MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättning F, TMA976, 21/12 2007, 14.00-18.00
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: David Heintz, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$
(7p)

2. (a) Beräkna
$$\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt.$$
(4p)

   (b) Bestäm de reella talen a och b så att
$$\lim_{x\to 0} \frac{a(\ln(1+x))^3}{(b-\cos x)\sin x} = 1.$$
(4p)

3. Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar

   (a)
$$\Sigma_{n=1}^{\infty} e^{-(\ln n)^2}$$
(3p)

   (b)
$$\Sigma_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \arctan(\frac{1}{n}) \tan(\frac{1}{n})$$
(4p)

4. Visa att
$$\Sigma_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$$
konvergerar likformigt på $[1, \infty[$ samt beräkna seriens summa.

(7p)

5. För $x \in \mathbb{R}$ sätt $y_1(x) = x$ och

$$y_n(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

där n är lika med antalet rader i determinanten. Bestäm $y_n(x)$ för godtyckligt positivt heltal n för $|x| > 2\sqrt{2}$.

(7p)

6. Beräkna konvergensradien för potensserien

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} F(n) x^n,$$

där talföljden $F(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ bestäms av

$$\begin{cases} F(n+2) - F(n+1) - F(n) = 0, \; n = 0, 1, 2, \dots \\ F(0) = F(1) = 1. \end{cases}$$

Även delresultat kan ge poäng.

(8p)

7. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats.

(8p)

8. Låt a, b och h vara kontinuerliga funktioner och antag att $z(x) > 0$ är en lösning till

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

Visa att

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x)$$

kan lösas genom att ansätta lösningen på formen $z(x)u(x)$ och lösa ekvationen för $u(x)$.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

Lösningsförslag till TMA 976 den 21/12 2007

① $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$

Lösning:

Karakteristiska polynomet $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2$ ger

$y_h(x) = (A + Bx)e^{2x}$

Ansätt! $y_p(x) = z(x)e^{2x}$. Förskjutningsregeln ger

$xe^{2x} = (D-2)^2[z(x)e^{2x}] = e^{2x}D^2[z(x)] = e^{2x}z''(x)$

Kan välja $z(x) = \frac{1}{6}x^3$.

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A + Bx + \frac{1}{6}x^3)e^{2x}$ satisfierar

begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 0$. Insättning

ger $A = B = 0$

Svar: $y(x) = \frac{1}{6}x^3e^{2x}$

---

② a) $\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,dt$

Lösning: $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2}\cos(\theta t)$ ger

$\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,dt = \int_x^{2x} (\frac{1}{t} - \frac{1}{2}t\cos(\theta t))\,dt = [\ln|t|]_x^{2x} -$

$- \frac{1}{2}\int_x^{2x} t\cos(\theta t)\,dt = \ln 2 - \frac{1}{2}\int_x^{2x} t\cos(\theta t)\,dt$.

Dessutom gäller $|\int_x^{2x} t\cos(\theta t)\,dt| \le 2x^2 \to 0,\ x \to 0$

Svar: $\ln 2$

Alt: Medelvärdessatsen för integraler ger, då

$\cos t > 0$ för t i en omgivning av 0,

$\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,dt = \cos(\xi(x))\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt = \cos(\xi(x))\ln 2$

där $\xi(x)$ ligger mellan x och $2x$, och alltså

$\to 0$ då $x \to 0$.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{a(\ln(1+x))^3}{(b-\cos x)\cdot\sin x} = 1$. Bestäm a och b

Lösning: Taylorutveckling ger

täljaren: $a(\ln(1+x))^3 = a(x + O(x^2))^3 = ax^3 + O(x^4)$

nämnaren: $(b-\cos x)\cdot\sin x = (b - 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4))\cdot(x -$

$- \frac{x^3}{6} + O(x^5)) = (b-1)x + (\frac{1}{2} - \frac{1}{6}(b-1))x^3 + O(x^5)$

Detta ger $b=1$ och $a=\frac{1}{2}$

Svar: $a=\frac{1}{2}$, $b=1$

---

(3) a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\ln n)^2}$ konvergerar?

Lösning: $e^{-(\ln n)^2} = (e^{-\ln n})^{\ln n} = \frac{1}{n^{\ln n}}$

Alltså $0 < e^{-(\ln n)^2} < \frac{1}{n^2}$, för $n > e^2$, och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerar med att serien konvergerar enligt jämförelsekriteriet för positiva serier

Svar: konvergerar

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \arctan(\frac{1}{n}) \tan(\frac{1}{n})$ konvergerar?

Lösning: Serien är absolutkonvergent och följaktligen konvergent då

$$\arctan \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}), \quad \tan \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

och alltså $|(-1)^{n^2} \arctan \frac{1}{n} \cdot \tan \frac{1}{n}| = \frac{1}{n^2} + O(\frac{1}{n^3})$ samt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent. Vi har här använt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform.

