Tentamensskrivning i **Reell matematisk analys F1, del A (TMA975)** den 18/8-2000, kl 8.45-12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Fredrik Altenstedt, 0740-459022

OBS ! Ange namn, personnummer, linje och inskrivningsår.

1. Bestäm $y(x)$, om $\left(x^2+1\right)y'(x) = x\left(y^2-1\right)$ och $y(0) = 2$. (7p)

2. Undersök om följande serier konvergerar
a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$, c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2}$. (8p)

3. a) Bestäm Maclaurinpolynomet till funktionen $f(x) = \dfrac{\cos(2x)\cdot \arctan(3x)}{1-x^2}$
med termer t.o.m. x^5 .
b) Bestäm derivatan $f^{(5)}(0)$. (8p)

4. Bestäm på reell form allmänna lösningen (för $x > 0$) till differentialekvationen
$x^3y'''(x) + 2x^2y''(x) + xy'(x) + 3y(x) = x^4$. (8p)

5. Undersök om funktionsföljden $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ är likformigt konvergent för $x \geq 0$,
då $f_n(x)$ är a) $\dfrac{nx}{n^2x^3+1}$, b) $n^3x^3e^{-nx}$. (7p)

6. I ett rektangulärt rum $ABCD$ upptäcker en katt, som befinner sig i hörnet A, en råtta i hörnet B, som börjar springa mot ett hål i hörnet C .
Katten, som hela tiden springer i riktning mot råttan, antages springa tre gånger så fort som råttan. Bestäm en ekvation för kattens väg, samt bestäm villkor på sidlängderna $|AB| = a$ och $|BC| = b$ för att katten fångar råttan. (7p)

7. Bevisa, att om serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ är konvergent, så är potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergent för alla x sådana att $|x| < |x_0|$. (8p)

8. Formulera och bevisa en förskjutningsregel för differentialoperatorer av typ
$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)D^k$, där $D = \dfrac{d}{dx}$. (7p)

/RP

VAR GOD VÄND !

Några Maclaurinutvecklingar

1) $$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

2) $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k\,!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!} e^{\theta x}$$

3) $$\sin x = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)\,!} + \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)\,!} \cos(\theta x)$$

4) $$\cos x = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)\,!} + \frac{(-1)^{m+1} x^{2m+2}}{(2m+2)\,!} \cos(\theta x)$$

5) $$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$$

6) $$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)}$$

7) $$\arctan x = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{2k-1} + \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)(1+\theta x^2)}$$

Stirlings formel:

$$n\,! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \bullet (1+\varepsilon_n)$$

Reell Matematisk Analys del A, F1, 18/8-00 (1)

1) $(x^2+1)y'(x) = x(y^2-1)$ med $y(0)=2$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x(y^2-1)}{x^2+1}$ (Sep. var.) $\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2-1} = C_0 + \int \frac{x\,dx}{x^2+1}$

$\therefore C_0 + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \int \frac{dy}{(y-1)(y+1)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|$

$\Rightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 2C_0 + \ln(x^2+1) \Rightarrow \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{2C_0}\cdot(x^2+1)$

$\Rightarrow \frac{y-1}{y+1} = C(x^2+1)$ där $C = \pm e^{2C_0}$

Men $\begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2-1}{2+1} = C(1+0) \Rightarrow C = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(y-1) = (y+1)(x^2+1) \Rightarrow y = \frac{3+x^2+1}{3-(x^2+1)} = \underline{\underline{\frac{x^2+4}{2-x^2}}}$ (för $|x|<\sqrt{2}$) (Svar)

2/a) $\sum_2^\infty \frac{1}{n\ln n}$ $\underline{\underline{\text{div.}}}$, ty $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \left[\ln\ln x\right]_2^\infty$ divergent.

