MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i
Reell Matematisk Analys F, del A, (TMA 975)
Datum: 2002-04-06, 08.45 - 12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Georgios Foufas tel. 0740 459022

---

1. Maclaurinutveckla funktionen $f(x) = \ln(1+x^2)\sin x$ med en restterm av ordning 7. (8p)
Beskriv i en figur hur funktionen ser ut för x nära 0 och avgör om $f(x)$ har ett lokalt extremum i $x = 0$.

2. Lös differensekvationen (7p)
$$y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 1 + 2^n.$$

3. Lös differentialekvationen (8p)
$$y''' + y'' + y' + y = e^{-x}.$$
Lösningarna skall ges på reell form.

4. Beräkna summan (7p)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!}.$$

5. Tangenten till en godtycklig punkt P på en kurva skär x-axeln i A och y-axeln i B. (7p)
A är mittpunkt på PB. Bestäm kurvan om den går genom (1,1).

6. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt[3]{1-(x/n)^2})$. (7p)

7. Formulera och bevisa Maclaurins formel med Lagranges restterm (8p)

8. Formulera och bevisa integralkriteriet för positiva serier. (8p)

/TG

MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i
Reell Matematisk Analys F, del A (TMA 975)
Datum: 2002-04-06, 08.45 - 12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Georgios Foufas tel. 0740 459022

1. Maclaurinutveckla funktionen $f(x) = \ln(1+x^2)\sin x$ med en restterm av ordning 7. Beskriv i en figur hur funktionen ser ut för x nära 0 och avgör om $f(x)$ har ett lokalt extremum i $x = 0$. (8p)

2. Lös differensekvationen (7p)
$$y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 1 + 2^n.$$

3. Lös differentialekvationen (8p)
$$y''' + y'' + y' + y = e^{-x}.$$
Lösningarna skall ges på reell form.

4. Beräkna summan (7p)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!}.$$

5. Tangenten till en godtycklig punkt P på en kurva skär x-axeln i A och y-axeln i B. A är mittpunkt på PB. Bestäm kurvan om den går genom (1,1). (7p)

6. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt[3]{1-(x/n)^2})$. (7p)

7. Formulera och bevisa Maclaurins formel med Lagranges restterm (8p)

8. Formulera och bevisa integralkriteriet för positiva serier. (8p)

Lösningar till tentamen i Reell Matematisk Analys F, del A, TMA975, 2002-04-06.

---

1. $f(x) = \ln(1+x^2)\sin x$ (8p)

Vi har $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + B_1(t)\cdot t^4$, $B_1(t)$ och $B_2(x)$ är begr. nära 0.

och $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + B_2(x)x^7$

Dvs $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + B(x)x^8$ ($B(x)$ är begr. för x nära 0)

och $f(x) = (x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + B(x)x^8)(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + B(x)x^7) =$

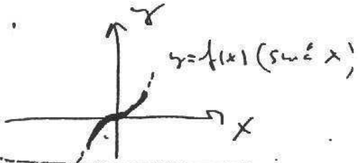
$= x^3 + x^5(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}) + x^7(\frac{1}{120} + \frac{1}{12}) + B(x)x^9$

$= x^3 - \frac{2}{3}x^5 + \frac{11}{120}x^7 + B(x)x^9$ (Resttermen av ordning 9

$= \underline{x^3 - \frac{2}{3}x^5 + B(x)x^7}$ (Resttermen av ordning 7)

För x nära 0 så ser vi att $f(x) \approx x^3$ ($f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$

dvs f har en terasspunkt i $x = 0$.



---

2. (*) $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 1 + 2^n$ (7p)

Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - r - 2 = 0$; $\begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 2 \end{cases}$

Dvs den allmänna homogena lösningen är $\underline{y_n^h = C_1\cdot(-1)^n + C_2\cdot 2^n}$

Vi ansätter som partikulärlösning

$y_n^p = a + bn\cdot 2^n$ ($b\cdot 2^n$ duger ej eftersom detta är en homogen lösning)(Resonans!)

dvs $y_{n+1}^p = a + b(n+1)2^{n+1}$
$= a + 2b\cdot 2^n + 2bn2^n$

$y_{n+2}^p = a + b(n+2)2^{n+2}$
$= a + 8b2^n + 4bn2^n$

Insättning i (*) ger ekv.

$$\boxed{\begin{array}{l} -2a + 6b\cdot 2^n + 0\cdot bn2^n = 1 + 2^n \\ \text{Alltså är } a = -\frac{1}{2} \text{ och } b = \frac{1}{6} \\ \underline{\text{Svar:}}\ y_n = y_n^h + y_n^p = \\ = C_1\cdot(-1)^n + C_2\cdot 2^n - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}n\cdot 2^n \end{array}}$$

C_1 & C_2 är två godt. konst.

