Matematik, Chalmers/GU
Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del A**
Tid: 11/12 2004, kl 14.00 – 18.00
Hjälpmedel: Formelblad bifogas tesen, ej räknedosa
Telefonvakt: Leonid Gershuni 073- 977 9268

---

1. Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = n^2 \\ y_0 = 1,\ y_1 = 2 \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \cos^2 x \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

(7p)

3. Avgör om gränsvärdena existerar och i så fall beräkna dem

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3 \cos x}$,

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 - y}$.

(4p+4p)

4. (Denna uppgift ska **endast** räknas av studenter i högre årskurs som inte gjort MATLAB-tentan 2004-12-04.) Bestäm en icke-trivial lösning ($y(x) \not\equiv 0$) till $x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$ på formen $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ samt beräkna konvergensradien för denna.

(8p)

5. Konvergerar eller divergerar

   (a) $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{\tan\frac{1}{n}}{\ln(n+1)}$,

   (b) $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$?

(4p+4p)

6. Låt f vara en kontinuerlig reell funktion som uppfyller

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

där C är en positiv konstant. Definiera[1] F på $\mathbb{R}$ som

$$F(x) = \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n).$$

Visa att

(a) F är kontinuerlig och periodisk med perioden 1, dvs. $F(x+1) = F(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

(b) för varje kontinuerlig periodisk funktion $G(x)$ med perioden 1 gäller

$$\int_0^1 F(x)G(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)\,dx.$$

(7p)

7. Formulera och bevisa Leibniz' konvergenskriterium för alternerande serier.

(8p)

8. Definiera begreppet likformig konvergens på en mängd M för en funktionsföljd, samt formulera och bevisa satsen om gränsövergång under integraltecknet för en likformigt konvergent funktionsföljd.

(7p)

[1] $F(x) = \lim_{N\to\infty} \Sigma_{n=-N}^{N} f(x+n)$

Lösningsförslag till TMA975 del A, 2004-12-11

1. Lös
$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = n^2, \ n = 0, 1, 2, \ldots & (*) \\ y_0 = 1, y_1 = 2 \end{cases}$$

Lösning:
Karakteristiska polynomet: $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$ ger homogenlösningen $y_m^{(h)} = A + B2^m$.

För partikulärlösning ansätt $y_n^{(p)} = n(C + Dn + En^2)$, då 1 är ett nollställe till det karakteristiska polynomet. Insättning i $(*)$ och identifiering av koefficienterna ger

$$\begin{aligned} n^0 : &\quad -C + D + 5E = 0 \\ n^1 : &\quad -2D + 3E = 0 \\ n^2 : &\quad -3E = 1 \end{aligned}$$

Alltså är
$$\begin{cases} C = -\frac{13}{6} \\ D = -\frac{1}{2} \\ E = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Lösningen till $(*)$ ges av

$$y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = A + B2^n - \frac{13}{6}n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{3}n^3, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Koefficienterna A och B bestäms från begynnelsevillkoren $y_0 = 1, y_1 = 2$ vilket ger $A = -3, B = 4$.

Svar: $y_n = -3 + 4 \cdot 2^n - \frac{13}{6}n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{3}n^3, \ n = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Lös
$$\begin{cases} y'' - y' + y = \cos^2 x \\ y(0) = 1, y(0) = 2 \end{cases}$$

Lösning:
Karakterisisk polynomet: $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$ ger homogenlösningen $y_h(x) = (A + Bx)e^x$. Ansätt partikulärlösning $\tilde{y}_p(x) = C + De^{i2x}$ då $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$.

Detta ger

$$\begin{cases} C = \frac{1}{2} \\ (-4 - 2 \cdot 2i + 1)De^{i2x} = \frac{1}{2}e^{i2x} \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} C = \frac{1}{2} \\ D = -\frac{3}{50} + i\frac{2}{25} \end{cases}$$

Vi får partikulärlösningen

$$y_p(x) = \frac{1}{2} + \text{Re}\,((-\frac{3}{50} + i\frac{2}{25})e^{i2x}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{50}\cos 2x - \frac{2}{25}\sin 2x.$$

Lösningen till differentialekvationen ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A + Bx)e^x + \frac{1}{2} - \frac{3}{50}\cos 2x - \frac{2}{25}\sin 2x$$

Konstanterna A och B bestäms av begynnelsevillkoren $y(0) = 1, y'(0) = 2$. Vi får

$$A = \frac{14}{25}, \quad B = \frac{40}{25}$$

Svar: $y(x) = (\frac{14}{25} + \frac{40}{25}x)e^x + \frac{1}{2} - \frac{3}{50}\cos 2x - \frac{2}{25}\sin 2x$.