Använd integralkrit. med $f(x) = \frac{1}{x\ln x} > 0$ och avtagande

b) $\sum_2^\infty \frac{1}{n(\ln n)^2}$ konv., ty integralkriteriet ger med $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ (pos och avtagande)

att $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \begin{bmatrix} \text{Sätt } \ln x = t \\ \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x=2 \Leftrightarrow t = \ln 2 \\ x\to\infty \Leftrightarrow t\to\infty \end{vmatrix}$

$= \int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_{\ln 2}^\infty$ konvergent

c) $\sum_2^\infty \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2}$ Sätt $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2} > 0$

2c) (forts)

(2)

där $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(\ln n)^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt[4]{n}}{\ln n}\right)^2 > \frac{1}{n}$ (för stora n)

ty $\frac{\sqrt[4]{n}}{\ln n} = \frac{n^{1/4}}{\ln n} \to \infty$, då $n \to \infty$

Men $\sum_N^\infty \frac{1}{n}$ div $\Rightarrow \sum_N^\infty a_n$ divergent

enligt jämförelsekriteriet (för pos. serier) på olikhetsform. Svar: a) och c) Div, b) Konv

---

3) $f(x) = \frac{\cos(2x)\cdot\arctan(3x)}{1-x^2} = \left[\text{Maclaurinutv. följaren först}\right]$

$= \frac{1}{1-x^2}\left[1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{24} + O(x^6)\right]\left[3x - \frac{27x^3}{3} + \frac{3\cdot 81x^5}{5} + O(x^7)\right]$

$= \frac{3}{1-x^2}\left[1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + O(x^6)\right]\left[x - 3x^3 + \frac{81x^5}{5} + O(x^7)\right] =$

$= \frac{3}{1-x^2}\left[x - (2+3)x^3 + \left(\frac{2}{3} + 6 + \frac{81}{5}\right)x^5 + O(x^7)\right] = \left[\text{Använd geom. serieutv.}\right]$

$= 3\left[1 + x^2 + x^4 + O(x^6)\right]\cdot\left[x - 5x^3 + \frac{343}{15}x^5 + O(x^7)\right] =$

$= 3\left[x + (1-5)x^3 + \left(\frac{343}{15} - 5 + 1\right)x^5 + O(x^7)\right]$

$= 3x - 12x^3 + \frac{283}{5}x^5 + O(x^7)$ (Svar)

Men entydighetssatsen för Maclaurinutv

ger $a_5 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{283}{5} \Rightarrow a_5 = 24\cdot 283 = 6792$

(Svar)

4) $x^3y'''(x)+2x^2y''(x)+xy'(x)+3y(x)=x^4$ (för $x>0$)

Eulers diff.ekv. Sätt $x=e^t \Leftrightarrow t=\ln x$

Använd formeln $x^k\frac{d^ky}{dx^k}=\theta(\theta-1)\cdots(\theta-k+1)y$ där $\theta=\frac{d}{dt}$

$\therefore \left[\theta(\theta-1)(\theta-2)+2\theta(\theta-1)+\theta+3\right]y=e^{4t}$

$\Leftrightarrow \left[\theta^3-\theta^2+\theta+3\right]y=e^{4t}$

1) Homogen lösning y_h

Kar.ekv. $r^3-r^2+r+3=0 \Rightarrow r_1=-1$

$\Rightarrow (r+1)(r^2-2r+3)=0 \Rightarrow r_{2,3}=1\pm i\sqrt{2}$

$\Rightarrow y_h=C_1e^{-t}+C_2e^{(1+i\sqrt{2})t}+C_3e^{(1-i\sqrt{2})t}\equiv$

$\equiv C_1e^{-t}+e^t\left[A\cos(t\sqrt{2})+B\sin(t\sqrt{2})\right]$ (Reell form)

2) Part. lösning y_p (Ickeresonans!)

