

Hjälpmedel: Formelblad på baksidan, ej räknedosor.

Telefon: Erik Broman, tel. 0739-77 92 68.

Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Lös differentialekvationerna

a) $(x + 1)y' + 2y = x^2$, $y(0) = 1$, b) $(x + 1)y' = y^2$, $y(0) = 1$. (8p)

2. Undersök för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2n^2 - 1}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(1 + n^2)}$. (8p)

3. Lös differentialekvationen

$$y'' + 2y' - 3y = (x + 1)e^x. \quad (7p)$$

4. Bestäm konstanten a så att följande gränsvärde existerar,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a \ln(1 + 2x)}{x \tan x} \right).$$

Beräkna sedan gränsvärdet. (7p)

5. Definiera rekursivt en talföljd x_n genom

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n + 1}.$$

Undersök om x_n konvergerar då $n \rightarrow \infty$. Beräkna i så fall gränsvärdet. (8p)

6. Finn lösningar till $2xy'' - y = 0$ i form av en potensserie $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Vad är potensseriens konvergensradie? (7p)

7. Betrakta differensekvationen $y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = d_n$. Låt $y_n^{(p)}$ vara en partikulärlösning till denna ekvation och låt $y_n^{(h)}$ vara allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation (med $d_n = 0$). Visa att $y_n = y_n^{(p)} + y_n^{(h)}$ är allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen. (8p)

8. Antag att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerar i punkten $x_0 \neq 0$. Visa att serien då är absolutkonvergent för alla x sådana att $|x| < |x_0|$. (7p)

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2 + a} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2 - a} dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x - \sqrt{a}}{x + \sqrt{a}} \right|, \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right|, \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{1 + \theta x}$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \cdot \frac{1}{(1 + \theta x)^{n+1-\alpha}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta x$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{1 + (\theta x)^2}$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \epsilon_n), \quad \text{där } \epsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys F, del A den 17/4 2004

1. a) Skriv ekvationen som $y' + \frac{2}{x+1}y = \frac{x^2}{x+1}x$. Den är linjär med en integrerande faktor $e^{\int \frac{2}{x+1} dx} = e^{2 \ln(x+1)} = (x+1)^2$. Multiplicera alltså ekvationen med $(x+1)^2$. Då fås $\frac{d}{dx}((x+1)^2 y) = (x+1)^2 y' + 2(x+1)y = x^2(x+1)$, $(x+1)^2 y = \int (x^3 + x^2) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$. Villkoret $y(0) = 1$ ger $1 = C$, och $y = \frac{\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 1}{(x+1)^2}$.

b) Ekvationen $(x+1)y' = y^2$ är separabel. Om $y \neq 0$ och $x \neq -1$ kan ekvationen skrivas $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x+1}$, och lösningen ges av $\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x+1}$, $-\frac{1}{y} = \ln|x+1| + C$. Villkoret $y(0) = 1$ ger $C = -1$, och $y = \frac{1}{1 - \ln(x+1)}$.

2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2n^2-1}$. Allmänna termen alternerar i tecken. Dess absolutbelopp är $\frac{n}{2n^2-1}$, som går avtagande mot 0 då $n \rightarrow \infty$ (för att visa avtagandet, studera funktionen $\frac{x}{2x^2-1}$ vars derivata $-\frac{2x^2+1}{(2x^2-1)^2}$ är negativ). Enligt Leibniz' kriterium är serien konvergent. Men $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2-1}$ är divergent (jämför med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$). Alltså är serien betingat konvergent.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{1}{n})$. Allmänna termen är $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{\sqrt{n}} [\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})]$. Jämför med $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$. Då är $\frac{a_n}{b_n} = 1 + O(\frac{1}{n}) \rightarrow 1 > 0$ då $n \rightarrow \infty$. Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent, så är också $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (absolut)konvergent.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(1+n^2)}$. För $n \geq 2$ är $\frac{\ln(1+n^2)}{\ln n} \leq \frac{\ln(2n^2)}{\ln n} = \frac{\ln 2}{\ln n} + \frac{2 \ln n}{\ln n} \leq 3$ och $\frac{1}{n \ln(1+n^2)} \geq \frac{1}{3 n \ln n}$. Eftersom $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ är divergent (välkänt; om inte, använd integralkriteriet och det faktum att $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln \ln x]_2^{\infty} = \infty$), varför den givna serien är divergent.

3. 1. Karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r - 3 = 0$ med rötter $r_1 = 1$, $r_2 = -3$. Allmänna lösningen till homogena ekvationen är $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$.

