Matematisk analys, fortsättning
F1

TMA 976 (TMA 975)

TENTAKIT

Datum	Tenta	Lösning	Svar
2000-08-18	x	x	
2001-12-17	x	x	
2002-04-06	x	x	
2002-08-23	x	x	
2002-12-16	x		
2003-04-17	x	x	
2003-08-22	x	x	
2003-12-13	x	x	
2004-04-17	x	x	
2004-08-20	x	x	
2004-12-11	x	x	
2005-04-02	x	x	
2005-08-19	x	x	

22 november 2005

Tentamensskrivning i **Reell matematisk analys F1, del A (TMA975)** den 18/8-2000, kl 8.45-12.45

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefon: Fredrik Altenstedt, 0740-459022

OBS ! Ange namn, personnummer, linje och inskrivningsår.

---

1. Bestäm $y(x)$, om $\left(x^2+1\right)y'(x) = x\left(y^2-1\right)$ och $y(0) = 2$. (7p)

2. Undersök om följande serier konvergerar

   a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$, c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2}$. (8p)

3. a) Bestäm Maclaurinpolynomet till funktionen $f(x) = \dfrac{\cos(2x)\cdot\arctan(3x)}{1-x^2}$

   med termer t.o.m. x^5.

   b) Bestäm derivatan $f^{(5)}(0)$. (8p)

4. Bestäm på reell form allmänna lösningen (för $x > 0$) till differentialekvationen $x^3y'''(x) + 2x^2y''(x) + xy'(x) + 3y(x) = x^4$. (8p)

5. Undersök om funktionsföljden $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ är likformigt konvergent för $x \geq 0$,

   då $f_n(x)$ är a) $\dfrac{nx}{n^2x^3+1}$, b) $n^3x^3e^{-nx}$. (7p)

6. I ett rektangulärt rum $ABCD$ upptäcker en katt, som befinner sig i hörnet A, en råtta i hörnet B, som börjar springa mot ett hål i hörnet C. Katten, som hela tiden springer i riktning mot råttan, antages springa tre gånger så fort som råttan. Bestäm en ekvation för kattens väg, samt bestäm villkor på sidlängderna $|AB| = a$ och $|BC| = b$ för att katten fångar råttan. (7p)

7. Bevisa, att om serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ är konvergent, så är potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergent för alla x sådana att $|x| < |x_0|$. (8p)

8. Formulera och bevisa en förskjutningsregel för differentialoperatorer av typ $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)D^k$, där $D = \dfrac{d}{dx}$. (7p)

/RP

VAR GOD VÄND !

Några Maclaurinutvecklingar

1) $$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

2) $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

3) $$\sin x = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \cos(\theta x)$$

4) $$\cos x = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-1)^{m+1} x^{2m+2}}{(2m+2)!} \cos(\theta x)$$

5) $$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$$

6) $$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)}$$

7) $$\arctan x = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{2k-1} + \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)(1+\theta x^2)}$$

Stirlings formel:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \bullet (1+\varepsilon_n)$$

Reell Matematisk Analys del A, F1, 18/8−00 (1)

1) $(x^2+1)\,y'(x) = x(y^2-1)$ med $y(0)=2$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x(y^2-1)}{x^2+1}$ (Sep. var.) $\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2-1} = C_0 + \int \frac{x\,dx}{x^2+1}$

$\therefore C_0 + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \int \frac{dy}{(y-1)(y+1)} \equiv \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy \equiv \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|$

$\Rightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 2C_0 + \ln(x^2+1) \Rightarrow \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{2C_0}\cdot(x^2+1)$

$\Rightarrow \frac{y-1}{y+1} = C\,(x^2+1)$ där $C = \pm e^{2C_0}$

Men $\begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2-1}{2+1} = C(1+0) \Rightarrow C = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(y-1) = (y+1)(x^2+1) \Rightarrow y = \frac{3+x^2+1}{3-(x^2+1)} \equiv \underline{\underline{\frac{x^2+4}{2-x^2}}}$ (för $|x|<\sqrt{2}$) (Svar)

---

2) a) $\sum_2^\infty \frac{1}{n\ln n}$ $\underline{\text{div.}}$, ty $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \left[\ln\ln x\right]_2^\infty$ divergent.

