MATEMATIK | **Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Telefonvakt: Richards Grzibovskis, tel. 0740 459022
Tentamen | 2003–08–22 kl. 08.45–12.45

Matematisk Analys F1, del A (TMA 975)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv dessutom linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

1) Lös differentialekvationerna (8p)

(a) $\sqrt{x}yy' = y(y-1),\ x > 0$

(b) $xy' - 5y = x,\ x > 0.$

2) Avgör om följande serie är konvergent, (7p)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}.$$

Bestäm i sådana fall dess summa.

3) Beräkna ett närmevärde till den generaliserade integralen (7p)

$$\int_0^1 \frac{cosx - 1}{x^2\sqrt{x}} dx$$

med ett fel som är mindre än 5×10^{-3}, (2 gällande decimaler).

4) I en enkel klimatmodell beskrivs avvikelsen (x_n) från den årliga medeltemperaturen i månad nummer n, med differensekvationen (7p)

$$x_{n+2} - \sqrt{3}x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_1 = -12, \quad x_3 = -6.$$

I vilken månad är det kallast och i vilken är det varmast? Rita en kurva som visar temperaturens svängningar från månad till månad.

5) Låt $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{cos(\frac{n\pi}{3})}{n!} x^n.$ (8p)

(a) Bestäm konvergensradien för $p(x)$.

(b) Visa att $p(x)$ är en lösning till differentialekvationen

$$y'' - y' + y = 0.$$

och uttryck med hjälp av detta $p(x)$ med elementära funktioner.

Var god vänd!

6) År 1861 konstruerade Weierstrass en funktion som väckte stor uppmärksamhet , (8p)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2} sin(2^n x).$$

Bevisa att Weierstrass funktion f är kontinuerlig på $\mathbb{R}$.
En alldeles speciell egenskap som f har är att den inte är deriverbar i någon punkt i $\mathbb{R}$.
Visa att Weierstrass funktion inte är deriverbar i $x = 0$.

7) Formulera och bevisa Maclaurins formel med Lagranges restterm. (7p)

8) Formulera och bevisa lösningsformeln för en homogen linjär differentialekvation av ordning två. (8p)

Lycka till!
TG

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right|, \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|, \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n), \text{ där } \epsilon_n \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

/TG

Lösningar

1. a) $\sqrt{x}\, y y' = y(y-1)$, $x > 0$

Vi inser direkt att $y(x) = 0$, $x>0$ är en lösning.
Övriga lösningar erhålls genom att lösa ekvationen

$\sqrt{x}\, y' = y - 1$ (separabel / linjär 1:a ordn. ...)

$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$,

$\ln|y-1| = 2\sqrt{x} + C$

$|y-1| = e^C \cdot e^{2\sqrt{x}}$, $y = 1 \underbrace{\pm e^C}_{A} \cdot e^{2\sqrt{x}}$

Allmän lösning är $y(x) = 1 + Ae^{2\sqrt{x}}$, $x > 0$
där A är en godtycklig reell konstant.

b) $xy' - 5y = x$, $x > 0$

$y' - \frac{5}{x}y = 1$

Integrerande faktor är $e^{\int -\frac{5}{x}dx} = e^{-5\ln x} = e^{\ln x^{-5}} = x^{-5}$

$(x^{-5}y)' = x^{-5}$

$x^{-5}y = -\frac{1}{4}x^{-4} + C$

$y = -\frac{x}{4} + Cx^5$

där C är en godtycklig reell konstant.

2. Sätt $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 3^n}$ och $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$

Då är $|a_n| \le \left(\frac{1}{3}\right)^n$ och $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ är en konvergent (geometrisk) serie ($\frac{1}{3} < 1$)

Enligt jämförelsekriteriet är serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolutkonvergent och därmed konvergent.

Sätt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

Enligt formelbladet är $f(x) = \arctan x$, alternativt så ser vi att

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}, \quad |x| < 1$$

Dvs $f(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$, $f(0) = 0 = \underline{\underline{C}}$

Men $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1} = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}_{=\frac{1}{3}}\right)^n \right.$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{3^n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = \frac{1}{\sqrt{3}} S.$$

Dvs $S = \sqrt{3}\, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}\, \underbrace{\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}}_{=\frac{\pi}{6}} = \underline{\underline{\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6}}}$

3. $I = \int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^2\sqrt{x}}\, dx$ (Singularitet i $x = 0$!)

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6!}\cos(\theta x) x^6$, $(6! = 720)$

$$\frac{\cos x - 1}{x^2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x^{3/2}}{24} - \frac{\cos(\theta x)}{720} x^{7/2}$$

Dvs

$$I = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x^{3/2}}{24}\right) dx + \varepsilon = \left[-\sqrt{x} + \frac{2}{5\cdot 24} x^{5/2}\right]_0^1 + \varepsilon$$

$$= -1 + \frac{1}{60} + \varepsilon = -\frac{59}{60} + \varepsilon,$$

där

$$0 < \varepsilon = \int_0^1 \frac{\cos(\theta x)}{720} x^{7/2}\, dx \le \frac{1}{720} \int_0^1 x^{7/2} dx = \frac{\frac{2}{9}}{720} = \frac{1}{3240}$$

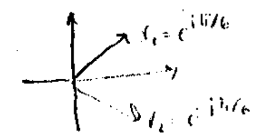
$< 5 \times 10^{-4}$ (som ju är mindre än 5×10^{-3})

