Hjälpmedel: Formelblad bifogas tesen, ej räknedosa

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Telefon: Axel Målqvist, 0739-779268
2005–04–02 kl. 08.30–12.30

Tentamen i TMA975 Reell matematisk analys F, del A

Betygsgränser: 3=24p, 4=36p, 5=48p. Lärares närvaro i tentamenssalen: ca 9.30 och 11.30.
OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = x^2y - 3x^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 24xe^{-x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2. \end{cases}$$

(7p)

3. Avgör om gränsvärdena existerar[1] och beräkna i så fall dem:

   a) $\lim_{n\to\infty} \Pi_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$, (4p)

   b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}$. (4p)

4. a) Avgör för vilka reella tal p som serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin(\frac{1}{n})$$

   konvergerar. (4p)

   b) Avgör om

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$$

   konvergerar. (3p)

5. Bestäm den allmänna potensserie som satisfierar

$$y'' - xy' + 2y = 0.$$

   Bestäm också potensseriens konvergensradie. (8p)

6. Låt f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[0, 1]$. Avgör om

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\, dx$$

   existerar och beräkna i så fall gränsvärdet. (8p)

7. Formulera och bevisa satsen om potensseriers konvergens. (7p)

8. Formulera l'Hospitals sats. Bevisa något av fallen. (8p)

PK

[1] Tolkning av produktsymbolen: $\Pi_{n=1}^{N} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_N$

Lösningsförslag till TMA975, del A, 2005-04-02

1. $\begin{cases} y' = x^2 y - 3x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ är en separabel differentialekvation. Då $y \equiv 3$ ej satisfierar $y(0) = 1$ gäller

$$\int_1^y \frac{dy}{y-3} - \int_0^x x^2 dx$$

dvs $\quad \ln|y-3| - \ln|1-3| = \frac{1}{3}x^3$

dvs $\quad |y-3| = e^{\ln 2 + \frac{1}{3}x^3} = 2e^{\frac{1}{3}x^3}$

dvs $\quad y = 3 - 2e^{\frac{1}{3}x^3}$ då $y(0) = 1$.

Svar: $y(x) = 3 - 2^{\frac{1}{3}x^3}$.

Kommentar: Problem kan naturligtvis också lösas med metoden med integrerande faktor.

2. $\begin{cases} y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 24xe^{-x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \end{cases}$

Karakteristiska polynomet: $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r-1)(r-2)(r-3)$. Homogenlösningen ges då av $y_h(x) = Ae^x + Be^{2x} + Ce^{3x}$. Ansätt en partikulärlösning $y_p(x) = (ax+b)e^{-x}$.

Förskjutningsregeln tillämpad på

$$(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)[(ax+b)e^{-x}] = 24xe^{-x}$$

ger

$$((D-1)^3 - 6(D-1)^2 + 11(D-1) - 6)[ax+b] = 24x$$

dvs

$$(D^3 - 9D^2 + 26D - 24)[ax+b] = 24x$$

dvs

$$-24ax + 26a - 24b = 24x$$

Alltså $a = -1, b = -\frac{13}{12}$.

Den allmänna lösningen till differentialekvationen ges av

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x} + Ce^{3x} - xe^{-x} - \frac{13}{12}e^{-x}$$

Villkoren $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2$ bestämmer A, B och C

$$\begin{cases} A + B + C - \frac{13}{12} = 0 \\ A + 2B + 3C - \frac{11}{12} = 0 \\ A + 4B + 9C - \frac{13}{12} = 0 \end{cases}$$

dvs $A = \frac{3}{2}, B = -\frac{2}{3}, C = \frac{1}{4}$.

Svar: $y(x) = \frac{3}{2}e^{x} - \frac{2}{3}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{3x} - xe^{-x} + \frac{13}{12}e^{-x}$.

3. (a)

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+1)}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n+2)} =$$

$$= \frac{2 \cdot (n+1)}{(n+2)} = 2 \cdot \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \to 2 \quad n \to \infty.$$

Svar: 2

(b) $(x^2+y^2)^{x^2y^2} = \{\text{polära koordinater } x = r\cos\theta, y = r\sin\theta\} = e^{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\ln(r^2)}$ där $|r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\ln(r^2)| \leq 2r^4|\ln r| \to 0, r \to 0$.
Alltså

$$(x^2+y^2)^{x^2y^2} \to 1 \quad \text{då} \quad (x,y) \to (0,\infty).$$

Svar: 1

4. (a) $\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}B(\frac{1}{n})$ där funktionen B är begränsad i en omgivning av 0. Då $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ konvergerar om och endast om $p > 1$ gäller