Använd $\underline{\text{integralkrit.}}$ med $f(x) = \frac{1}{x\ln x} > 0$ och $\underline{\text{avtagande}}$

b) $\sum_2^\infty \frac{1}{n(\ln n)^2}$ $\underline{\text{konv.}}$, ty integralkriteriet

ger med $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ (pos och $\underline{\text{avtagande}}$)

att $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Sätt } \ln x = t & x=2 \Leftrightarrow t=\ln 2 \\ \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt & x\to\infty \Leftrightarrow t\to\infty \end{array}\right]$

$= \int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_{\ln 2}^\infty$ konvergent

c) $\sum_2^\infty \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2}$ Sätt $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2} > 0$

2c) (forts) ②

där $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(\ln n)^2} \equiv \frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt[4]{n}}{\ln n}\right)^2 > \frac{1}{n}$ (för stora n)

ty $\frac{\sqrt[4]{n}}{\ln n} = \frac{n^{1/4}}{\ln n} \to \infty$, då $n \to \infty$

Men $\sum_N^\infty \frac{1}{n}$ div $\Rightarrow \sum_N^\infty a_n$ divergent

enligt jämförelsekriteriet (för pos. serier) på olikhetsform. Svar: a) och c) Div, b) Konv

---

3) $f(x) = \frac{\cos(2x) \cdot \arctan(3x)}{1-x^2} = \left(\text{Maclaurinutv. täljaren först}\right)$

$= \frac{1}{1-x^2}\left[1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{24} + O(x^6)\right]\left[3x - \frac{27x^3}{3} + \frac{3 \cdot 81x^5}{5} + O(x^7)\right]$

$= \frac{3}{1-x^2}\left[1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + O(x^6)\right]\left[x - 3x^3 + \frac{81x^5}{5} + O(x^7)\right] =$

$= \frac{3}{1-x^2}\left[x - (2+3)x^3 + \left(\frac{2}{3} + 6 + \frac{81}{5}\right)x^5 + O(x^7)\right] = \left(\text{Använd geom. serieutv.}\right)$

$= 3\left[1 + x^2 + x^4 + O(x^6)\right] \cdot \left[x - 5x^3 + \frac{343}{15}x^5 + O(x^7)\right] =$

$= 3\left[x + (1-5)x^3 + \left(\frac{343}{15} - 5 + 1\right)x^5 + O(x^7)\right]$

$= 3x - 12x^3 + \frac{283}{5}x^5 + O(x^7)$ (Svar)

Men entydighetssatsen för Maclaurinutv ger $a_5 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{283}{5} \Rightarrow a_5 = 24 \cdot 283 = 6792$

(Svar)

(3)

4) $x^3y'''(x)+2x^2y''(x)+xy'(x)+3y(x)=x^4$ (för $x>0$)

Eulers diff.ekv. Sätt $x=e^t \Leftrightarrow t=\ln x$

Använd formeln $x^k\frac{d^ky}{dx^k}=\theta(\theta-1)\cdots(\theta-k+1)y$, där $\theta=\frac{d}{dt}$

$\therefore\ [\theta(\theta-1)(\theta-2)+2\theta(\theta-1)+\theta+3]y=e^{4t}$

$\Leftrightarrow [\theta^3-\theta^2+\theta+3]y=e^{4t}$

1) Homogen lösning y_h

Kar.ekv. $r^3-r^2+r+3=0 \Rightarrow r_1=-1$

$\Rightarrow (r+1)(r^2-2r+3)=0 \Rightarrow r_{2,3}=1\pm i\sqrt{2}$

$\Rightarrow y_h=C_1e^{-t}+C_2e^{(1+i\sqrt{2})t}+C_3e^{(1-i\sqrt{2})t}\equiv$

$\equiv C_1e^{-t}+e^t[A\cos(t\sqrt{2})+B\sin(t\sqrt{2})]$ (Reell form)

2) Part. lösning y_p (Ickeresonans!)

Ansätt $y_p=ae^{4t} \Rightarrow$

$(64-16+4+3)ae^{4t}=e^{4t} \Rightarrow a=\frac{1}{55}$

$\Rightarrow y_p=\frac{e^{4t}}{55}=\frac{x^4}{55}$ (ty $e^t=x$)

3) Allmän lösning: $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=$

$=\frac{C_1}{x}+x[A\cos(\sqrt{2}\ln x)+B\sin(\sqrt{2}\ln x)]+\frac{x^4}{55}$ (Svar)

5a) $f_n(x)=\frac{nx}{n^2x^3+1}\xrightarrow[(n\to\infty)]{\text{punktvis}} f(x)\equiv 0$ för $x\geq 0$

