

1. Lös differentialekvationen $y'' + 2y' - 3y = 8xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (7p)

2. Bestäm konvergensintervallet och summan för potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^k}{k} x^{3k}$. (7p)

3. a) Beräkna $\cos(0.1)$ approximativt med Maclaurinpolynomet av grad 2. (4p)
Ange också en felgräns !

b) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{24 \cos x + 12x^2 - 24}{x^2 - x \sin x}$. (4p)

4. För vilka reella tal p och q konvergerar följande serier (8p)

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sin(n\pi^p)$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^q (\ln n)^2}$

5. Vid numerisk lösning av differentialekvationen $y' + ay = f(t)$ kan man ersätta derivatan (8p)

y' med differenskvoten $\frac{y(t+h) - y(t)}{h}$ där h är ett fixt men litet tal, (Eulers metod).

Genom att sätta $t = nh$, $y_n = y(nh)$ och $d_n = f(nh)$ där $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

diskretiseras differentialekvationen och en approximerande differensekvation erhålls

istället. Sätt upp differensekvationen i fallet $a = 1$ och $f(t) = t$ och med begynnelse-

data $y(0) = 0$. Jämför sedan lösningen till differensekvationen med lösningen till den ursprungliga differentialekvationen.

6. Låt c vara ett godtyckligt reellt tal. Sätt $f_n(x) = n^c x(1-x^2)^n$, $0 \leq x \leq 1$. (7p)

Visa först att $f_n(x) \rightarrow 0$ punktvis på $[0, 1]$. Undersök sedan för vilka c som funktionsföljden $f_n(x)$ konvergerar likformigt på $[0, 1]$.

7. Formulera och bevisa Maclaurins formel med Lagranges restterm. (8p)

8. Visa att om potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar i punkten $x_0 \neq 0$, så konvergerar (7p)

serien absolut för alla x sådana att $|x| < |x_0|$.

Lösningar till "Reell Matematisk Analys F, del A" (TMA975)
2002-08-23

1. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r - 3 = 0$, $r_{1,2} = -1 \pm 2 = -3, 1$.

Dvs, den allmänna homogena lösningen är $y_h(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$.

Vi antar som partikulärlösning $y_p(x) = (Ax^2 + Bx) e^x$
 $y_p' = (Ax^2 + (2A+B)x + B) e^x$ ($= (x^2 + 4x + 2)e^x$)
 $y_p'' = (Ax^2 + (4A+B)x + 2A+B) e^x$

Insatt i differentialekvationen så erhåller vi:
 $(\underbrace{A+2A-3A}_=0)x^2 + \underbrace{4A+B+4A+2B-3B}_=8A)x + \underbrace{2A+B+2B}_=2A+B)e^x = 8xe^x$
 $\therefore 8A = 8, A = 1; 2A+B = 0, B = -2$.

Dvs den Allmänna lösningen är $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x + (x^2 - 2x) e^x$

Med $y(0) = c_1 + c_2 = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} -4c_1 = -\frac{1}{8} \\ c_1 = \frac{1}{8} \\ c_2 = 1 - c_1 = \frac{7}{8} \end{array} \right.$

Svar: $y(x) = \frac{1}{8} e^{-3x} + (x^2 - 2x + \frac{7}{8}) e^x$

2. $8^k x^{7k} = (8x^3)^k$, sätt $t = 8x^3$.

Då är $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^k x^{7k}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} = f(t)$. (def.)

Vi deriverar $f(t)$ (m.a.p. t) och potensserie termvis!
 $f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot t^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}$

Den geometriska serien är konv. om. m. $|t| < 1$ (för $t = \pm 1$ går termen i serien ej mot noll!)
 Och därmed är den ursprungliga serien konvergent om $|t| < 1$. För $t = 1$ erhåller vi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ som ju är divergent och för $t = -1$ ser vi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ som enligt Leibniz konv. kriterium är konvergent.

Dvs $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$ är konv. om. m. $-1 \leq t < 1$.

För $|t| < 1$ så är $f'(t) = \frac{1}{1-t}$, $f(t) = -\ln(1-t) + C$
 Med $f(0) = -\ln|1+C| = C$ Dvs $C = 0$

Och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} = \ln(1-t)$.

Till sist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^k x^{7k}}{k} = \ln(1-8x^3)$, $|8x^3| < 1, |x| < \frac{1}{2}$

Och potensserie konv. precis då $-1 \leq 8x^3 < 1$
 dvs då $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$

3a) $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\cos x}{4!}x^4$ för nst. $\theta: 0 < \theta < x$.
 $\varepsilon(x)$ (detekt)

Dvs $\cos(0.1) = 1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \varepsilon = \frac{1.99}{2} + \varepsilon = 0.995 + \varepsilon$

där $|\varepsilon| \leq \frac{1}{24} \cdot (0.1)^4 \leq 0.0000005$

Dvs $\cos(0.1) = 0.995 \pm 0.0000005$

(b) $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + B(x)x^5$

$x^2 - x \sin x = \frac{1}{6}x^3 + B(x)x^6 = x^3(\frac{1}{6} + B(x)x^3)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + B(x)x^6$

Dvs $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{24 \cos x + 12x^2 - 24}{x^2 - x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4(1 + B(x)x)}{x^3(\frac{1}{6} + B(x)x^3)}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + B(x)x}{\frac{1}{6} + B(x)x^3} = 6$
 $B(x)$ är funktion som ω beg. i ε omgivning till origo.