3. $(*)\quad y''' + y'' + y' + y = e^{-x}$. (8p)

Karakteristisk ekvation är : $r^3+r^2+r+1 = 0$

$r_1 = -1$ är en rot ! , $r^3+r^2+r+1 = (r+1)(r^2+1)$.

övriga rötter erhålls från ekvationen $r^2+1=0$, $r_{2,3} = \pm i$

Alltså är den allmänna homogena lösningen

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

Vi ansätter som partikulärlösning

$$y_p(x) = A x e^{-x},$$

vs.

$$y_p'(x) = (A - Ax)e^{-x}, \quad y_p''(x) = (-2A + Ax)e^{-x}$$

$$y_p'''(x) = (3A - Ax)e^{-x}$$

insättning i $(*)$ ger

$$(3A - Ax - 2A + Ax + A - Ax + Ax)e^{-x} = e^{-x}$$

$$2A = 1 \ , \ \underline{\underline{A = \tfrac{1}{2}}} \ . \text{ Dvs } y_p(x) = \tfrac{x}{2}e^{-x}$$

Svar: $y(x) = (C_1 + \frac{x}{2})e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$
där C_1, C_2, C_3 är godtyckliga konstanter.

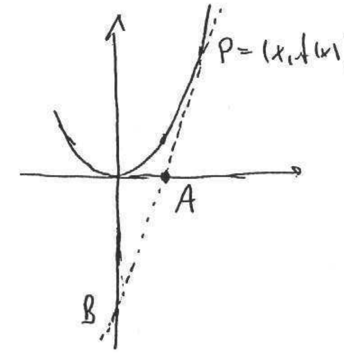
4. Vi ser att $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!} = [m = k-1] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+1}{m!}$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!}}_{(n=m-1)\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = \underline{\underline{2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}}}$$

Eftersom $e^x = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m$ så är $e = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}$

Svar: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = \underline{\underline{2e}}$ (7p)

5. Antag att de sökta kurva ges av $y = f(x)$ med $f(1) = 1$. (7)



Om $P = (x, f(x))$, $A = (x_0, 0)$ och $B = (0, y_0)$ så är $\vec{PA} = (x_0 - x, -f(x))$ och $\vec{PB} = (-x, y_0 - f(x))$. Eftersom $\vec{PA} = \frac{1}{2}\vec{PB}$ så följer att

$$-f(x) = \tfrac{1}{2}(y_0 - f(x))$$

dvs $y_0 = -f(x)$.

Lutningen för tangenten i punkten P är $f'(x)$ men också $\dfrac{f(x) - y_0}{x - 0} = \dfrac{2f(x)}{x}$.

Dvs $\boxed{f'(x) = \frac{2}{x} f(x)}$, $f'(x) - \frac{2}{x} f(x) = 0$

Integrerande faktor är $e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{x^2}$.

Dvs $(\frac{1}{x^2} f(x))' = 0$, $\frac{1}{x^2} f(x) = C$, $f(x) = C \cdot x^2$

Men $1 = f(1) = C \cdot 1^2 = C$, Svar $\underline{\underline{f(x) = x^2}}$

6. Sätt $u_n(x) = 1 - \sqrt[3]{1 - (\frac{x}{n})^2}$ och $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $-1 \le x \le 1$

Eftersom $u_n(-x) = u_n(x)$ och $u_n(x)$ är str. växande för $0 \le x \le 1$ så är $|u_n(x)| \le u_n(1) \overset{\text{df.}}{=} a_n$. Men $\sqrt[3]{1-t} = 1 - \frac{1}{3}t + B(t)t^2$ och

$a_n = 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3}\frac{1}{n^2} + B(\frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{n^4}$. Dvs $\dfrac{a_n}{1/n^2} = \frac{1}{3} + B(\frac{1}{n})\frac{1}{n^2} \to \frac{1}{3} \neq 0$, $n \to \infty$

Eftersom $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent så följer av jämförelsekriteriet för pos. serier att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent och därmed enligt Weierstrass Majorantsats att funktionsserien $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ är likformigt konvergent på $[-1,1]$. Eftersom $u_n(x)$ är kont. på $[-1,1]$ ...