Bilda $f_n'(x)=\frac{n(1-2n^2x^3)}{(n^2x^3+1)^2}=0$ för $x=\frac{(+)}{(-)}\frac{1}{n^{2/3}\sqrt[3]{2}}$

$$(f_n(x))_{max} = f_n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}\, n^{2/3}}\right) = \frac{2n^{1/3}}{3\sqrt[3]{2}} \to \infty, \text{ då } n \to \infty$$

∴ Ej likformig konvergens på $[0, \infty[$

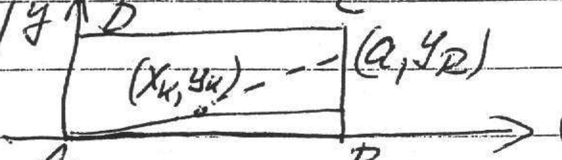
b) $f_n(x) = n^3x^3e^{-nx} \xrightarrow[(n\to\infty)]{\text{punktvis}} f(x)\equiv 0$ för $x\ge 0$

Bilda $f_n'(x) = n^4x^2\left(\frac{3}{n}-x\right)e^{-nx}=0$ för $x=\frac{3}{n}$

$\Rightarrow (f_n(x))_{max} = f_n\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{27}{e^3} \not\to 0$, då $n\to\infty$

∴ Ej likf. konv för $0\le x<\infty$ | Svar: a), b) Ej likf konv

6)



Givet: $v_k = 3v_R$

$\to$ (Sätt $x_k = x \Rightarrow y_k = y = y(x)$)

Kattens väglängd $= \int_0^x \sqrt{1+(y'(\xi))^2}\,d\xi = 3y_R$

Villkor: $\frac{dy}{dx} = \frac{y_R - y}{a-x} = \left[\frac{1}{3}\int_0^x\sqrt{1+(y'(\xi))^2}\,d\xi - y\right]\Big/(a-x)$

$\Rightarrow (a-x)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\int_0^x\sqrt{1+(y'(\xi))^2}\,d\xi - y$ (Diff ekv för kattens väg)

Derivering m.a.p. x ger $\Rightarrow \cancel{(-1)\frac{dy}{dx}} + (a-x)\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3}\sqrt{1+(y'(x))^2} \cancel{- \frac{dy}{dx}}$

Sätt $y'(x)=z(x) \Rightarrow (a-x)\frac{dz}{dx} = \frac{1}{3}\sqrt{1+z^2}$ (Sep var!)

$\Rightarrow \int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = C_1 + \int\frac{dx}{3(a-x)} \Rightarrow \ln(z+\sqrt{z^2+1}) = C_1 + \ln\frac{1}{\sqrt[3]{a-x}}$

$\Rightarrow z+\sqrt{1+z^2} = \frac{\tilde{C}_1}{\sqrt[3]{a-x}}$ där $\left| \begin{array}{l} z=y'=0 \\ \text{för } x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \tilde{C}_1 = \sqrt[3]{a}$

∴ $\sqrt{1+z^2} = \sqrt[3]{\frac{a}{a-x}} - z \Rightarrow y'(x)\equiv z = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{a-x}} - \sqrt[3]{\frac{a-x}{a}}\right)$

$\Rightarrow y(x) = C_2 - \frac{3\sqrt[3]{a}}{4}(a-x)^{2/3} + \frac{3}{8a^{1/3}}(a-x)^{4/3}$ där $C_2 = \frac{3a}{8}$

(Kattens väg!) där $y(a) = \boxed{\frac{3a}{8} \le b}$ villkor för fångst

Svar:

RP

MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i
Reell Matematisk Analys F, del A, (TMA 975)
Datum: 2001-12-17, 08.45 - 12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt:Elin Götmark tel. 0740 459022

---

1. Lös differensekvationen $y_{n+2} + 2y_{n+1} - 3y_n = n, \quad y_0 = \frac{1}{16}, \quad y_1 = 0$. (7p)

2. Beräkna ett närmevärde till integralen $\int_0^1 \sin(x\sqrt{x})dx$ med ett fel som är mindre än 2×10^{-4}. (8p)

3. Bestäm konvergensintervallet och summan för potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k$. (7p)

4. Undersök om gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar, då $f(x,y)$ är (7p)

   a) $\dfrac{xy^2 + y^3}{x^2 + xy}$ b) $\dfrac{(e^{xy} - 1)x}{x^2 + y^2}$

5. Lös differentialekvationen $y'' + 2xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ (8p)

   med hjälp av en potensserieansats, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

   Ange lösningen på så enkel form som möjligt.