3. (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - \sin x}{x^3 \cos x}$

   Lösning:

   MacLaurinutveckling av nämnare och täljare ger

$$\frac{\arctan x - \sin x}{x^3 \cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3} - (x - \frac{x^3}{6}) + O(x^5)}{x^3 + O(x^5)} = \frac{-\frac{1}{6} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \to -\frac{1}{6}, \quad x \to 0.$$

   Svar: $-\frac{1}{6}$.

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2 - y}$.

   Lösning:

   Sätt $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2-y}$. Vi får

$$\begin{aligned} &f(x,0) = x \to 0, \quad x \to 0 \\ &f(x, x^2 - x^3) = 1 \to 1, \quad x \to 0 \end{aligned}$$

   Svar: gränsvärdet existerar ej.

4. Lös $x^2y^4 + xy'' + (x^2 - 1)y = 0$ med potensserieansats.

   Lösning:

   Sätt $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. För $|x| < R$, där R = konvergensradien för potensserien kan denna deriveras termvis upprepade gånger. Detta ger

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + (x^2 - 1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

   Detta ger (efter lite byte av index)

$$\begin{cases} a_n(n(n-1) + n - 1) + a_{n-2} = 0 & n = 2, 3, \ldots \\ a_1 - a_1 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

dvs

$$a_{2k} = 0, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$a_{2k+1} = (-1)^k (\frac{1}{2})^{2k} \frac{1}{k!(k+1)!} a_1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Alltså

$$y(x) = a_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-19^k (\frac{1}{2})^{2k} \frac{1}{k!(k+1)!} x^{2k+1}$$

Denna potensserie har konvergensradien

$$R = 1/(\lim_{k\to\infty} \frac{a_{2k+3}}{a_{2k+1}})^{\frac{1}{2}} = \infty,$$

dvs, konvergensområdet är $\mathbb{R}$.

Svar: $a_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\frac{1}{2})^{1k} \frac{1}{k!(k+1)!} x^{2k+1}$ med konvergensområdet $\mathbb{R}$.

5. Konvergerar eller divergerar

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tan \frac{1}{n}}{\ln(n+1)}$.

Lösning:
Jämför med $\frac{1}{n \ln n}$, där vi vet att $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergerar.

$$\frac{\frac{\tan \frac{1}{n}}{\ln(n+1)}}{\frac{1}{n \ln n}} = n \tan \frac{1}{n} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)} =$$
$$= \underbrace{n(\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}))}_{\longrightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}}}_{\longrightarrow 1} \longrightarrow 1, \quad n \to \infty$$

Jämföreslsekriteriet på gränsvärdesform ger att
Svar: serien divergerar
Kommentar: Observera att en utveckling av logaritmfunktionen a la

$$\ln(1+n) = n + O(n^2)$$

ger ingen information då resttermen dominerar.

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

Lösning:
Jämför även här med $\frac{1}{n \ln n}$. Vi har

$$\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n \ln n}} = \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{n}}} \to +\infty, n \to \infty.$$

Jämförelsekriteriet ger ($\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{n \ln n}$ för stora n) att

Svar serien divergerar

Kommentar: Man kan **inte** utifrån att $1 + \frac{1}{n} > 1$ dra slutsatsen att $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ konvergerar!!

6. $f \in C(R)$ uppfyller $|f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Sätt

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n),\ n \in \mathbb{R}.$$

Vi ska visa:

(a) $F \in C(\mathbb{R})$ och $F(x+1) = F(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$

(b) $\int_0^1 F(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx$ för alla $G \in C(\mathbb{R})$ där $G(x+1) = G(x)$ alla $x \in \mathbb{R}$.

Lösning:

Fixera kompakt intervall $[-R, R]$ där $R > 1$. Då gäller att $|f(x+n)| \leq \frac{1}{1+(\frac{n}{2})^2}$ alla $x \in [-R, R]$ för alla $|n| \geq 2R$. Weierstrass M-test ger att $\sum_{|n|\geq 2R} f(x+n)$ konvergerar likformigt på $[-R, R]$ och så också hela $F(x)$ (Den punktvisa konvergensen klar direkt via jämförelse med serien $\Sigma \frac{1}{n^2}$). Då alla translationer $f(x+n)$ av $f(x)$ är kontinuerliga och serien konvergerar likformigt är F kontinerlig på $[-R, R]$. $F(x+1) = F(x)$ följer lätt. Vidare

$$\int_0^1 F(x)G(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)G(x)dx = \{\text{gränsövergång}$$

under $\int$-tecknet med likformig konvergens$\}$ =

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n)G(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)G(x-n)dx =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx.$$