MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Telefonvakt: Rolf Liljendhal, tel. 0740 459022

Tentamen 2003–04–17 kl. 08.45–12.45

Matematisk Analys F1, del A (TMA 975)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv dessutom linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

1) Lös differensekvationen (8p)

$$2y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = n2^{-n}, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 1.$$

2) Lös differentialekvationen (8p)

$$y''' + 3y'' - 4y = 2x^2 + 5, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 5.$$

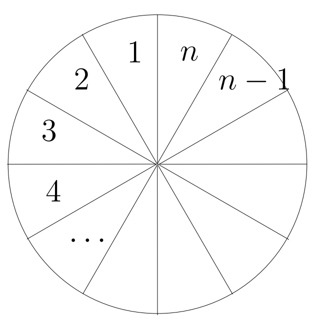
3) Undersök för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent. (8p)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+7}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^{2n}}{(2n)!}$

4) Bestäm summan för potensserien $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n-1}$. (7p)

5) Beräkna $\sqrt[3]{1003}$ med 7 gällande decimaler (ett absolut fel mindre än 5×10^{-8}). (7p)

6) En cirkel är indelad i n lika stora och numrerade sektorer (se figuren). Varje sektor skall färgläggas med en färg och det finns totalt k $(k \geq 3)$ stycken färger att välja bland.



(a) Låt a_n vara antalet sätt att färglägga figuren så att två närliggande cirkelsektorer inte har samma färg. Visa att om $n \geq 3$ så gäller följande differensekvation (4p)

$$a_{n+1} + a_n = k(k-1)^n.$$

(En liten ledtråd finns på nästa sida.)

(b) Bestäm a_n (vad är a_3 ?). (4p)

Var god vänd!

7) Formulera och bevisa Maclaurins formel med Lagranges restterm. (7p)

8) Formulera och bevisa en sats om konvergens och divergens för serien (7p)
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, där p är en reell konstant.

Lite hjälp till uppgift 6a: Tänk på att när sista cirkelsektorn (nr. $n+1$) skall färgläggas så är antalet färger man kan välja bland beroende på om sektorerna nr. 1 och nr. n (första och näst sista) har samma färg eller ej.

Lycka till!
TG

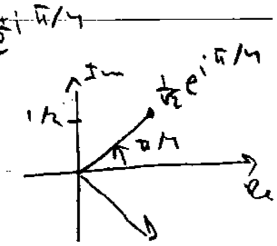
Lösningar till, Matematisk analys F1, del A

TMA975A, 2003-04-17

1. $2y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = n\cdot 2^{-n}$, $y_0 = y_1 = 1$.

Karakteristisk ekvation är

$$2r^2 - 2r + 1 = 0, \quad r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\pi/4}$$



dvs de homogena lösningar är

$$y_n^h = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(A\cos\frac{n\pi}{4} + B\sin\frac{n\pi}{4}\right), \; n = 0,1,2,\ldots$$

Som partikulärlösning ansätter vi:

$$y_n^p = (an+b)\,2^{-n},$$

$$y_{n+1}^p = (an+a+b)\,2^{-n-1}, \quad y_{n+2}^p = (an+2a+b)\,2^{-n-2}$$

Dvs

$$2y_{n+2}^p - 2y_{n+1}^p + y_n^p = \left(\frac{1}{2}(an+2a+b) - (an+a+b) + (an+b)\right)2^{-n}$$

$$= n\,2^{-n}$$

Dvs

$$\frac{a}{2}n + \frac{b}{2} = n, \quad \therefore \quad a = 2 \text{ och } b = 0$$

En partikulärlösning är alltså $\underline{\underline{y_n^p = 2n\cdot 2^{-n}}}$

Den allmänna lösningen är då

$$y_n = y_n^h + y_n^p = 2^{-n/2}\left(A\cos\frac{n\pi}{4} + B\sin\frac{n\pi}{4}\right) + 2n\cdot 2^{-n}$$

Med $y_0 = A = 1$ och

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A\frac{1}{\sqrt{2}} + B\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 = 1, \quad \text{Dvs } \frac{1}{2}(A+B) = 0$$