6. En viss fiskart är fredad och den antas då följa den logistiska tillväxtekvationen (8p)

   $$\frac{dN}{dt} = rN(K-N)$$

   där $N(t)$ är fiskbeståndets storlek och där r och K är positiva konstanter.
   Fiskestoppet för fiskarten upphävs och tillstånd ges att fiska mängden F per tidsenhet (t.ex per år). Vi väljer att skriva $F = \frac{rs}{4}K^2$ där s är en konstant sådan att $0 < s < 1$.

   a) Visa att $N(t)$ nu uppfyller differentialekvationen

   $$\frac{dN}{dt} = r(N-K_1)(K_2-N)$$

   b) Bestäm lösningen till ekvationen om begynnelsebetingelserna ges av $N(0) = N_0$.

   c) Antag att $N_0 < K_1$. Visa att då är $N(t)$ avtagande och avgör när fiskarten är utrotad.

7. Låt $y'' + ay' + by = 0$ vara en differentialekvation med konstanta koefficienter a och b. (7p)
   Antag vidare att $r_1 \neq r_2$ och att dessa är rötterna till differentialekvationens karakteristiska ekvation. Visa att då ges den allmänna lösningen av $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, där C_1 och C_2 är två konstanter som kan väljas godtyckligt.

8. a) Definiera följande begrepp (8p)
   1) *serie* och *konvergent serie*
   2) *likformig konvergens* på en mängd M, för en funktionsföljd $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

   b) Formulera Weierstrass Majorantsats.

   c) Ge ett exempel* på en likformigt konvergent *funktionsserie* och visa ditt påstående.
   icke trivialt

*) Termerna i serien skall alla bero av variabeln x.

MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i
Reell Matematisk Analys F, del A, (TMA 975)
Datum: 2001-12-17, 08.45 - 12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Elin Götmark tel. 0740 459022

1. Lös differensekvationen $y_{n+2} + 2y_{n+1} - 3y_n = n$, $y_0 = \frac{1}{16}$, $y_1 = 0$. (7p)

2. Beräkna ett närmevärde till integralen $\int_0^1 \sin(x\sqrt{x})dx$ med ett fel som är mindre än 2×10^{-4}. (8p)

3. Bestäm konvergensintervallet och summan för potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k$. (7p)

4. Undersök om gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar, då $f(x,y)$ är (7p)

   a) $\frac{xy^2 + y^3}{x^2 + xy}$ b) $\frac{(e^{xy}-1)x}{x^2+y^2}$

5. Lös differentialekvationen $y'' + 2xy' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (8p)

   med hjälp av en potensserieansats, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

   Ange lösningen på så enkel form som möjligt.

6. En viss fiskart är fredad och den antas då följa den logistiska tillväxtekvationen (8p)

   $$\frac{dN}{dt} = rN(K-N)$$

   där $N(t)$ är fiskbeståndets storlek och där r och K är positiva konstanter.
   Fiskestoppet för fiskarten upphävs och tillstånd ges att fiska mängden F per tidsenhet (t.ex per år). Vi väljer att skriva $F = \frac{rs}{4}K^2$ där s är en konstant sådan att $0 < s < 1$.

   a) Visa att $N(t)$ nu uppfyller differentialekvationen

   $$\frac{dN}{dt} = r(N-K_1)(K_2-N)$$

   b) Bestäm lösningen till ekvationen om begynnelsebetingelserna ges av $N(0) = N_0$.

   c) Antag att $N_0 < K_1$. Visa att då är $N(t)$ avtagande och avgör när fiskarten är utrotad.

7. Låt $y'' + ay' + by = 0$ vara en differentialekvation med konstanta koefficienter a och b. (7p)
   Antag vidare att $r_1 \neq r_2$ och att dessa är rötterna till differentialekvationens karakteristiska ekvation. Visa att då ges den allmänna lösningen av $y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$, där C_1 och C_2 är två konstanter som kan väljas godtyckligt.

8. a) Definiera följande begrepp (8p)
   1) *serie* och *konvergent serie*
   2) *likformig konvergens* på en mängd M, för en funktionsföljd $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
   b) Formulera Weierstrass Majorantsats.
   c) Ge ett exempel* på en likformigt konvergent *funktionsserie* och visa ditt påstående.
   icke trivialt

*) Termerna i serien skall alla bero av variabeln x.

Lösningar till Reell Matematisk Analys F, del A, 17/12, 2001.

1 $y_{n+2} + 2y_{n+1} - 3y_n = n$, $y_0 = \frac{1}{16}$, $y_1 = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^2 + 2r - 3 = 0$, $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -3, 1$

så homogen lösning $y_n^h = C_1(-3)^n + C_2$.