2. Då 1 är en enkelrot till karakteristiska ekvationen, ansätts en partikulärlösning $y_p = x(ax + b)e^x = (ax^2 + bx)e^x$. Då är

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' - 3y_p &= 2ae^x + 2(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x + 2((2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x) - 3(ax^2 + bx)e^x \\ &= 2(4ax + a + 2b)e^x = (x+1)e^x. \end{aligned}$$

Alltså är $8a = 1$ och $2(a + 2b) = 1$, vilket ger $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{3}{16}$.

3. Allmänna lösningen till den givna ekvationen är $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + (\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{16}x)e^x$.

4.

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x - 1} - \frac{a \ln(1 + 2x)}{x \tan x} &= \frac{x \tan x - a(e^x - 1) \ln(1 + 2x)}{(e^x - 1)x \tan x} \\ &= \frac{x(x + O(x^3)) - a(x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3))(2x - \frac{1}{2}4x^2 + O(x^3))}{(x + O(x^2))x(x + O(x^3))} \\ &= \frac{x^2 + O(x^4) - a(2x^2 - 2x^3 + x^3 + O(x^4))}{x^3 + O(x^4)} \\ &= \frac{(1 - 2a)x^2 + ax^3 + O(x^4)}{x^3 + O(x^4)}. \end{aligned}$$

För att gränsvärde då $x \rightarrow 0$ skall kunna existera måste $a = \frac{1}{2}$. I så fall blir uttrycket

$$\frac{\frac{1}{2}x^3 + O(x^4)}{x^3 + O(x^4)} = \frac{\frac{1}{2} + O(x)}{1 + O(x)} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{då } x \rightarrow 0.$$

5. *Metod 1.* Visa att talföljden är växande och uppåt begränsad. Om så är fallet, finns ett gränsvärde α , som måste satisfiera $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha + 1}$, $\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\alpha + 1}$, $\alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0$, $\alpha = 2 \pm \sqrt{8}$. Men $\alpha > 0$, så $\alpha = 2 + 2\sqrt{2}$. För kommande bruk noterar vi att $x^2 - 4x - 4 = (x - \alpha)(x - 2 + 2\sqrt{2})$.

Det gäller att $x_0 = 1 < \alpha$. Om $0 < x_n < \alpha$ för något n , följer att $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n + 1} < \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha + 1} = \alpha$ och även $x_{n+1} > 0$. Alltså är $0 < x_n < \alpha$ för alla n . Vidare är

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= -\frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n + 1} = \frac{x_n + 1 - \frac{x_n^2}{4}}{\frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n + 1}} = -\frac{1}{4} \frac{x_n^2 - 4x_n - 4}{\frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n + 1}} \\ &= -\frac{1}{4} \frac{(x_n - \alpha)(x_n - 2 + 2\sqrt{2})}{\frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n + 1}} > 0, \end{aligned}$$

ty $0 < x_n < \alpha$. Alltså är följderna växande och uppåt begränsad, och enligt ovan vet vi då att $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 + 2\sqrt{2}$.

Metod 2. Använd satsen om fixpunktsiteration. Vi har $x_{n+1} = f(x_n)$, där $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{x+1}$. Låt I vara intervallet $[1, 8]$. $x_0 \in I$. Om $x \in I$ så följer $f(x) \geq \frac{1}{2} + \sqrt{2} > 1$, och $f(x) \leq 4 + \sqrt{9} < 8$, dvs. $f(x) \in I$. Vidare är $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, och för $x \in I$ är $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$. Enligt en sats konvergerar då x_n mot den entydigt bestämda roten α till ekvationen $x = f(x)$ i I . Som ovan fås $\alpha = 2 + 2\sqrt{2}$.

6. Ansätt en lösning $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Om konvergenstradien R är positiv, gäller för $|x| < R$

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1}, \\ 2xy'' - y &= \sum_{n=0}^{\infty} 2n(n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [2n(n+1) a_{n+1} - a_n] x^n = 0. \end{aligned}$$

Alltså är $2n(n+1)a_{n+1} - a_n = 0$ för alla n . $n = 0$ ger $a_0 = 0$, och för $n > 0$ är $a_{n+1} = \frac{1}{2n(n+1)} a_n$. Vi får

$$a_2 = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2} a_1, \quad a_3 = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3} a_2 = \frac{1}{2^2 (1 \cdot 2) 2^3} a_1, \quad a_4 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} a_3 = \frac{1}{2^3 (1 \cdot 2 \cdot 3) 2^4} a_1.$$

Allmänt fås $a_n = \frac{1}{2^{n-1} [(n-1)!]^2 n} a_1$. Eftersom $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2n(n+1)} \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$, är $R = \infty$. Alltså ger

$$y = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1} [(n-1)!]^2 n} x^n$$

en lösning till differentialekvationen för alla x .