Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del A** den 20/8 2004, kl. 8.45–12.45.

Hjälpmedel: Formelblad på baksidan, ej räknedosa.
Telefon: Erik Broman, tel. 073-977 92 68.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Lös differensekvationen $y_{n+2} + 2y_{n+1} + 4y_n = n^2 + 1$. (8p)

2. Lös differentialekvationen $(x^2+1)y' + x(y^2+2y) = 0$. (7p)

3. Konvergerar eller divergerar

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[\ln(n^2+2) - \ln(n^2+1)]\sqrt{n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{2n}}{(3n)!}$? (8p)

4. Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^{x^2}-e^{-x^2})\sqrt{1+x^2} - x^2(e^x+e^{-x})}{2\ln(1+x^4) - \ln(1+2x^4)}\right).$$ (8p)

5. Beräkna summan
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{-2n}}{(2n+1)(2n+2)}.$$ (7p)

6. Undersök funktionsföljden $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}e^{\frac{nx}{n+x}}$ m.a.p. punktvis resp. likformig konvergens då $n\to\infty$ för $x\in[0,1]$. Beräkna $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$. (7p)

7. Formulera och bevisa Maclaurins formel med Lagranges restterm. (7p)

8. Formulera och bevisa lösningsformeln för en linjär homogen differentialekvation av ordning två. (8p)

KH

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{1+\theta x}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{1+(\theta x)^2}$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \ \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del A, för F1 den 20/8 2004

1. Lös $y_{n+2}+2y_{n+1}+4y_n=n^2+1$. Karakteristiska ekvationen är $r^2+2r+4=0$ med lösning $r=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm i\sqrt{3}=2e^{\pm i2\pi/3}$. Allmänna lösningen till homogena ekvationen är $y_n^{(h)}=2^n(C_1\cos\frac{2\pi n}{3}+C_2\sin\frac{2\pi n}{3})$. Ansätt en partikulärlösning $y_n^{(p)}=an^2+bn+c$ till den givna ekvationen. Insättning ger

$$\begin{aligned}&a(n+2)^2+b(n+2)+c+2a(n+1)^2+2b(n+1)+2c+4an^2+4bn+4c\\&=7an^2+(8a+7b)n+6a+4b+7c=n^2+1.\end{aligned}$$

Då fås ekvationerna $7a=1$, $8a+7b=0$, $6a+4b+7c=1$ med lösning $a=\frac{1}{7}$, $b=-\frac{8}{49}$, $c=\frac{39}{343}$. Ekvationens allmänna lösning är $y_n=y_n^{(h)}+y_n^{(p)}=\underline{2^n(C_1\cos\frac{2\pi n}{3}+C_2\sin\frac{2\pi n}{3})+\frac{1}{7}n^2-\frac{8}{49}n+\frac{39}{343}}$.

---

2. Lös $(x^2+1)y'+x(y^2+2y)=0$. Ekvationen kan skrivas $\frac{dy}{y^2+2y}=-\frac{x\,dx}{x^2+1}$, om $y\neq 0$ och $y\neq -2$, och är alltså separabel. Lösningen ges av $\int\frac{dy}{y^2+2y}=-\int\frac{x\,dx}{x^2+1}$. Vi har $\int\frac{dy}{y^2+2y}=\int\frac{dy}{y(y+2)}=\int(\frac{1}{2}\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\frac{1}{y+2})\,dy=\frac{1}{2}\ln|y|-\frac{1}{2}\ln|y+2|=-\frac{1}{2}\ln|\frac{y+2}{y}|$, och $\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$, varför $\ln|\frac{y+2}{y}|=\ln(x^2+1)+C_1=\ln[e^{C_1}(x^2+1)]$, och $|\frac{y+2}{y}|=e^{C_1}(x^2+1)$, $\frac{y+2}{y}=1+\frac{2}{y}=\pm e^{C_1}(x^2+1)=C(x^2+1)$, där C är en godtycklig konstant, $C\neq 0$. Alltså är $\frac{2}{y}=C(x^2+1)-1$, $y=\frac{2}{C(x^2+1)-1}=\underline{\frac{2}{Cx^2+C-1}}$. Vi kan här även tillåta $C=0$, vilket ger lösningen $y=-2$. Dessutom är $\underline{y=0}$ en lösning, som inte fås för någon konstant C. För $C\leq 0$ och $C>1$ existerar lösningen för alla x. För $0<C\leq 1$ existerar den på intervall där $x\neq\pm\sqrt{\frac{1-C}{C}}$.