För att finna en partikulärlösning så är den "normala" ansatsen $y_n^p = An + B$, men B ingår i y_n^h ($C_1 = 0$, $C_2 = B$),

så vi ansätter $y_n^p = n(An+B) = An^2 + Bn$.

$y_{n+1}^p = A(n+1)^2 + B(n+1) = An^2 + (2A+B)n + A + B$

$y_{n+2}^p = A(n+2)^2 + B(n+2) = An^2 + (4A+B)n + 4A + 2B$

Dvs, efter insättning i differensekvationen,

$$\underbrace{(A + 2A - 3A)}_{=0}n^2 + \underbrace{(4A+B+4A+2B-3B)}_{=8A}n + \underbrace{4A+2B+2A+2B}_{=6A+4B} = n$$

$\begin{cases} 8A = 1 \\ 6A + 4B = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} A = \frac{1}{8} \\ B = -\frac{3}{16} \end{cases}$ $\therefore y_n^p = \frac{1}{8}n^2 - \frac{3}{16}n$.

Den allmänna lösningen är

$$y_n = y_n^h + y_n^p = C_1(-3)^n + C_2 + \frac{1}{8}n^2 - \frac{3}{16}n$$

Men $\begin{cases} \frac{1}{16} = y_0 = C_1 + C_2 \\ 0 = y_1 = -3C_1 + C_2 + \frac{1}{8} - \frac{3}{16} \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{1}{16} \end{cases}$

Svar: $y_n = \frac{1}{8}n^2 - \frac{3}{16}n + \frac{1}{16} = \frac{1}{16}(2n^2 - 3n + 1)$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$$I = \int_0^1 \sin(x\sqrt{x})\, dx$$

$$\sin t = \underbrace{t - \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{120}t^5 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}}_{= P_{2n-1}} + \underbrace{(-1)^{n+1}\cos(\theta t)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{= R_{2n+1}(t)}$$

$$I = \int_0^1 P_{2n-1}(x\sqrt{x})\, dx + \underbrace{\int_0^1 R_{2n+1}(x\sqrt{x})\, dx}_{= \varepsilon}$$

Vi söker n s.a. $|\varepsilon| < 2 \cdot 10^{-4}$.

$$|R_{2n+1}(x\sqrt{x})| \le \frac{(x\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x^{3n+\frac{3}{2}}}{(2n+1)!} \le \frac{x^{3n+1}}{(2n+1)!} \qquad (0 \le x \le 1)$$

Alltså är

$$|\varepsilon| \le \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{3n+1}\, dx = \frac{1}{(3n+1)(2n+1)!}.$$

Vi söker alltså n s.a. $(3n+1)(2n+1)! \ge \frac{1}{2}10^4 = 5000$.

För

$n = 2$, $VL = 7 \cdot 5! = 840$

$n = 3$, $VL = 10 \cdot 7! = 50400$!

Dvs

$$I = \int_0^1 P_5(x\sqrt{x})\, dx + \varepsilon = \int_0^1 \left(x^{3/2} - \tfrac{1}{6}x^{\frac{9}{2}} + \tfrac{1}{120}x^{\frac{15}{2}}\right) dx + \varepsilon$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{11} + \frac{1}{120}\cdot\frac{2}{17} + \varepsilon = \frac{61}{165} + \frac{1}{17 \cdot 110} + \varepsilon = \frac{495}{1337} \pm 2 \times 10^{-5}$$

$$I = \underline{\underline{\frac{495}{1337} \pm 2 \times 10^{-5}}} = \underline{\underline{0.3702 \pm 10^{-4}}} \quad !$$

3.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)(k+1)}{2}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+2}{2}\frac{d}{dx}x^{k+1} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+2}{2}x^{k+1} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{d}{dx}x^{k+2} \overset{(*)}{=} \frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}x^{k+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty}x^k\right) \overset{(**)}{=} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2 \cdot \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(-x-1+\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(-1 + \frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)^3}, \qquad |x| < 1.$$

$(*)$: Potensserier kan deriveras termvis och den deriverade serien har samma konvergensradie som den ursprungliga

$(**)$: Här känner vi igen den geometriska serien som ju har konvergensradie $R = 1$.

Detta visar att den ursprungliga potensserien också har konvergensradie $R = 1$.

För $|x| = 1$ går termerna i serien inte mot noll vilket innebär att potensserien divergerar i dessa fall.

