Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Marcus Warfheimer, 0762-721860
2005–12–13 kl. 14.00–18.00

Tentamen i TMA976 Matematisk analys, fortsättning F

Betygsgränser: 3=24p, 4=36p, 5=48p bonuspoäng (maximalt 4p) medräknade. Lärares närvaro i tentamenssalen: ca 9.30 och 11.30.

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y''' - 5y'' + 8y' - 4y = xe^x + x^2 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

(8p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} \frac{1}{3}y' = x^5y^2 - x^2y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(7p)

3. Lös differensekvationen

$$\begin{cases} a_{n+2} - \frac{\sqrt{3}}{2}a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

samt ange a_{2005}. (6p)

4. a) Bestäm det polynom $P(x)$ av lägsta möjliga grad för vilket

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + P(x))}{2 - 2\cos x - \sin^2 x} = 1.$$

(5p)

b) Avgör om gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{|x-y|}{x^2-2xy+y^2}}$$

existerar och beräkna i så fall det. (4p)

5. Avgör för vilka reella tal x som serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}})}x^n$$

konvergerar. (6p)

6. Givet en funktionsföljd $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ på intervallet $I = [0, 1]$. Antag att

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_k) = \frac{1}{2}$$

för varje konvergent följd $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ av punkter i I. Sätt $f(x) = \frac{1}{2}$ för $x \in I$.

a) Visa att $f_k \to f$ punktvis på I då $k \to \infty$. (2p)

b) Avgör om $f_k \to f$ likformigt på I då $k \to \infty$. (6p)

v.g.v.

7. Formulera och bevisa MacLaurins formel. Satser som används i beviset behöver endast formuleras. (8p)

8. Låt $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ vara en positiv serie, där följden $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ är avtagande. Visa att $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar om och endast om serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergerar. Använd detta kriterium för att avgöra för vilka $p \in \mathbb{R}$ som serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ är konvergent (även om du inte visat det). (6+2p)

PK

Lösningsförslag till TMA976, 2005-12-13

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y''' - 5y'' + 8y' - 4y = xe^x + x^2 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$$

Lösning:
Homogenlösningen y_h: Karakteristiska ekvationen $r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0$ har rötterna $r_1 = 1, r_{2,3} = 2$ vilket ger

$$y_h(x) = Ae^x + (B + Cx)e^{2x}.$$

Partikulärlösning y_p: Ansätt $y_{p,1}(x) = Ex^2 + Fx + G$ och sätt in i

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = x^2.$$

Detta ger $y_{p,1}(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{11}{8}$.
Ansätt $y_{p,2}(x) = (Hx + I)xe^x$ och sätt in i

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = xe^x.$$

Förskjutningsregeln ger

$$((D+1)^3 - 5(D+1)^2 + 8(D+1) - 4)[Hx^2 + Ix] = x,$$

dvs

$$(D^3 - 2D^2 + D)[Hx^2 + Ix] = x.$$

Detta ger $y_{p,2}(x) = (\frac{1}{2}x^2 + 2x)e^x$. En partikulärlösning ges nu av

$$y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x).$$

Den allmänna lösningen $y(x)$ till ursprungliga differentialekvationen är

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

där konstanterna A, B och C bestäms av begynnelsevillkoren

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Efter derivering och insättning av $x = 0$ fås

$$\begin{cases} A + B = \frac{11}{8} \\ A + 2B + C = -1 \\ A + 4B + 4C = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

vilket ger $A = 5, B = \frac{5}{4}$ och $C = -\frac{29}{8}$.
Svar: $y(x) = 5e^x + (\frac{5}{4}x - \frac{29}{8})e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{11}{8} + (\frac{1}{2}x^2 + 2x)e^x$

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} \frac{1}{3}y' = x^5 - x^2 y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Lösning: Differentialekvationen är av Bernoullis typ. Dividera med y^2 och sätt $z = \frac{1}{y}$. Då gäller $z' = -\frac{y'}{y^2}$ och vi får $-\frac{1}{3}z' = x^5 - x^2 z$, dvs

$$z' - 3x^2 z = -3x^5.$$

Detta är en linjär differentialekvation av första ordningen som löses m hj a integrerande faktor. Vi får

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^3} z(x)) = -3x^5 e^{-x^3}.$$

Integration ger

$$e^{-x^3} z(x) = x^3 e^{-x^3} + e^{-x^3} + C.$$

Alltså gäller

$$y(x) = \frac{1}{Ce^{x^3} + 1 + x^3}.$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger $C = 0$.

