Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: David R/Henrik S, 0762-721860
2006–04–22 kl. förmiddag

Tentamen i TMA976 Matematisk analys, fortsättning F
TMA975 Reell matematisk analys F, del A

Betygsgränser: 3=24p, 4=36p, 5=48p. Lärares närvaro i tentamenssalen: ca 9.30 och 11.30.
OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' + y = 2\sin^2 \frac{x}{2} \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

(8p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} \frac{x}{2}y'' = 2y' - \frac{3}{x}y, \ x > 0 \\ y(1) = 2, y(2) = 12. \end{cases}$$

(7p)

3. Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 8y_n = 25n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ y_0 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

samt beräkna y_{2006}. (6p)

4. a) Bestäm det polynom $P(x)$ av lägsta möjliga grad för vilket

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(P(x))}{2 - 2\cos x - \ln(1 + x^2)} = 2.$$

(3p)

b) Avgör om gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\right)$$

existerar. (6p)

5. Avgör för vilka reella tal x som serien

$$\Sigma_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n \ln n + 1}{n \ln n}\right) x^n$$

konvergerar. (6p)

6. För $\alpha, \beta > 0$, där β är heltal, låt $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, vara definierad av

$$f_n(x) = n^{\alpha} x^{\beta} (1 - x)^n.$$

Avgör för vilka värden på parametrarna α, β som påståendena nedan gäller:

a) $f_n \to 0$ punktvis på $[0, 1]$ då $n \to \infty$. (2p)

b) $f_n \to 0$ likformigt på $[0, 1]$ då $n \to \infty$. (4p)

c) $\int_0^1 f_n(x)\, dx \to 0$. (4p)

v.g.v.

7. Formulera och bevisa Leibniz konvergenskriterium för alternerande serier. (8p)

8. Formulera och bevisa entydighetssatsen för MacLaurinutvecklingar. (6p)

PK

Prelim.
Lösningar till TMA976 (TMA975A) den 22/4 2006
skisser

(1) $\begin{cases} y'' + y = 2\sin^2\frac{x}{2} \\ y(0)=1, \; y'(0)=0 \end{cases}$

Lösning: Kar ekv $r^2+1=0 \Rightarrow y_h(x) = A\cos x + B\sin x$.

$2\sin^2\frac{x}{2} = 1-\cos x$ med för ansättningen $y_p(x) = 1 + z(x)$ där

$z(x) = \mathrm{Re}(h(x)e^{ix})$ och $(D^2+1)(h(x)e^{ix}) = e^{ix}((D+i)^2+1)h(x) = -e^{ix}$,

dvs $(D^2+2iD)h(x) = -1$. $\mathrm{Re}(-\frac{1}{2i}xe^{ix}) = -\frac{x}{2}\sin x$ ger

$y_p(x) = 1 - \frac{x}{2}\sin x$.

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ satisfierar begynnelsevillkoren då

$\begin{cases} A+1=1 \\ B=0 \end{cases}$ Svar: $y(x) = 1 - \frac{x}{2}\sin x$

(2) $\begin{cases} \frac{x}{2}y'' = 2y' - \frac{3}{x}y, \; x>0 \\ y(1)=2, \; y(2)=12 \end{cases}$

Lösning: Eulerdifferentialekvation $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

Sätt $t = \ln x$, $x>0$. Med $z(t) = y(x(t))$ fås

$z'' - 5z' + 6z = 0$ med kar ekv $r^2 - 5r + 6 = 0$

Alltså $z(t) = Ae^{2t} + Be^{3t}$ och $y(x) = Ax^2 + Bx^3$.

Villkoren ger $A+B=2$, $4A+8B=12$

Svar: $y(x) = x^2 + x^3$.

(3) $\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + 8y_n = 25n, \; n=0,1,2,\ldots \\ y_0=0, \; y_1=1 \end{cases}$

Lösning: Kar. ekv $r^2 - 4r + 8$ ger rötterna $2\pm 2i$. Vi får

$y_n^{(h)} = A(2\sqrt{2})^n\cos(\frac{\pi n}{4}) + B(2\sqrt{2})^n\sin(\frac{n\pi}{4})$. Ansättningen $y_n^{(p)} = C + Dn$

ger $D=5$, $C=2$. Alltså $y_n = A(2\sqrt{2})^n\cos(\frac{n\pi}{4}) + B(2\sqrt{2})^n\sin(\frac{n\pi}{4}) + 2 + 5n$

Villkoren $y_0=0$, $y_1=1$ ger $A=-2$, $B=-1$

Svar: $y_n = -2(2\sqrt{2})^n\cos(\frac{\pi n}{4}) - (2\sqrt{2})^n\sin(\frac{n\pi}{4}) + 2 + 5n$

$y_{2006} = 2^{3009} + 10032$.

④ a) $P(x)$ polynom av lägst möjliga grad så att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(P(x))}{2-2\cos x - \ln(1+x^2)} = 2$$

Lösning: MacLaurinutveckling av nämnare och täljare ger

$$2-2\cos x - \ln(1+x^2) = 2-2\left(1-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{24}x^4\right) - \left(x^2-\tfrac{x^4}{2}\right) + O(x^6) =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{12}\right)x^4 + O(x^6) = \tfrac{5}{12}x^4 + O(x^6).$$

och, eftersom $\sin t = t + O(t^3),\ t\to 0$, så måste $P(x) = \frac{5}{6}x^4$.

