Hjälpmedel: Formelblad bifogas tesen, ej räknedosa

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Telefon: Erik Broman, 0762-721860
2005–08–19 kl. 08.30–12.30

Tentamen i TMA975 Reell matematisk analys F, del A

Betygsgränser: 3=24p, 4=36p, 5=48p. Lärares närvaro i tentamenssalen: ca 9.30 och 11.30.
OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y''' + 3y'' + 4y' + 2y = e^{-x} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

(7p)

2. Beräkna för godtyckliga reella tal a_0 och a_1 följden $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ då

$$a_{n+2} = \frac{2a_{n+1} + a_n}{3}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Beräkna sedan

$$\max\{\lim_{n\to\infty} a_n : a_0^2 + a_1^2 = 1\}.$$

(8p)

3. Avgör om gränsvärdena existerar och beräkna i så fall dem:

a) $\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x} + e^{\frac{2}{x}})^x$, (4p)

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy|^{x^4+y^4}$. (4p)

4. Avgör för vilka reella tal x som serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}} x^n$$

konvergerar. (6p)

5. Bestäm den allmänna potensserie som satisfierar

$$y'' - xy' + 2y = 0.$$

Bestäm också potensseriens konvergensradie. (8p)

6. För vilka reella tal x konvergerar serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n} - 1}.$$

(8p)

7. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats. (7p)

8. Formulera och bevisa integralkriteriet. (8p)

PK

Lösningsskisser TMA 975 den 19/8 2005

(1) Kar. ekv. $r^3+3r^2+4r+2=0$

$r_1=-1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & r^2+2r+2 = (r+1)^2+1 = (r+1+i)(r+1-i). \\
r+1 & r^3+3r^2+4r+2 \\
 & r^3+r^2 \\
\hline
 & 2r^2+4r+2 \\
 & 2r^2+2r \\
\hline
 & 2r+2 \\
 & 2r+2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$r_{2,3}=-1\pm i$

$y_h(x) = Ae^{-x}+Be^{-x}\cos x+Ce^{-x}\sin x$

$y_p(x) = e^{-x}z(x)$

Förskjutning $(D^3+3D^2+4D+2)[e^{-x}z(x)]$

$= e^{-x}\left((D-1)^3+3(D-1)^2+4(D-1)+2\right)[z(x)]$

$= e^{-x}(D^3+D)[z(x)]$

Välj $z(x)=dx$. Då fås $d=1$

Allmänna lösningen $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=$

$= Ae^{-x}+Be^{-x}\cos x+Ce^{-x}\sin x+xe^{-x}$.

Begynnelsevillkoren ger

$$
\begin{cases} 0 = A+B \\ 0 = -A-B+C+1 \\ 0 = A+2C-2 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=-1 \end{cases}
$$

Svar: $y(x) = xe^{-x}-e^{-x}\sin x$

(2) Kar. ekv. för rekursionsekv. $a_{n+2} = \dfrac{2a_{n+1}+a_n}{3}$

$r^2-\frac{2}{3}r-\frac{1}{3}=0$, dvs $r_{1,2}=\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}$ $\begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3}\end{cases}$

Alltså

$a_n = A+B\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad n=0,1,2,\dots$

där $a_0=A+B$, $a_1=A-\frac{1}{3}B$. Vi har

$A=\frac{1}{4}a_0+\frac{3}{4}a_1$, $B=\frac{3}{4}a_0-\frac{3}{4}a_1$

Detta ger $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}a_0+\frac{3}{4}a_1$

Återstår att beräkna

$\max\left\{ \frac{1}{4}a_0 + \frac{3}{4}a_1 \; : \; a_0^2 + a_1^2 = 1 \right\} \equiv M$

$\frac{1}{4}a_0 + \frac{3}{4}a_1$ är konstant på linjer $\frac{1}{4}a_0 + \frac{3}{4}a_1 = \lambda$

i (a_0, a_1)-planet, vilka har $(1,3)$ som normalvektor

Speciellt ger $t^2 + (3t)^2 = 1$, $t > 0$ att $t = \frac{1}{\sqrt{10}}$ och

$$M = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{4}\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Svar: $a_n = \frac{1}{4}a_0 + \frac{3}{4}a_1 + \left(\frac{3}{4}a_0 - \frac{3}{4}a_1\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$M = \frac{\sqrt{10}}{4}$

3 a)
$$\left[\frac{1}{x} + e^{\frac{2}{x}}\right]^x = \left[\frac{1}{x} + \left(1 + \frac{2}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]^x =$$
$$= \left[1 + \frac{3}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^x =$$
$$= e^{x \ln\left(1 + \frac{3}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} = e^{x\left(\frac{3}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} =$$
$$= e^{3 + O\left(\frac{1}{x}\right)} \longrightarrow e^3, \quad x \to \infty$$

b)
$$|xy|^{x^4+y^4} = \{\text{polära koordinater}\} =$$
$$= \left|\frac{1}{2}r^2 \sin(2\theta)\right|^{r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta)} \leq$$
$$\leq (r^2)^{r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta)}$$

Men $\cos^4\theta + \sin^4\theta = \cos^4\theta + (1 - \cos^2\theta)^2 =$
$$= 1 - 2\cos^2\theta + 2\cos^4\theta =$$
$$= 2\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

Alltså
$$|xy|^{x^4+y^4} \leq (r^2)^{\frac{1}{2}r^4} = r^{r^4} = e^{r^4 \ln r} \longrightarrow 1, \quad r \to 0$$

Med $f(x,y) = |xy|^{x^4+y^4}$

$f(0,y) = f(x,0) = 0$

$x > 0$: $f(x,x) = x^{2(x^4+x^4)} = e^{4x^4 \ln x^2} \longrightarrow 1, \quad x \to 0.$

Gränsvärdet existerar ej.

④ Potensserie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}} x^{n}$

Konv radie R:

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}\ln n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}(\ln n)^2} = 1$$

$x=-1$: Leibniz ger konv då

$$\frac{1}{n^{\ln n}} \searrow 0, \quad n\to\infty$$

$x=1$: konv då $\left|\frac{1}{n^{\ln n}}\right| \le \frac{1}{n^2}$ då $n \geq e^2$.

⑤ se förra tentan

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n}-1}$

$-1<x<1$: Konvergent då $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ konvergerar och $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0$

$x>1$: Konvergent då $x^{2n}-1 > \frac{1}{2}x^{2n}$ för x tillr. stort och

$$\sum_{x\ \text{stort}} \frac{x^n}{x^{2n}-1} \le \sum_{x\ \text{stort}} 2\frac{x^n}{x^{2n}} = 2\sum_{x\ \text{stort}} x^{-n}$$

$x<-1$. Analogt

Svar: Konvergent för $x \neq \pm 1$.