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sin(\frac{1}{n})$ konvergerar för $p > 0$ då $|\frac{1}{n^p}\sin(\frac{1}{n}| \leq \frac{C}{n^{p+1}}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ för något $C > 0$ enligt jämförelsesatsen.
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sin(\frac{1}{n})$ divergerar för $p \leq 0$ ty för $p \leq -1$ gäller $\frac{1}{n^p}\sin(\frac{1}{n}) \not\to 0$ då $n \to \infty$ och för $p \in]-1, 0]$ gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sin(\frac{1}{n}) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}}_{\text{divergent}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+3}} \cdot B(\frac{1}{n})}_{\text{konvergent}}$$

Svar: Serien konvergerar om och endast om $p > 0$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ är en alternerande serie och funktionen $f(x) = \sqrt[x]{x} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$ är avtagande för $x > e$ då $f'(x) = \sqrt[x]{x} \cdot (\frac{1+\ln x}{x^2}) < 0$ för $x > e$. Men $f(x) \to 1$ då $x \to \infty$ och det är ett nödvändigt villkor för att en serie ska konvergera att termerna gåt mot 0. Alltså divergerar serien.

Svar: Serien divergerar.

5. Betrakta $y'' - xy' + 2y = 0$. Ansätt potensserier $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$. För x i det inre av konvergensintervallet gäller $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$ och $y^k(x) = \sum_{r=2}^{\infty}a_nn \cdot (n-1)x^{n-2}$. Insättning i differentialekvationen och indexbyte

ger $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$.
dvs

$$\begin{cases} 2a_2 + 2a_0 = 0 \\ a_{n+2} \cdot (n+2)(n+1) - na_n + 2a_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Vi har

$$\begin{cases} a_2 = -a_0 \\ a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n(n-2) = 0, \quad n = 1, 2, 3 \end{cases}$$

För jämn index gäller

$$\begin{cases} a_2 = -a_0 \\ a_4 = a_6 = \ldots = a_{2k} = \ldots = 0 \end{cases}$$

För udda index gäller

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{(2k-3)}{(2k+1)\cdot 2k} a_{2k-1} = \\ &= \frac{(2k-3)\cdot(2k-5)}{(2k+1)\cdot 2k \cdot (2k-1)\cdot(2k-2)} a_{2k-3} = \\ &= -\frac{(2k-3)!!}{(2k+1)!} a_1, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Detta ger

$$y(x) = a_0(1-x^2) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k+1)!} a_1 x^{2k+1}$$

För att bestämma konvergensradien skriv

$$y(x) = a_0(1-x^2) - a_1 x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k+1)!} x^{2k}$$

där vi sätter $h(x^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k+1)!} x^{2k}$. Som funktion av $t = x^2$ konvergerar $h(t)$ för $|t| < R$ där $\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+3)!} / \frac{(2k-3)!!}{(2k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k-1}{(2k+3)(2k+1)} = 0$ dvs $R = \infty$. Alltså $y(x)$ konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$.

Svar: $y(x) = a_0(1-x^2) - a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ och serien konvergerar för alla x, dvs konvergensradie R är "$R = \infty$".

6. Vi noterar att för en kontinuerlig funktion f på $[0,1]$ med $f(1) \neq 0$ gäller inte att $nx^n f(x)$ konvergerar likformigt på $[0,1]$ då $n \to \infty$ eftersom

$$nx^n f(x) \to \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ \pm\infty & x = 1 \qquad \text{då } f(1) \neq 0 \end{cases}$$

och gränsfunktionen inte är kontinuerlig.

Vi noterar vidare att

$$n\int_0^1 x^n f(x)dx = n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))dx + n\int_0^1 x^n f(1)dx,$$

där

- $n\int_0^1 x^n f(1)dx = \dfrac{n}{n+1}f(1) \to f(1),\ n\to\infty$

  och

(∗) $$n\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|dx \to 0, \quad n\to\infty$$

  För att visa (∗), sätt $M = \max_{x\in[0,1]}|f(x)-f(0)|$.

  För varje $1>\delta>0$ gäller

- $$n\int_0^{1-\delta} x^n|f(x)-f(1)|dx \le \frac{n}{n+1}(1-\delta)^n M \to 0, \quad n\to\infty.$$

Fixera $\epsilon>0$. Välj $\delta>0$ så att $|f(x)-f(1)|<\epsilon$ för $|x-1|<\delta$. För detta $\delta>0$ gäller

$$n\int_{1-\delta}^1 x^n|f(x)-f(1)|dx < \epsilon\frac{n}{n+1}(1-(1-\delta)^{n+1}) < \epsilon \quad \text{alla } n.$$

Alltså, för varje $\epsilon>0$ existerar N så att

$$n\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|dx < \epsilon \quad \text{för alla} \quad n\ge N.$$

Alltså

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|dx = 0.$$

Svar: $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1).$