$\underline{\underline{B = -1}}$

Svar $y_n = 2^{-n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}\right) + 2n\,2^{-n}$, $n = 0,1,2,\ldots$

2. Sätt $s(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n-1}$ med $t = x^2$!

$$= t \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n-1}, \text{ sätt } g(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n-1}.$$

Då är

$$g'(t) = \sum_{n=2}^{\infty} t^{n-2} = \left[m = n-2 \right] = \sum_{m=0}^{\infty} t^m = \frac{1}{1-t} \text{ om } |t| < 1.$$

Dvs $g(t) = -\ln(1-t) + C$. Men $C = g(0) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{0}{n-1} = 0$.

Alltså är

$$S(x) = t\, g(t) = [t = x^2] = \underline{\underline{-x^2 \ln(1-x^2), \quad |x| < 1.}}$$

3. a) Sätt $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+7}$ och $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+7}$ (obs $a_n = f(n)$).

Då är $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+7) - \sqrt{x}}{(x+7)^2} = \frac{7-x}{2\sqrt{x}(x+7)^2} \leq 0$ om $x \geq 7$.

Dvs a_n är avtagande för $n \geq 7$. Eftersom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ så ger Leibniz konvergenskriterium att $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ är konvergent. Serien är däremot inte absolutkonvergent eftersom $\frac{|(-1)^n a_n|}{1/\sqrt{n}} = \frac{n}{n+7} \to 1 \neq 0$ då $n \to \infty$ och eftersom serien $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ är divergent. (Jämförelsekriteriet)

<u>Svar</u> Serien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+7}$ är betingat konvergent.

3b) Sätt $a_n = (1-\frac{1}{n})^{n^2}$, (obs $a_n > 0$). Då är

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(e^{n^2 \ln(1-\frac{1}{n})}\right)^{1/n} = e^{n \ln(1-\frac{1}{n})} = [\ln(1+t) = t + B(t)t^2] =$$

$$= e^{-1 + \frac{1}{n}B(\frac{1}{n})} \to e^{-1} = 1/e < 1, \text{ då } n \to \infty.$$

Enl. rotkriteriet för positiva serier följer att

$\sum_{n=2}^{\infty} (1-\frac{1}{n})^{n^2}$ är absolutkonvergent.

3c) Med Stirlings formel, $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1+\underbrace{\varepsilon_n}_{\to 0,\, n\to\infty})$

så finner vi att

$$\frac{n^{2n}}{(2n!)} = \frac{n^{2n}}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}\,(1+\varepsilon_{2n})} = \frac{\left(\frac{e}{2}\right)^{2n}}{\sqrt{4\pi n}\,(1+\varepsilon_{2n})} \to$$

$$\to \infty \quad \text{då } n\to\infty \quad \text{ty } \underline{\underline{\frac{e}{2} > 1}}.$$

Alltså gäller att ~~termerna i serien~~

$\sum (-1)^n \frac{n^{2n}}{(2n)!}$ ej går mot noll och är därmed $\underline{\underline{\text{divergent}}}$

4. $\sqrt[3]{1003} = \sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt[3]{1.003} = 10 \cdot \sqrt[3]{1.003}$

Vi undersöker $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3}$, $f'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-8/3}$

En Maclaurinutveckling av $f(x)$ ger $(f'(0) = \frac{1}{3}, f''(0) = -\frac{2}{9})$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9\cdot 2!}x^2 + \frac{10}{27\cdot 3!}(1+\theta x)^{-8/3}x^3$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}(1+\theta x)^{-8/3}x^3, \quad \text{ngt } \theta : 0<\theta<1.$$

I d $x = 0{,}003 = \frac{3}{1000}$ så är

$$\sqrt[3]{1.003} = f(0.003) = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{1000} - \frac{1}{9}\,\frac{9}{10^6} + \varepsilon$$

$$= 1 + \frac{1}{1000} - \frac{1}{10^6} + \varepsilon, \quad \text{där}$$

$$|\varepsilon| = \frac{5}{81}\underbrace{\left(1+\theta\frac{3}{1000}\right)^{-8/3}}_{\leq 1}\left(\frac{3}{1000}\right)^3 = \frac{5\cdot 27}{81}10^{-9} = \frac{5}{3}\times 10^{-9}$$

Dvs

$$\sqrt[3]{1.003} = 1.00099900 \pm \frac{5}{3}\times 10^{-9} \quad \text{(8 decimaler)}$$

och

$$\sqrt[3]{1003} = 10\cdot\sqrt[3]{1.003} = \underline{\underline{10.0099900 \pm \frac{5}{3}\times 10^{-8}}}$$

(7 decimaler).