Svar: $y(x) = \frac{1}{1+x^3}$.

Kommentar: Om man inte direkt skulle identifierar ekvationen som en Bernoulis differentialekvation kan man ju (som flera studenter gjort) skriva om den som

$$\frac{d}{dx}(e^{x^3} y(x)) = 3x^5 e^{x^3} (y(x))^2$$

och sedan inse att detta är en separabel differentialekvation med avseende på funktionen $e^{x^3} y(x)$.

3. Lös differensekvationen

$$\begin{cases} a_{n+2} - \frac{\sqrt{3}}{2} a_{n+1} + \frac{1}{4} a_n = 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$$

samt beräkna a_{2005}

Lösning: Den karakteristiska ekvationen $r^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} r + \frac{1}{4} = 0$ har rötterna

$$r_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \pm i\frac{1}{4} = \frac{1}{2} e^{\pm i\frac{\pi}{6}}.$$

Detta medför

$$a_n = A(\frac{1}{2})^n \cos(n\frac{\pi}{6}) + B(\frac{1}{2})^n \sin(n\frac{\pi}{6}), \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Villkoren $a_0 = 0, a_1 = 1$ bestämmer konstanterna till $A = 0, B = 4$. Vi får

$$a_n = 2^{2-n}\sin(n\frac{\pi}{6}),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Vidare är $2005 = 6 \cdot 334 + 1$ och alltså gäller $\sin(2005\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. Vi har

$$a_{2005} = \frac{1}{2^{2004}}.$$

Svar: $a_n = 2^{2-n}\sin(n\frac{\pi}{6}),\ n = 0, 1, 2, \ldots$ och $a_{2005} = \frac{1}{2^{2004}}$.

4. (a) Bestäm det polynom $P(x)$ av lägst grad sådant att

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + P(x))}{2 - 2\cos x - \sin^2 x} = 1.$$

Lösning: MacLaurinutveckling av termerna i nämnaren ger

$$2 - 2\cos x - \sin^2 x = 2 - 2(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)) - (x - \frac{x^3}{6} + O(x^5))^2 =$$

$$= -x^2 - \frac{x^4}{12} + O(x^6)) - (x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^6)) = \frac{x^4}{4} + O(x^6).$$

Vidare gäller

$$\ln(1 + t) = t + O(t^2),\ t \to 0.$$

Gränsvärdesvillkoret ger att $P(x)$ har lägstagradstermen $\frac{x^4}{4}$ och då $P(x)$ ska ha lägsta möjliga grad måste $P(x) = \frac{x^4}{4}$.

Svar:$P(x) = \frac{x^4}{4}$.

(b) Existerar gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{|x-y|}{x^2-2xy+y^2}}?$$

Lösning: Nämnaren i exponenten är $(x-y)^2$ varför funktionen $e^{-\frac{|x-y|}{x^2-2xy+y^2}}$ är lika med $e^{-\frac{1}{|x-y|}}$ och är definieradad för alla (x, y) där $x \neq y$. Sätt $D = \{(x, y) : x \neq y\}$. Då

$$D \ni (x, y) \to (0, 0) \Rightarrow\ -\frac{1}{|x - y|} \to -\infty$$

och

$$e^t \to 0,\ \ t \to -\infty$$

gäller

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{|x-y|}{x^2-2xy+y^2}} = 0.$$

Svar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{|x-y|}{x^2-2xy+y^2}} = 0.$$

5. Bestäm konvergensområdet för

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}})} x^n.$$

Lösning: Sätt $a_n = \frac{1}{2^n(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}})}$, $n = 1, 2, \ldots$ Det gäller att

$$a_n = \frac{1}{2^n(1-(1-\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})))} = \frac{2n}{n^2} \cdot \frac{1}{1+O(\frac{1}{n})}$$

och alltså

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{2n}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{1+O(\frac{1}{n})}} \to \frac{1}{2},\ n \to \infty.$$

Potensserien har konvergensradien $R = 2$.
Eftersom $a_n(\pm 2)^n \not\to 0$ då $n \to \infty$ gäller att $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}})} x^n$ divergerar för $x = \pm 2$. Alltså konvergerar serien endast för $-2 < x < 2$.