<u>Svar</u> $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k$ konvergerar omm $|x| < 1$

och för dessa x är $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^3}$

a) $f(x,y) = \dfrac{xy^2+y^3}{x^2+xy}$

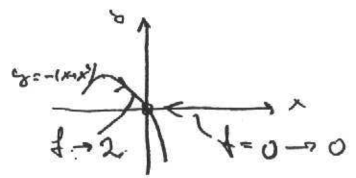
Vi ser att $f(x,0) = 0$

och att $f(x,-x-x^2) = \dfrac{-x(x+x^2)^2-(x+x^2)^3}{x^2-x^2-x^3} = \dfrac{x^3(1+x)^2+x^3(1+x)^3}{x^3}$

$\to 2$ då $x \to 0$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

existerar ej



eftersom $f(x,y)$ närmar sig olika värde längs med olika banor in mot origo $((x,y)\to(0,0))$.

b) $f(x,y) = \dfrac{(e^{xy}-1)x}{x^2+y^2} = \dfrac{(1+xy+B(xy)\cdot x^2y^2-1)x}{x^2+y^2}$

$= \dfrac{x^2y\,(1+B(x,y)\,xy)}{x^2+y^2}$. Med $r=\sqrt{x^2+y^2}$ så

finner vi att

$|f(x,y)| \le \dfrac{|x|^2|y|\,|1+B(x,y)\,xy|}{r^2} \le \begin{bmatrix} |x| \le r \\ |y| \le r \end{bmatrix}$

$\le r \cdot \underbrace{|1+B(x,y)\,xy|}_{\text{begränsat}} \to 0$ då $r \to 0$

Dvs $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

5. $y'' + 2xy' + 2y = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

Potensserieansats: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$

$\underline{\text{OBS}}$: $y(0) = \underline{a_0 = 1}$, $y'(0) = \underline{a_1 = 0}$.

$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $x y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$

$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \begin{bmatrix} n=m+2 \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m$

(byt m mot n.

Insättning i Differentialekvationen ger att

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + 2na_n + 2a_n)x^n = 0 \quad \left(= \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n\right)$$

Identifiering av koefficienter ger:

$(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n = 0$

$\boxed{a_{n+2} = -\dfrac{2}{n+2} a_n}$, $n = 0,1,2,\dots$

$a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{2}{3}\cdot 0 = 0 \Rightarrow a_5 = -\frac{2}{5}\cdot 0 = 0$ osv.

$\therefore a_{2m+1} = 0$, $m = 0,1,2,\dots$

$a_0 = 1 \Rightarrow a_2 = -\frac{2}{2}a_0 = -1 \Rightarrow a_4 = -\frac{2}{4}a_2 = \frac{1}{2}$

$a_{2m} = -\frac{2}{2m}a_{2m-2} = -\frac{1}{m}a_{2m-2} = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m-1}a_{2m-4} = \dots = \frac{-1}{m}\cdot\frac{-1}{m-1}\cdots\frac{-1}{1}a_0$

$= (-1)^m \cdot \frac{1}{m!}\, a_0 = \underline{\underline{\frac{(-1)^m}{m!}}}$

Dvs $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} x^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^m}{m!} = \underline{\underline{e^{-x^2}}}$!

$\underline{\text{Svar}}$: $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} x^{2m} = e^{-x^2}$, $\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$

är lösningen till diff.ekvationen!

6. a) Tillväxtekvationen utan yttre påverkan är

$$\frac{dN}{dt} = rN(K-N).$$

Om fiske tillåts med mängden F per tidsenhet så påverkas tillväxten ($\frac{dN}{dt}$) med $-F$!

Dvs vi får ekvationen

$$\frac{dN}{dt} = rN(K-N) - F = rN(K-N) - \frac{rs}{4}K^2.$$

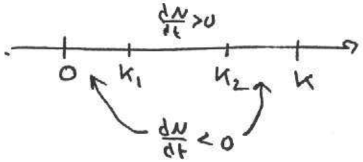
$$HL = -r\left(N^2 - KN + \frac{s}{4}K^2\right) = r(N-K_1)(K_2-N)$$

ty ekv. $x^2 - Kx + \frac{s}{4}K^2 = 0$ har rötterna

$$x = \frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2}{4} - s\frac{K^2}{4}} = \frac{K}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-s}\right)$$

och $K_1 = \frac{K}{2}\left(1-\sqrt{1-s}\right)$, $K_2 = \frac{K}{2}\left(1+\sqrt{1-s}\right)$.