5) $y''' + 3y'' - 4y = 2x^2+5$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=5$

Karakteristisk ekvation är

$r^3+3r^2-4=0$ ($r_1=1$ är en rot!)

$(r-1)\underbrace{(r^2+4r+4)}_{=(r+2)^2}=0$, $r_{2,3}=-2$ är en dubbelrot

Dvs den homogena lösningen är

$y_h(x) = Ae^x + (Bx+C)e^{-2x}$

Som partikulärlösning ansätter vi:

$y_p(x) = ax^2+b$ (Eftersom både y_p'' & y saknar x-term liksom H.L. så kan vi utelämna x-termen i ansättningen)

$y_p' = 2ax$, $y_p'' = 2a$

$y_p''' = 0$

Insättning ger: $3\cdot 2a - 4ax^2 - 4b = 2x^2+5$,

Dvs $-4a=2$, $6a-4b=5$

$\underline{\underline{a=-1/2}}$ $4b=-3-5=-8$, $\underline{\underline{b=-2}}$

De allmänna lösningen är

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x + (Bx+C)e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 - 2$

men $y'(x) = Ae^x + (B-2Bx-2C)e^{-2x} - x$

$y''(x) = Ae^x + (-2B-2B+4Bx+4C)e^{-2x} - 1$

och $y(0) = A + C - 2 = 0$

$y'(0) = A + B - 2C = 1$

$y''(0) = A - 4B + 4C - 1 = 5$

$$\left\{\begin{array}{l} A + C = 2 \\ A+B-2C = 1 \\ A-4B+4C = 6 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 4 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right]$$

$\therefore$ $A=2$, $B=-1$, $C=0$

Svar: $y(x) = 2e^x - xe^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$

6. Vi delar in cirkelskivan i $n+1$ sektorer.

1)

1:a sektorn kan färgläggas på	k sätt	
2:a — " —	$k-1$ sätt	(de först valda färger är tillåtna.
3:e — " —	$k-1$ sätt	
4:e	$k-1$ sätt	
⋮		
n:e — " —	$k-1$ sätt	

De $n+1$:a sektorn kan färgläggas på $k-1$ sätt om vi struntar i att den då kan få samma färg som den 1:a.

I de fall då 1:a och sista ($n+1$:a) sektorn har samma färg (dvs icke godkända fall) så kan vi slå samman dom till en sektor och vi har då n sektorer där inga intilliggande har samma färg, men antalet sådana fall är ju a_n !.

Alltså är $\boxed{a_{n+1} = k(k-1)^n - a_n}$ (resonemanget kräver att $n \geq 3$ och därmed att $(n+1) \geq 4$)

b) Differensekvationen

$$a_{n+1} + a_n = k(k-1)^n$$

har den homogena lösningen $a_n = C \cdot (-1)^n$ $[r+1=0]$

Ansätt $a_n^p = A(k-1)^n$

Insättning ger

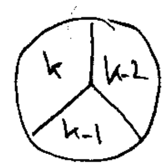
$$A(k-1)^{n+1} + A(k-1)^n = k(k-1)^n$$

$$Ak - A + A = k \quad , \quad \underline{\underline{A = 1}}$$

Dvs $a_n = (k-1)^n + C \cdot (-1)^n$

$a_3 = (k-1)^3 - C = k(k-1)(k-2)$

a_3:



sätt att färglägg

$a_3 = k(k-1)(k-2)$.

Svar:

$a_n = (k-1)^n + (k-1)(-1)^n$.

$n = 3, 4, 5, \ldots$