Svar: Konvergensintervallet är $(-2, 2)$.

6. $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ är en funktionsföljd på $I = [0, 1]$ sådan att $I \ni x_k \to x$ då $k \to \infty$ medför $f_k(x_k) \to \frac{1}{2}$.

   (a) Visa $f_k \to f$ punktvis på I där $f(x) = \frac{1}{2}$, $x \in I$.
   Lösning: Fixera godtyckligt $x_0 \in I$. Välj $x_k = x_0$ för $k = 1, 2, \ldots$. Då gäller $f_k(x_0) \to \frac{1}{2}$ då $k \to \infty$ och alltså $f_k \to f$ punktvis på I.

   (b) Avgör om $f_k \to f$ likformigt på I.
   Lösning: Antag att $f_k \not\to f$ likformigt på I. Då finns ett $\epsilon >$ och delföljder $(f_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ av $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ och $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ av $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset I$ så att

$$|f_{k_n}(x_{k_n}) - \frac{1}{2}| \geq \epsilon,\ n = 1, 2, \ldots$$

   Välj en konvergent delföljd $(x_{k_{n_l}})_{l=1}^{\infty}$ av $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ vilket är möjligt då I är en kompakt mängd. Vi har $x_{k_{n_l}} \to z,\ l \to \infty$ för något $z \in I$. Betrakta nu följden $(\tilde{x}_m)_{m=1}^{\infty}$, där

$$\tilde{x}_m = x_{k_{n_l}} \text{ alla } k_{n_l} \leq m \leq k_{n_{l+1}},\ l = 1, 2, \ldots$$

   och

$$\tilde{x}_m = 0 \text{ alla } m < k_{n_1}.$$

   Då gäller

$$\tilde{x}_m \to z,\ m \to \infty$$

men

$$f_m(\tilde{x}_m) \not\to \frac{1}{2},\ m \to \infty$$

eftersom

$$|f_{k_{n_l}}(x_{k_{n_l}}) - \frac{1}{2}| \geq \epsilon,\ l = 1, 2, \ldots$$

Detta ger en motsägelse och den likformiga konvergensen är visad.

7. Se textboken

8. $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ är en avtagande positiv följd med $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Visa att

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$$

är konvergent om och endast om

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

är konvergent.

Lösning: Vi obseverar följande olikheter

$$a_1+(a_2+a_3)+\ldots+(a_{2^k}+a_{2^k+1}+\ldots+a_{2^{k+1}-1}) \leq a_1+2a_2+2^2a_{2^2}+\ldots+2^k a_{2^k}$$

och

$$a_1+a_2+(a_3+a_4)+\ldots+(a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\ldots+a_{2^{k+1}}) \geq a_1+a_2+2a_{2^2}+\ldots+2^k a_{2^{k+1}} =$$

$$= a_1 + \frac{1}{2}(2a^2 + 2^2 a_{2^2} + \ldots + 2^{k+1} a_{2^{k+1}}).$$

Jämförelsekriteriet ger nu påståendet.

Vidare skulle kriteriet användas för att avgöra för vilka p som serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergerar.

Lösning: Vi kan anta att $p > 0$ (annars gäller $\frac{1}{k^p} \not\to 0$ då $k \to \infty$ och då divergerar serien). Enligt kriteriet ovan konvergerar $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ om och endast om

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \Sigma_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^k$$

konvergerar. Den senare serien är en geometrisk serie som konvergerar för $|2^{1-p}| < 1$ och divergerar för $|2^{1-p}| \geq 1$, dvs konvergerar för $p > 1$ och divergerar för $1 \geq p (> 0)$.

Svar: Konvergens för $p > 1$ och divergens för $p \leq 1$.

Kommentar: Svaret är ju ingen överaskning då detta är ett välkänt faktum vilket ju t ex också följer från integralkriteriet.