Ansätt $y_p=ae^{4t} \Rightarrow$

$(64-16+4+3)ae^{4t}=e^{4t}\Rightarrow a=\frac{1}{55}$

$\Rightarrow y_p=\frac{e^{4t}}{55}=\frac{x^4}{55}$ (ty $e^t=x$)

3) Allmän lösning: $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=$

$=\frac{C_1}{x}+x\left[A\cos(\sqrt{2}\ln x)+B\sin(\sqrt{2}\ln x)\right]+\frac{x^4}{55}$ (Svar)

5a) $f_n(x)=\frac{nx}{n^2x^3+1}\xrightarrow[(n\to\infty)]{\text{punktvis}}f(x)\equiv 0$ för $x\geq 0$

Bilda $f_n'(x)=\frac{n(1-2n^2x^3)}{(n^2x^3+1)^2}=0$ för $x=(\ldots)\frac{1}{n^{2/3}\sqrt[3]{2}}$

$(f_n(x))_{max} = f_n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}\, n^{2/3}}\right) = \frac{2n^{1/3}}{3\sqrt[3]{2}} \to \infty$, då $n \to \infty$

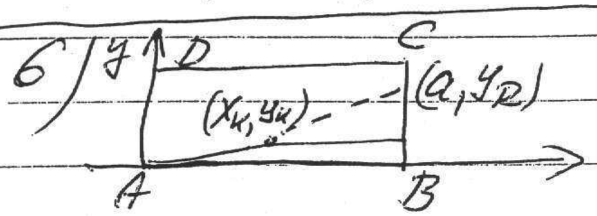
Svar: $\therefore$ **Ej** likformig konvergens på $[0, \infty[$

b) $f_n(x) = n^3 x^3 e^{-nx} \xrightarrow[(n\to\infty)]{\text{punktvis}} f(x) \equiv 0$ för $x \geq 0$

Bilda $f_n'(x) = n^4 x^2\left(\frac{3}{n} - x\right)e^{-nx} = 0$ för $x = \frac{3}{n}$

$\Rightarrow (f_n(x))_{max} = f_n\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{27}{e^3} \not\to 0$, då $n \to \infty$

$\therefore$ Ej likf. konv för $0 \leq x < \infty$ | Svar: a), b) **Ej** likf konv

6) 

Givet: $v_k = 3 v_R$

(Sätt $x_k = x \Rightarrow y_k = y = y(x)$)

Kattens väglängd $= \int_0^x \sqrt{1+(y'(z))^2}\, dz = 3 y_R$

Villkor: $\frac{dy}{dx} = \frac{y_R - y}{a-x} = \left[\frac{1}{3}\int_0^x \sqrt{1+(y'(z))^2}\, dz - y\right] \Big/ (a-x)$

$\Rightarrow (a-x)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\int_0^x \sqrt{1+(y'(z))^2}\, dz - y$ (Diff ekv för kattens väg)

Derivering m.a.x ger $\Rightarrow (-1)\frac{dy}{dx} + (a-x)\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3}\sqrt{1+(y'(x))^2} - \frac{dy}{dx}$

Sätt $y'(x) = z(x) \Rightarrow (a-x)\frac{dz}{dx} = \frac{1}{3}\sqrt{1+z^2}$ (Sep ekv!)

$\Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = C_1 + \int \frac{dx}{3(a-x)} \Rightarrow \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) = C_1 + \ln \frac{1}{\sqrt[3]{a-x}}$

$\Rightarrow z + \sqrt{1+z^2} = \frac{\tilde{C}_1}{\sqrt[3]{a-x}}$ där $z = y' = 0$ för $x = 0$ $\Rightarrow \tilde{C}_1 = \sqrt[3]{a}$

$\therefore \sqrt{1+z^2} = \sqrt[3]{\frac{a}{a-x}} - z \Rightarrow y'(x) = z = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{a-x}} - \sqrt[3]{\frac{a-x}{a}}\right)$

$\Rightarrow y(x) = C_2 - \frac{3\sqrt[3]{a}}{4}(a-x)^{2/3} + \frac{3}{8a^{1/3}}(a-x)^{4/3}$ där $C_2 = \frac{3a}{8}$

(Kattens väg!) där $y(a) = \boxed{\frac{3a}{8} \leq b}$ villkor för fångst

[Svar!

RP