

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del A** den 13/12 2003, kl. 14.15–18.15.

Hjälpmedel: Formelblad på baksidan, ej räknedosa.

Telefon: Axel Mälqvist, tel. 0740-459022.

Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

Uppgift 4 skall ej räknas av studenter i F1 eller studenter som har gjort MATLAB-tentan 2003-12-06.

1. Lös differensekvationen

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = n^2. \quad (7p)$$

2. Undersök om följande gränsvärden existerar. Beräkna dem i så fall.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin^2 x}{1 - \cos(x^2)}, \quad \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{xy^2 + x^3}. \quad (4p \text{ per del})$$

3. Lös differentialekvationen

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = x + \cos^2 x. \quad (8p)$$

4. (Denna uppgift räknas endast av studenter i högre årskurs som inte har gjort MATLAB-tentan 2003-12-06.)

Visa att funktionen $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(k+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2}$ är en lösning till differentialekvationen $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$. För vilka x gäller lösningen? (8p)

5. För vilka reella x konvergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n? \quad (7p)$$

6. Studera funktionen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x+n)^2 e^{-(x+n)}$.

a) Visa att serien konvergerar likformigt på $[0, 1]$.

b) Beräkna $\int_0^1 f(x) dx$. (7p)

7. Formulera och bevisa satsen om Maclaurinutvecklingens entydighet. (7p)

8. Formulera och bevisa jämförelsekriteriet för positiva serier. (8p)

KH

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2 + a} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2 - a} dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x - \sqrt{a}}{x + \sqrt{a}} \right|, \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right|, \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{1 + \theta x}$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \cdot \frac{1}{(1 + \theta x)^{n+1-\alpha}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta x$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{1 + (\theta x)^2}$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \epsilon_n), \quad \text{där } \epsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys F, del A den 13/12 2003

1. Karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r + 1 = 0$ med lösning $r_{1,2} = -1$. Därför är homogenlösningen $y_n^{(h)} = (C_1 + C_2n)(-1)^n$. Eftersom 1 inte är en karakteristisk rot, ansätts en partikulärlösning $y_n^{(p)} = an^2 + bn + c$. Insättning ger

$$\begin{aligned} y_{n+2}^{(p)} + 2y_{n+1}^{(p)} + y_n^{(p)} &= a(n+2)^2 + b(n+2) + c + 2[a(n+1)^2 + b(n+1) + c] + an^2 + bn + c \\ &= 4an^2 + (8a + 4b)n + 6a + 4b + 4c = n^2. \end{aligned}$$

Alltså skall vi ha $4a = 1$, $8a + 4b = 0$, $6a + 4b + 4c = 0$, dvs. $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{8}$. Allmänna lösningen är $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = (C_1 + C_2n)(-1)^n + \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{8}$.

2. a)

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x^2) - \sin^2 x}{1 - \cos(x^2)} &= \frac{x^2 - \frac{1}{2}x^4 + O(x^6) - [x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)]^2}{1 - [1 - \frac{1}{2}x^4 + O(x^8)]} = \frac{x^2 - \frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + O(x^6)}{\frac{1}{2}x^4 + O(x^8)} \\ &= \frac{-\frac{1}{6}x^4 + O(x^6)}{\frac{1}{2}x^4 + O(x^8)} = \frac{-\frac{1}{6} + O(x^2)}{\frac{1}{2} + O(x^4)} \rightarrow \boxed{-\frac{1}{3}} \text{ då } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

b) Om $f(x, y) = \frac{\sin(xy^2)}{xy^2+x^3}$ (definierad för $x \neq 0$), är $f(x, 0) = 0$ för alla $x \neq 0$, medan $f(x, x) = \frac{\sin(x^3)}{2x^3}$ som går mot $\frac{1}{2}$ då $x \rightarrow 0$. Alltså saknas gränsvärde då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

3. 1. Karakteristiska ekvationen är $r^3 + r^2 + 4r + 4 = r^2(r+1) + 4(r+1) = (r+1)(r^2+4) = 0$ med lösningar $r_1 = -1$, $r_{2,3} = \pm 2i$. Homogenlösningen är $y_h = C_1e^{-x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$.
 2. Högerledet är $x + \cos^2 x = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$. Sök först en partikulärlösning till $y''' + y'' + 4y' + 4y = x + \frac{1}{2}$. Ansätt $y_{p,1} = ax + b$. Insättning ger

$$4a + 4(ax + b) = 4ax + 4a + 4b = x + \frac{1}{2},$$

varav $4a = 1$, $4a + 4b = \frac{1}{2}$, dvs. $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{8}$, och $y_{p,1} = \frac{x}{4} - \frac{1}{8}$.