Svar: $P(x) = \frac{5}{6}x^4$

b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$. Avgör om $\lim_{n\to\infty} a_n$ existerar

Lösning: Metod 1: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}.$$ Utveckling av täljare och nämnare ger: $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-2\sqrt{n+1} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1-2\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) =$

$$= \sqrt{n}\left(1+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n} + 1 - 2\left(1+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n}\right) + O\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right) = -\tfrac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right);$$

$$\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) = n^{\frac{3}{2}} + O\left(n^{\frac{1}{2}}\right);$$

Alltså $$a_{n+1} - a_n = \frac{-\frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)}{n^{3/2} + O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ gäller $\lim_{n\to\infty} a_n$ existerar enligt Weierstrass M-test

Metod 2: Integralkriteriet (beviset) ger $\int_l^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \le \sum_{k=l}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \le \int_{l-1}^{n} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

för alla positiva heltal med $l<n$. Vi ser att

$$\left| \int_{l-1}^{n} \frac{dx}{\sqrt{x}} - \int_{l}^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right| \le \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{l-1}} \to 0,\ \text{då } l,n\to\infty.$$

Detta medför

$$\int_l^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \le \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

och skillnaden mellan vänster $\qquad = \underbrace{\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{l-1}}_{\text{oberoende av } n}$

och höger led

$$0 \le \int_{l-1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx - \int_{l}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \to 0,\quad n,l\to\infty.$$

Alltså $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ existerar

Svar: gränsvärdet existerar

⑤ Sätt $a_n = \ln\left(\frac{n\ln n + 1}{n\ln n}\right)$ $n = 2, 3, \dots$

Bestäm konvergensintervallet för $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$

Lösning: $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n\ln n}\right) = \frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$

Kvotkriteriet: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{\frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \to 1 , \ n \to \infty$

ger konvergensradien $R = \frac{1}{1} = 1$.

$x = 1$: divergens då $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergerar

$x = (-1)$: konvergens då $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\ln n}$ konvergent enligt Leibniz konv. kriterium och $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2}$ absolutkonvergent för alla följder b_n, $n = 2, 3 \ldots$ där det finns $M \in \mathbb{R}$ så att $|b_n| \le M$ alla n

Svar: Konvergensintervallet är $[-1, 1)$

(6) $\alpha, \beta > 0$, $f_n(x) = n^{\alpha} x^{\beta} (1-x)^n$, $x \in [0,1]$.

a) $f_n \to 0$ punktvis på $[0,1]$?

Ja då $f(0) = 0$ alla n och för fixt $x_0 \in (0,1]$ gäller $f_n(x_0) = n^{\alpha} x_0^{\beta} (1-x_0)^n \to 0$, $n \to \infty$

b) $f_n \to 0$ likformigt på $[0,1]$?

Ja om och endast om $\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \to 0$.

Fixera n. $f_n'(x) = 0 \iff \beta(1-x) - nx = 0 \iff x = \frac{\beta}{\beta+n}$.

Vi får $\max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{\beta}{\beta+n}\right) = n^{\alpha}\left(\frac{\beta}{\beta+n}\right)^{\beta}\left(1 - \frac{\beta}{\beta+n}\right)^n =$

$$= n^{\alpha} \frac{\beta^{\beta}}{(\beta+n)^{\beta+n}} \cdot n^n = n^{\alpha-\beta} \cdot \frac{\beta^{\beta}}{\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^{\beta+n}}$$

Alltså

$$\max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \to \begin{cases} 0 & \text{då } \beta > \alpha \\ \beta^{\beta} e^{-\beta} & \text{då } \beta = \alpha \\ +\infty & \text{då } \beta < \alpha \end{cases}$$

dvs likformig konvergens om och endast om $\beta > \alpha$.

c) $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to 0$, $n \to \infty$?

Ja om $\beta > \alpha$ ty då gäller $f_n \to 0$ likf. på $[0,1]$.

Annars? Partialintegrera t.ex.

$$\int_0^1 n^{\alpha} x^{\beta} (1-x)^n\,dx = \left[n^{\alpha} \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}(1-x)^n\right]_0^1 + \int_0^1 n^{\alpha} \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} n (1-x)^{n-1}\,dx =$$

$$= \int_0^1 n^{\alpha} \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} n (1-x)^{n-1}\,dx = \int_0^1 n^{\alpha} \frac{x^{\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)} n(n-1)(1-x)^{n-2}\,dx =$$

$$= \ldots = \int_0^1 n^{\alpha} \frac{1}{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)} n!\, x^{\beta+n}\,dx =$$

$$= \frac{n^{\alpha} \cdot n!}{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n+1)} = I_n$$

Då β positivt heltal gäller

$$I_n = \frac{n^{\alpha}\, n!\, \beta!}{(\beta+n+1)!} = n^{\alpha-\beta-1} \cdot \frac{\beta!}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{\beta+1}{n}\right)}$$

Alltså

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \longrightarrow \begin{cases} 0 & \beta > \alpha - 1 \\ \beta! & \beta = \alpha - 1 \\ \infty & \beta < \alpha - 1 \end{cases}, \quad n \to \infty$$

Svar: a) $f_n \to 0$ punktvis på $[0,1]$ alla $\alpha, \beta > 0$

b) $f_n \to 0$ likformigt på $[0,1]$ om och endast om $\beta > \alpha$

c) $\int_0^1 f_n\,dx \to 0$ om och endast om $\beta > \alpha - 1$.