Svar: $I = -\frac{59}{60} \pm 5 \times 10^{-4}$

4 $x_{n+2} - \sqrt{3}\, x_{n+1} + x_n = 0$, $r^2 - \sqrt{3}\, r + 1 = 0$

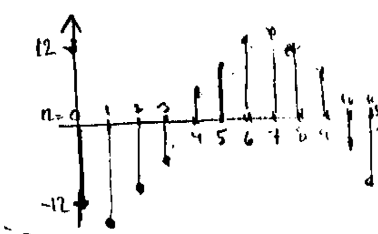
$r = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$

Allmän homogen lösning är



$x_n = A\cos\frac{n\pi}{6} + B\sin\frac{n\pi}{6}$

$x_0 = A$	$x_6 = -A$
$x_1 = (A\sqrt{3} + B)/2$	$x_7 = -x_1$
$x_2 = (A + B\sqrt{3})/2$	$x_8 = -x_2$
$x_3 = B$	$x_9 = -x_3$
$x_4 = (-A + B\sqrt{3})/2$	$x_{10} = -x_4$
$x_5 = (-A\sqrt{3} + B)/2$	$x_{11} = -x_5$



Med $x_0 = -12$ och $x_3 = -6$ så är

$A = -12$ och $B = -6$

$x_0 = -12$, $x_1 = -3(2\sqrt{3}+1)$, $x_2 = -3(2+\sqrt{3})$, $x_3 = -6$, $x_4 = 3(2-\sqrt{3})$, $x_5 = 3(2\sqrt{3}-1)$

Kollar man [illegible]

5. a) $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n!}}_{=a_n} x^n = 1 + \frac{\cos \pi/3}{1}x + \frac{\cos 2\pi/3}{2}x^2 + \dots$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{|\cos n\pi/3|}}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 \text{ då } n \to \infty \text{ ty } \sqrt[n]{n!} \to \infty$$

Alltså är konvergensradien $R = "\frac{1}{0}" = \infty$

b) $p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{(m+1)\pi}{3}}{m!} x^m$ (kalla m för n)

$$p''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{(n+1)\pi}{3}}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{(m+2)\pi}{3}}{m!} x^m$$

Alltså är

$$p''(x) - p'(x) + p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \overbrace{\left(\cos\frac{(m+2)\pi}{3} - \cos\frac{m+1}{3}\pi + \cos\frac{m\pi}{3}\right)}^{=b_m}$$

$$\cos\left(\frac{m\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{m\pi}{3}\cdot\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{m\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\cos\frac{m\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{m\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{m\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{m\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{m\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cos\frac{m\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{m\pi}{3}$$

Alltså är

$$b_m = -\cos m\frac{\pi}{3} + 0\cdot\sin\frac{m\pi}{3} + \cos\frac{m\pi}{3} = 0 \quad !$$

Dvs $p(x)$ är en lösning till differentialekvationen

$$y'' - y' + y = 0, \quad r^2 - r + 1 = 0$$

$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

De allmänna homogena lösningen är

$$y(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Men $1 = p(0) = A$,

$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = p'(0) \overset{*}{=} \frac{1}{2}p(0) + B\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \end{array} \right.$

$* \; y'(x) = \frac{1}{2}y(x) + e^{x/2}\left(-A\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$

Svar $\underline{p(x) = e^{x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x}$, $x \in \mathbb{R}$.

6. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2}\sin(2^n x)$.

Sätt $u_n(x) = 2^{-n/2}\sin(2^n x)$,

då är $|u_n(x)| = 2^{-n/2}|\sin 2^n x| \le 2^{-n/2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

och $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ som är en konvergent geometrisk serie.

Enligt Weierstrass majorantsats följer att $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ konvergerar likformigt på $\mathbb{R}$. Eftersom $u_n(x)$ alla är kontinuerliga så följer att även gränsfunktionen $f(x)$ är det.

Om $f'(0)$ existerar så existerar gränsvärdet $\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$. Här är

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2}\sin(2^n h)$$

Vi undersöker differenskvoten med $h = 2^{-N}\cdot\frac{\pi}{4}$ (N

Eftersom $2^n \cdot 2^{-N}\frac{\pi}{4} = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ då $n = N+2, N+3, \dots$

så följer att $\sin(2^n h) = 0$ då $n \ge N+2$,

Alltså är

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = 2^N\cdot\frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{N} 2^{-n/2}\sin\left(2^{n-N}\frac{\pi}{4}\right) + 2^{-(N+1)/2}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} 2^{n/2}\frac{\sin\left(2^{n-N}\frac{\pi}{4}\right)}{2^{n-N}\frac{\pi}{4}} + \frac{4}{\pi}2^{(N-1)/2} \ge \left(\frac{\sin x}{x} \ge \cos x \text{ om } 0 \le x \dots \right.$$

$$\ge \sum_{n=0}^{N} 2^{n/2}\cos\left(\underbrace{2^{n-N}\frac{\pi}{4}}_{\le\frac{\pi}{4}}\right) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{N} 2^{n/2} = \frac{(\sqrt{2})^{N+1} - 1}{\sqrt{2} - 1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\to \infty$ då $N \to \infty$.

$\therefore \lim \frac{f(h) - f(0)}{h}$ existerar ej !