Svar: konvergerar

Alt: Leibniz konvergenskriterium kan användas om man noterar att $n \equiv n^2 \mod 2$ (då $n - n^2 = n\cdot(n-1)$) och alltså $(-1)^{n^2} = (-1)^n$ samt att

$a_n \equiv \arctan \frac{1}{n} \cdot \tan \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ är en avtagande följd (närstå visas) som konvergerar mot 0.

---

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} x e^{-nx}$ konvergerar likformigt på $[1, \infty[$. Summan.

Lösning: $|x e^{-nx}| \leq e^{-n}$ alla $x \in [1,\infty[$ och $n = 1, 2, \ldots$

då $\frac{d}{dx}(x e^{-nx}) = -(nx-1)e^{-nx} \leq 0$ för $x \geq 1$, $n \geq 1$

Weierstrass majorantsats ger påståendet då $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ konvergerar.

Summan: $\sum_{n=1}^{\infty} x e^{-nx} = x \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x})^n = x \cdot \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1}$

Svar: $\dfrac{x}{e^x-1}$

---

(5) Bestäm $y_n(x)$ för godtyckligt positivt heltal n och $|x|>2\sqrt{2}$ där $y_n(x)$ är determinanten

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Lösning: Vi har $y_1(x)=x$, $y_2(x)=x^2-2$

För $n=3,4,\ldots$ utveckla efter 1:a raden. Detta ger

$$y_n(x) = x\,y_{n-1}(x) - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = x\,y_{n-1}(x) - 2\,y_{n-2}(x)$$

Vi får differensekvationen $y_{n+2}(x) - x\,y_{n+1}(x) + 2\,y_n(x) = 0$

Karakteristiska polynomet $r^2 - xr + 2$ har de reella nollställena $\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4}-2}$ då $|x|>2\sqrt{2}$

Alltså $y_n(x) = A(x)\left(\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}-2}\right)^n + B(x)\left(\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{x^2}{4}-2}\right)^n$.

$A(x)$ och $B(x)$ bestäms av

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(A(x)+B(x))\,x + (A(x)-B(x))\sqrt{\frac{x^2}{4}-2} & (n=1) \\ x^2-2 = (\frac{1}{2}x^2-2)(A(x)+B(x)) + x\sqrt{\frac{x^2}{4}-2}\,(A(x)-B(x)) & (n=2) \end{cases}$$

Kalkyl ger $A(x) = \frac{1}{2}\left(1+\dfrac{\frac{1}{2}x}{\sqrt{\frac{x^2}{4}-2}}\right)$, $B(x) = \frac{1}{2}\left(1-\dfrac{\frac{1}{2}x}{\sqrt{\frac{x^2}{4}-2}}\right)$

Svar: $y_n(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{4}-2}}\left(\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}-2}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{4}-2}}\left(\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{x^2}{4}-2}\right)^{n+1}$

$n=1,2,\ldots$

---

(6) Beräkna konvergensradien för $\sum_{n=0}^{\infty} F(n)x^n$, där $F(n)$ bestäms av $F(n+2)-F(n+1)-F(n)=0$, $n=0,1,2,\ldots$ och $F(0)=F(1)=1$

Lösning: Vi ser att $F(n)$ bildar en växande talföljd.

Sätt $c_n = \dfrac{F(n+1)}{F(n)}$ $n=0,1,2,\ldots$ Här är

$$c_{n+1} = \frac{F(n+2)}{F(n+1)} = \frac{F(n+1)+F(n)}{F(n+1)} = 1 + \frac{1}{c_n}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

och $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = \frac{3}{2}$, $c_3 = \frac{5}{3}$, ...

Sätt $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Det gäller $f : [\frac{3}{2}, 2] \longrightarrow [\frac{3}{2}, 2]$

och f är en kontraktion på $[\frac{3}{2}, 2]$ då

$\max_{x \in [\frac{3}{2}, 2]} |f'(x)| = \max_{x \in [\frac{3}{2}, 2]} \frac{1}{x^2} = \frac{4}{9} < 1$. Iterationssatsen

ger att följden $(c_n)_{n=2}^{\infty}$ konvergerar mot den entydigt

bestämda fixpunkten c till f i $[\frac{3}{2}, 2]$, dvs $c = f(c) = 1 + \frac{1}{c}$.

Vi får $c^2 - c - 1 = 0$ & $c \in [\frac{3}{2}, 2]$, dvs $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Konvergensradien för potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} F(n) x^n$ är då

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} c_n} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Svar: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Alt: Beräkna $F(n)$ explicit (Fibonacci serien) och

sedan beräkna $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{F(n)}$ eller $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)}$.

Att inse att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} F(n) x^n$ har konvergensradie

$R \in]0, \infty[$ följer t.ex. av att $1 \leq F(n) \leq 2^n$, $n = 1, 2, \ldots$

och alltså $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{F(n)} \in [1, 2]$ och följaktligen

$R \in [\frac{1}{2}, 1]$.