4a) Sätt $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \sin(n^p)$

$(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$ då $n \rightarrow \infty$
 och

$\sin(n^p) \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ om $n^p > 0$,
 så för att serie skall konvergera måste $p > 0$
 För små x gäller att $\sin x \approx x$, vi jämför

där för termerna a_n med $b_n = n^p$

Då är $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^p)}{n^p} =$ vgr

$= e \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^p)}{n^p} = \left[\begin{matrix} x = n^p & (p > 0) \\ \rightarrow 0 & \text{då } n \rightarrow \infty \end{matrix} \right] = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

$\neq 0$
 Dvs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konv. om n . $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konv.

Med $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ är konv. precis då $p > 1$.

Svar: $p > 1$.

b) Sätt $f(x) = x^{\frac{1}{2}}(\ln x)^2$, eftersom $f(x)$ avtar för $x \geq 2$, så kan vi jämföra serie

$\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ med integrale $\int_2^{\infty} f(x) dx$.

$\int_2^{\infty} f(x) dx = \int_2^{\infty} x^{\frac{1}{2}}(\ln x)^2 dx = \left[\begin{matrix} t = \ln x & | & x \rightarrow \infty \\ dt = \frac{dx}{x} & | & 2 \rightarrow \ln 2 \end{matrix} \right]$

$= \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{x^{\frac{1}{2}} t^2} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{e^{-(1/2)t}}{t^2} dt$

För $1-p > 0$ så diverger integrale och för $1-p \leq 0$ så konverger integrale!

Dvs serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p(\ln n)^2}$ konverger precis

då $p \geq 1$

(a) $\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^2} \approx$ konv. och $\frac{e^{-(1-p)t}}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ om $p \geq 1$

5. Vi löser differentialekvationen först.

(*) $y' + y = t$ (integrerande faktor $\tilde{w} = e^t$)

$(e^t y)' = te^t$

$e^t y = \int te^t dt = te^t - \int e^t dt = (t-1)e^t + C.$

Dvs $y(t) = t-1 + ce^{-t}$,
 Med $y(0) = -1 + C = 0$, $C = 1$
 $y(t) = t-1 + e^{-t}$

Discretiserar vi (1) så erhåller vi $(y'_n = \frac{y((n+1)h) - y(nh)}{h})$
 $= \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + y_n = nh$

(1A) $y_{n+1} - (1-h)y_n = nh^2$, $y_0 = y(0) = 0.$

Allmän homogena lös. är $y_n^h = C \cdot (1-h)^n$.

Vi antar $y_n^p = An + B$, då är

$y_{n+1}^p = A(n+1) + B$, och efter insättning i (1A)

$A \cdot n + A + B - A(1-h)n - B(1-h) = nh^2$

$A \cdot h \cdot n + A + B \cdot h = nh^2$

Dvs $A \cdot h = h^2$ och $A + B \cdot h = 0$; $A = h$, $B = -1$

De allmänna lösningarna till (1A) är

$y_n = y_n^h + y_n^p = C \cdot (1-h)^n + (1-nh).$

$y_0 = C - 1 = 0$, Dvs $y_n = nh - 1 + (1-h)^n$

För $t = nh$, så är $y(t) = nh - 1 + e^{nh} = nh - 1 + (e^h)^n$

Dvs $y(t) = nh - 1 + e^{th}$ där $t = nh$

6. $f_n(x) = n^c x(1-x^2)^n$, $0 \leq x \leq 1$

$f_n(0) = f_n(1) = 0$ ($\rightarrow 0$ försärs då $n \rightarrow \infty$)

Om $0 < x < 1$ så är $0 < 1-x^2 < 1$ och därmed är $\ln(1-x^2) < 0$, med $\alpha = -\ln(1-x^2)$ (obs $> 0!$) så är

$f_n(x) = x \cdot n^c e^{n \ln(1-x^2)} = x \frac{n^c}{e^{\alpha n}} \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$

Dvs $f_n(x) \rightarrow 0$ punktvis i $[0,1]$.

Vi undersöker nu största värdet av $f_n(x)$ på $[0,1]$.

Sett $g(x) = x(1-x^2)^n$, då är $g'(x) = \frac{(1-x^2)^n - (1-x^2)^{n-1}(1-x^2)(-2x)}{2}$

och $g'(x) > 0$ om $x^2 < \frac{1}{1+2n}$, största värdet för $g(x)$

på $[0,1]$ antas då $x^2 = \frac{1}{1+2n}$.

Dvs $\max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)| = n^c \frac{1}{\sqrt{1+2n}} (1 - \frac{1}{1+2n})^n =$

$= \frac{n^c}{\sqrt{1+2n}} \cdot (\frac{2n}{1+2n})^n = \frac{n^c}{\sqrt{1+2n}} \frac{1}{(1 + \frac{1}{2n})^n}$

$\rightarrow 0$, $\rightarrow \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ då $n \rightarrow \infty$

Om $n < \frac{1}{C}$

Härav följer att $f_n(x) \rightarrow 0$ likformigt på $[0,1]$.

Om $n < \frac{1}{C}$