Sök sedan en partikulärlösning $y_{p,2}$ till $y''' + y'' + 4y' + 4y = \frac{1}{2} \cos 2x$. Om u_p är en partikulärlösning till $u''' + u'' + 4u' + 4u = \frac{1}{2}e^{2ix}$, är $y_{p,2} = \text{Re } u_p$. Skriv $u = ze^{2ix}$ och använd förskjutningsregeln:

$$\begin{aligned} u''' + u'' + 4u' + 4u &= (D+1)(D^2+4)[ze^{2ix}] = e^{2ix}(D+2i+1)((D+2i)^2+4)[z] \\ &= e^{2ix}(D+2i+1)(D^2+4iD)[z] = e^{2ix}(D^3+(6i+1)D^2+(-8+4i)D)[z] = \frac{1}{2}e^{2ix}. \end{aligned}$$

Alltså är z lösning till $z''' + (6i+1)z'' + (-8+4i)z' = \frac{1}{2}$, och vi ansätter $z_p = cx$. Insättning ger $(-8+4i)c = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{8(-2+i)} = \frac{-2-i}{8 \cdot 5} = -\frac{1}{40}(2+i)$, så att $u_p = -\frac{x}{40}(2+i)e^{2ix}$, $y_{p,2} = \text{Re } u_p = -\frac{x}{40} \text{Re}[(2+i)(\cos 2x + i \sin 2x)] = -\frac{x}{40}(2 \cos 2x - \sin 2x)$.

3. Allmänna lösningen till den givna ekvationen är

$$y = C_1e^{-x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + \frac{x}{4} - \frac{1}{8} - \frac{x}{40}(2 \cos 2x - \sin 2x)$$

4. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(k+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2}$.

$$\begin{aligned} x^2 f''(x) + x f'(x) + (x^2 - 4)f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+2)(2k+1)}{k!(k+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+2}{k!(k+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(k-1)!(k+1)!} 4 \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k!(k+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2}. \end{aligned}$$

Se på koefficienten för $(\frac{x}{2})^{2k+2}$. För $k = 0$ är den $\frac{2-1}{1-2} + \frac{2}{1-2} - \frac{4}{1-2} = 0$. För $k \geq 1$ fås

$$\begin{aligned} & (-1)^k \frac{(2k+2)(2k+1)}{k!(k+2)!} + (-1)^k \frac{2k+2}{k!(k+2)!} + (-1)^{k-1} \frac{4}{(k-1)!(k+1)!} - (-1)^k \frac{4}{k!(k+2)!} \\ &= (-1)^k \frac{(2k+2)(2k+1) + 2k+2 - 4k(k+2) - 4}{k!(k+2)!} = 0. \end{aligned}$$

Alltså satisfierar $f(x)$ differentialekvationen $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$.

5. Studera potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln \cos \frac{1}{n}} = e^{n^2 \ln[1 - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^4})]} = e^{n^2[-\frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^4})]} = e^{-\frac{1}{2} + O(\frac{1}{n^2})}, \\ \sqrt[n]{|a_n|} &= e^{-\frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^3})} \rightarrow 1 \quad \text{då } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Alltså är konvergensradien 1. För $x = \pm 1$ fås serien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, och enligt ovan går allmänna termens absolutbelopp inte mot 0 då $n \rightarrow \infty$ (utan mot $e^{-\frac{1}{2}}$); serien divergerar. Den givna serien är alltså konvergent precis då $-1 < x < 1$.

6. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x+n)^2 e^{-(x+n)}$. a) För $0 \leq x \leq 1$ är $(x+n)^2 e^{-(x+n)} \leq (n+1)^2 e^{-n} \leq \frac{C}{n^2}$ för någon konstant C (eftersom $n^2(n+1)^2 e^{-n} \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$). Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2}$ är konvergent, ger Weierstrass' majorantsats att $\sum_{n=0}^{\infty} (x+n)^2 e^{-(x+n)}$ är likformigt konvergent på $[0, 1]$.

b) På grund av den likformiga konvergensten gäller att

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (x+n)^2 e^{-(x+n)} dx = [x+n=t] = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} t^2 e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt = [-t^2 e^{-t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2te^{-t} dt = [-2te^{-t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2e^{-t} dt \\ &= [-2e^{-t}]_0^{\infty} = \boxed{2}. \end{aligned}$$
