a+2} \cdot e^{-kx^2}$, $x \in [0, \infty)$, $k = 1, 2,$

Derivering ger $f_k'(x) = x^{a+1} \cdot e^{-kx^2}\left[a+2 - 2kx^2\right]$.

Teckenstudium ger $0 \le f_k(x) \le f_k\left(\sqrt{\frac{a+2}{2k}}\right)$, $x \in [0,\infty)$

där $f_k\left(\sqrt{\frac{a+2}{2k}}\right) = \left(\frac{a+2}{2k}\right)^{\frac{a+2}{2}} \cdot e^{-k\cdot\frac{a+2}{2k}} = \text{konst} \cdot k^{-(1+\frac{a}{2})}$.

Då $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-(1+\frac{a}{2})}$ konvergerar för $a>0$ ger

Weierstrass majorantsats att $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar

likformigt på $[0,\infty)$

⑤ Avgör om följden $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, där

$$c_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right),$$

konvergerar, och om så beräkna gränsvärdet

Lösning: Maclaurinutveckling ger

$$\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \frac{k}{n^2} + O\left(\frac{k^2}{n^4}\right), \quad k=1,2,\dots,n$$

Detta medför att

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} + n\cdot O\left(\frac{n^2}{n^4}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}, \; n\to\infty$$

Alltså, följden $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar och har

gränsvärdet $\frac{1}{2}$

Svar: Följden konvergerar mot $\frac{1}{2}$

⑥ Antag att den positiva serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar och att

potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ har konvergensradien 1. Sätt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\left(1-\frac{1}{n}\right)^k, \quad n=1,2,\dots$$

Visa att $s_n \to \infty$, $n\to\infty$

Lösning: Maclaurinutveckling ger $\left(1-\frac{1}{n}\right)^k \ge 1 - k\cdot\frac{1}{n}$

för $n=1,2,\dots$ och $k=1,2,\dots$ Detta ger

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\left(1-\frac{1}{n}\right)^k \ge \sum_{k=1}^{n} a_k\left(1-\frac{k}{n}\right) \ge \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} a_k \to \infty, \; n\to\infty$$

där $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ = största heltal $\le \frac{n}{2}$.

⑦ Se ELW Sats 17.5 fall 1°.

⑧ Se INR