---

3. a) Vi har serien $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, där $a_n=[\ln(n^2+2)-\ln(n^2+1)]\sqrt{n}=\sqrt{n}\ln\frac{n^2+2}{n^2+1}=\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n^2+1})=\sqrt{n}[\frac{1}{n^2+1}+O(\frac{1}{n^4})]$. Jämför med $b_n=\frac{1}{n^{3/2}}$ Då är $\frac{a_n}{b_n}=\frac{n^2}{n^2+1}+O(\frac{1}{n^2})\to 1>0$, då $n\to\infty$. Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ är konvergent, så är också $\underline{\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{ konvergent}}$.

b) Vi har serien $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, där $a_n=\frac{n!n^{2n}}{(3n)!}$. Det gäller att

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{(n+1)!(n+1)^{2n+2}(3n)!}{(3n+3)!n!n^{2n}}=\frac{(n+1)(n+1)^2(n+1)^{2n}}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)n^{2n}}\\&=\frac{(1+\frac{1}{n})^2}{3(3+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})}(1+\frac{1}{n})^{2n}\to\frac{1}{27}e^2<1,\text{ då }n\to\infty.\end{aligned}$$

Enligt kvotkriteriet är då $\underline{\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{ konvergent}}$.

---

4. Använd Maclaurinutveckling. Se på nämnaren först. $\ln(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+O(t^3)$ då $t\to 0$, varför

$$2\ln(1+x^4)-\ln(1+2x^4)=2[x^4-\frac{1}{2}x^8+O(x^{12})]-[2x^4-\frac{1}{2}4x^8+O(x^{12})]=x^8+O(x^{12}).$$

Utveckla täljaren t.o.m. x^8-termer. Utvecklingarna $e^t=1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4+\frac{1}{120}t^5+\frac{1}{720}t^6+\frac{1}{5040}t^7+O(t^8)$ och $\sqrt{1+t}=(1+t)^{1/2}=1+\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}t^2+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\cdot 3}t^3+O(t^4)=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{16}t^3+O(t^4)$ då $t\to 0$ ger

$$\begin{aligned}(e^{x^2}-e^{-x^2})\sqrt{1+x^2}-x^2(e^x+e^{-x})&=[2x^2+\frac{1}{3}x^6+O(x^{10})][1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6+O(x^8)]\\&-x^2[2+x^2+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{360}x^6+O(x^8)]=\frac{13}{45}x^8+O(x^{10})\text{ då }x\to 0.\end{aligned}$$

Alltså gäller att

$$\frac{(e^{x^2}-e^{-x^2})\sqrt{1+x^2}-x^2(e^x+e^{-x})}{2\ln(1+x^4)-\ln(1+2x^4)}=\frac{\frac{13}{45}x^8+O(x^{10})}{x^8+O(x^{12})}=\frac{\frac{13}{45}+O(x^2)}{1+O(x^4)}\to\underline{\frac{13}{45}}\text{ då }x\to 0.$$

---

5. Studera funktionen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$. Eftersom den formellt två gånger deriverade serien är $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, som har konvergensradien 1, så har serien för $f(x)$ också konvergensradien 1, och det gäller att $f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$ för $|x| < 1$. Alltså är $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x + C_1$, och då $f'(0) = 0$, är $C_1 = 0$. Ytterligare en integrering ger $f(x) = \int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2}\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_2$. Eftersom $f(0) = 0$, är $C_2 = 0$. Den sökta summan är $9f(\frac{1}{3}) = 9[\frac{1}{3}\arctan\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{9})] = \underline{3\arctan\frac{1}{3} - \frac{9}{2}\ln\frac{10}{9}}$.

---

6. För fixt $x \in [0,1]$ gäller att $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}e^{\frac{nx}{n+x}} \to xe^x$ då $n \to \infty$. Undersök $|f_n(x) - xe^x|$. Man kan t.ex. utnyttja att $f_n(x) = g(\frac{nx}{n+x})$ för funktionen $g(t) = te^t$. Då är $|f_n(x) - xe^x| = |g(\frac{nx}{n+x}) - g(x)| = |(\frac{nx}{n+x} - x)g'(\xi)|$ för något ξ (beroende på n och x) mellan $\frac{nx}{n+x}$ och x, speciellt mellan 0 och 1. Nu är $\frac{nx}{n+x} - x = -\frac{x^2}{n+x}$och $g'(t) = (t+1)e^t$. Alltså är (för $0 \le x \le 1$ och $n \ge 1$)

$$|f_n(x) - xe^x| = \frac{x^2}{n+x}(\xi+1)e^{\xi} \le \frac{1}{n}2e \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

Alltså konvergerar $f_n(x)$ likformigt mot xe^x på $[0,1]$ då $n \to \infty$. P.g.a. den likformiga konvergensen gäller att

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - (e-1) = \underline{1}.$$
