Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Elisabeth W/Elin G, 0762-721860
2006-08–25 kl. förmiddag

Tentamen i TMA976 Matematisk analys, fortsättning F
TMA975 Reell matematisk analys F, del A

Betygsgränser: 3=24p, 4=36p, 5=48p. Lärares närvaro i tentamenssalen: ca 9.30 och 11.30.
OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (xe^x)^2 \\ y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 2. \end{cases}$$

(8p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' = -\frac{y'}{(1+y)^2} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

(8p)

3. Bestäm det polynom $P(x)$ av lägsta möjliga grad för vilket

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\arctan(P(x)))^2}{1 - \cos^4 x} = 1.$$

(6p)

4. Avgör om gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar och beräkna i så fall det då

   a) $f(x,y) = \frac{x^2y + x^3}{y^2 + xy}$ (3p)

   b) $f(x,y) = \frac{(\cos y - 1)x}{x^2 + y^2}$ (3p)

5. Bestäm konvergensintervallet för

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n$$

samt beräkna summan. (8p)

6. För[1] positiva heltal n visa att

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \, dx \to 0, \; n \to \infty.$$

(8p)

7. Formulera och bevisa MacLaurins formel med Lagranges restterm. (8p)

8. Låt $a_n > 0$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ och antag att

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \to L, \; n \to \infty.$$

Visa att

a) $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar om $L > 1$,

b) $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar om $L < 1$. (8p)

PK

[1]Tips: Uppskattningen $(1-x^2)^n \geq 1 - nx^2$ kan vara användbar men måste visas.

Prel. Lösningsförslag till TMA976 den 20/8 2006

1. Kar ekv $r^3-5r^2+8r-4=(r-1)(r-2)^2=0$ ger

$y_h(x) = Ae^x + (Bx+C)e^{2x}$.

Högerledet $(xe^x)^2 = x^2e^{2x}$ motiverar ansatsen

$y_p(x) = z(x)\cdot e^{2x}$ som med förskjutningsregeln ger

$z'''(x)+z''(x) = x^2$. Ansätt $z(x)=ax^4+bx^3+cx^2$.

Derivering och insättning i ekv ger

$a=\frac{1}{12}$, $b=-\frac{1}{3}$, $c=1$.

Den allmänna lösningen får nu som

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x) = Ae^x+\left(Bx+C+\tfrac{1}{12}x^4-\tfrac{1}{3}x^3+x^2\right)e^{2x}.$$

Begynnelsevillkoren ger

$A+C=0$, $A+B+2C=0$, $A+4B+4C+2=2$

dvs $A=B=C=0$

Svar: $y(x) = \left(\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)e^{2x}$

2. $y'' = -\dfrac{y'}{(y+1)^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{y+1}\right)$ ger

$y'(t) = \dfrac{1}{y(t)+1} + C$. Villkoren ger $C=0$

Detta ger $\int (y+1)\,dy = \int dt$ dvs $\frac{1}{2}y^2+y = t+D$

Villkoret $y(0)=0$ ger $D=0$

Svar: $\frac{1}{2}y^2+y=t$. (Alt: omskrivning $y''=\frac{dy'}{dy}\cdot y'$)

3. Maclaurinutveckling ger

$\arctan t = t + O(t^2)$, $t\to 0$

$1-\cos^4 x = 1-\left(1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4)\right)^4 = 2x^2+O(x^4)$, $x\to 0$.

Detta ger $P(x)=\sqrt{2}x$

Svar: $P(x)=\sqrt{2}x$

4. a) $\dfrac{x^2y+x^3}{y^2+xy} = \dfrac{x^2}{y}$

Väg 1: $x=y\to 0 \Rightarrow \frac{x^2}{y}\to 0$.

Väg 2: $x^2=y\to 0 \Rightarrow \frac{x^2}{y}=1\not\to 0$.

Gränsvärde saknas alltså.

b) $\frac{(\cos y^2 - 1)\cdot x}{x^2+y^2}$ = { polära koordinater } =

$= \frac{1}{r}\cos\theta\cdot\left(\cos((r\sin\theta)^2) - 1\right) =$

$= \frac{1}{r}\cos\theta\cdot\left(\frac{1}{2}(r\sin\theta)^2 + O(r^4)\right) =$

$= r\cdot\cos\theta\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta + O(r^2)\right) \to 0,\ r\to 0$ oberoende av θ

∴ Gränsvärdet existerar och $= 0$.

5. Potensserie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ med $a_k = \binom{k+2}{2}$.

Konvergensradien R:

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+3)!}{2!\,(k+1)!}\cdot\frac{2!\cdot k!}{(k+2)!} = \frac{k+3}{k+1} \to 1,\ k\to\infty$

Alltså $R = 1$

$x=\pm 1$: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ divergerar då $a_k \not\to 0,\ k\to\infty$

Seriens summa: $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)(k+1)}{2}x^k = f(x)$

för $|x|<1$. Derivering av $\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} x^k$ två gånger ger

$f(x)$. Men $\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} x^k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - 1 - x\right)$ och alltså

$f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$

Svar: Konvergensintervallet $(-1,1)$. Seriens summa $\frac{1}{(1-x)^3}$

6. Uppskattningen $\frac{1}{\sqrt{m}} \le \int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\,dx$ följer av

$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m dx \ge \int_{|x|\le\frac{1}{\sqrt{m}}}(1-x^2)^m dx \ge \int_{|x|\le\frac{1}{\sqrt{m}}}(1-mx^2)dx =$

$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{m}} - m\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^3\right) \ge \frac{1}{\sqrt{m}}.$

Uppskattningen $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m dx \to 0,\ m\to\infty$: Fixera $\varepsilon>0$

Då gäller $0 \le \int_{|x|\le\delta}(1-x^2)^m dx \le 2\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ då $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$. Sätt $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$

Vidare $0 \le \int_{\delta\le|x|\le 1}(1-x^2)^m dx \le 2(1-\delta^2)^m < \frac{\varepsilon}{2}$

då $m \ge N_\varepsilon$. Notera $(1-\delta^2)^m \downarrow 0$ då $m\to\infty$.