b) $$\frac{dN}{dt} = r(N-K_1)(K_2-N)$$



Detta ger

$$\frac{dN}{(N-K_1)(K_2-N)} = r\,dt \qquad \text{(separabel!)}$$

$$\frac{1}{K_2-K_1}\left(\frac{1}{N-K_1} + \frac{1}{K_2-N}\right)dN = \int r\,dt \qquad (\text{sätt } \alpha = K_2-K_1)$$

$$\ln|N-K_1| - \ln|K_2-N| = \alpha r t + C$$

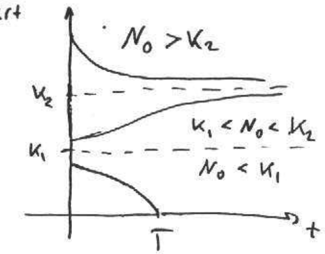
$$\ln\left|\frac{N-K_1}{K_2-N}\right| = \alpha r t + C$$

$$\frac{N-K_1}{K_2-N} = \underbrace{\pm e^{C}}_{=c_0} e^{\alpha r t} \quad , \; N(0)=N_0 \iff c_0 = \frac{N_0-K_1}{K_2-N_0}$$

$$N - K_1 = K_2 c_0 e^{\alpha r t} - N c_0 e^{\alpha r t}$$

$$N(1+c_0e^{\alpha r t}) = K_1 + (K_2-K_1+K_1)c_0e^{\alpha r t} = K_1(1+c_0e^{\alpha r t}) + \alpha c_0 e^{\alpha r t}$$

$$N(t) = K_1 + \alpha c_0 \frac{e^{\alpha r t}}{1+c_0e^{\alpha r t}} = K_1 + \alpha\frac{c_0}{c_0+e^{-\alpha r t}}$$



c) För $N_0 < K_1$ så är

$$\frac{dN}{dt} = r\underbrace{(N-K_1)}_{<0 \text{ vid } t=0}\overbrace{(K_2-N)}^{>0}$$

dvs $N(t)$ avtar vilket innebär att $N-K_1$ också fortsättningsvis är < 0 !

Mer precist så är

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt}\left(K_1 + \alpha\frac{c_0}{c_0+e^{-\alpha r t}}\right) = \alpha c_0\cdot(-1)\cdot(-\alpha r)\frac{1}{(c_0+e^{-\alpha r t})^2}$$

$$= \underbrace{\frac{\alpha^2 r}{(c_0+e^{-\alpha r t})^2}}_{>0}\cdot\underbrace{c_0}_{=\frac{N_0-K_1}{K_2-N_0}<0} < 0 \quad !$$

Om $N(t)=0$ vid tiden $t=T$ så är

$$K_1 + \frac{\alpha c_0}{c_0+e^{-\alpha r T}} = 0 ,$$

$$\frac{c_0}{c_0+e^{-\alpha r T}} = -\frac{K_1}{\alpha} , \quad \frac{c_0+e^{-\alpha r T}}{c_0} = -\frac{\alpha}{K_1}$$

$$e^{-\alpha r T} = -c_0\left(1+\frac{\alpha}{K_1}\right) = -c_0\frac{K_1+K_2-K_1}{K_1} = -\frac{N_0-K_1}{K_2-N_0}\cdot\frac{K_2}{K_1}$$

$$= \frac{K_1-N_0}{K_2-N_0}\cdot\frac{K_2}{K_1} \quad , \quad -\alpha r T = \ln\left(\frac{K_1-N_0}{K_2-N_0}\,\frac{K_2}{K_1}\right)$$

$$T = \frac{1}{(K_2-K_1)r}\cdot\ln\left(\frac{K_2-N_0}{K_1-N_0}\cdot\frac{K_1}{K_2}\right)$$

MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i
Reell Matematisk Analys F, del A, (TMA 975)
Datum: 2002-04-06, 08.45 - 12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Georgios Foufas tel. 0740 459022

---

1. Maclaurinutveckla funktionen $f(x) = \ln(1+x^2)\sin x$ med en restterm av ordning 7. (8p)
Beskriv i en figur hur funktionen ser ut för x nära 0 och avgör om $f(x)$ har ett lokalt extremum i $x = 0$.

2. Lös differensekvationen (7p)
$$y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 1 + 2^n.$$

3. Lös differentialekvationen (8p)
$$y''' + y'' + y' + y = e^{-x}.$$
Lösningarna skall ges på reell form.

4. Beräkna summan (7p)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!}.$$

5. Tangenten till en godtycklig punkt P på en kurva skär x-axeln i A och y-axeln i B. (7p)
A är mittpunkt på PB. Bestäm kurvan om den går genom (1,1).

6. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt[3]{1-(x/n)^2})$. (7p)

7. Formulera och bevisa Maclaurins formel med Lagranges restterm (8p)

8. Formulera och bevisa integralkriteriet för positiva serier. (8p)

/TG

MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i
Reell Matem Analys F, de TMA 975)
Datum: 2002-04-06, 08.45 - 12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Georgios Foufas tel. 0740 459022

1. Maclaurinutveckla funktionen $f(x) = \ln(1+x^2)\sin x$ med en restterm av ordning 7. Beskriv i en figur hur funktionen ser ut för x nära 0 och avgör om $f(x)$ har ett lokalt extremum i $x = 0$. (8p)

2. Lös differensekvationen (7p)
$$y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 1 + 2^n.$$

3. Lös differentialekvationen (8p)
$$y''' + y'' + y' + y = e^{-x}.$$
Lösningarna skall ges på reell form.

4. Beräkna summan (7p)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!}.$$

5. Tangenten till en godtycklig punkt P på en kurva skär x-axeln i A och y-axeln i B. A är mittpunkt på PB. Bestäm kurvan om den går genom (1,1). (7p)

6. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt[3]{1-(x/n)^2})$. (7p)

7. Formulera och bevisa Maclaurins formel med Lagranges restterm (8p)

8. Formulera och bevisa integralkriteriet för positiva serier. (8p)

Lösningar till tentamen i Reell Matematisk Analys F, del A, TMA 975, 2002-04-06.

1. $f(x) = \ln(1+x^2)\sin x$ (8p)

Vi har $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + B_1(t)\cdot t^4$, $B_1(t)$ och $B_2(x)$ är begr. nära 0.

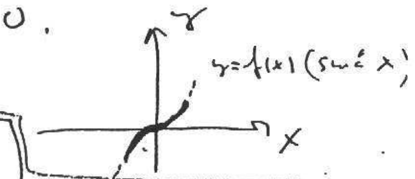
och $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + B_2(x)x^7$

Dvs $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + B(x)x^8$ ($B(x)$ är begr. för x nära 0)

och
$$f(x) = (x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + B(x)x^8)(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + B(x)x^7) =$$
$$= x^3 + x^5(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}) + x^7(\frac{1}{120} + \frac{1}{12}) + B(x)x^9$$
$$= x^3 - \frac{2}{3}x^5 + \frac{11}{120}x^7 + B(x)x^9 \quad \text{(Restterm av ordning 9)}$$
$$= \underline{\underline{x^3 - \frac{2}{3}x^5 + B(x)x^7}} \quad \text{(Restterm av ordning 7)}$$

För x nära 0 så ser vi att $f(x) \approx x^3$ ($f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$)

dvs f har en terasspunkt i $x = 0$.



2. (*) $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 1 + 2^n$ (7p)

Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - r - 2 = 0$; $\begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 2 \end{cases}$

Dvs den allmänna homogena lösningen är $\underline{\underline{y_n^h = c_1\cdot(-1)^n + c_2\cdot 2^n}}$

Vi ansätter som partikulärlösning

$y_n^p = a + bn\cdot 2^n$ ($b\cdot 2^n$ duger ej eftersom detta är en homogen lösning) (Resonans!)

dvs $y_{n+1}^p = a + b(n+1)2^{n+1}$
$= a + 2b\cdot 2^n + 2bn\,2^n$

$y_{n+2}^p = a + b(n+2)2^{n+2}$
$= a + 8b2^n + 4bn\,2^n$

Insättning i (*) ger ekv.

$-2a + 6b\cdot 2^n + 0\cdot bn\,2^n = 1 + 2^n$

Alltså är $a = -\frac{1}{2}$ och $b = \frac{1}{6}$

Svar: $y_n = y_n^h + y_n^p =$
$= c_1\cdot(-1)^n + c_2\cdot 2^n - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}n\cdot 2^n$

c_1 & c_2 är två godt. konst

3. (*) $y''' + y'' + y' + y = e^{-x}$. (8p)

Karakteristisk ekvation är: $r^3+r^2+r+1 = 0$

$r_1 = -1$ är en rot!, $r^3+r^2+r+1 = (r+1)(r^2+1)$.

övriga rötter erhålls från ekvationen $r^2+1=0$, $r_{2,3} = \pm i$

Alltså är den allmänna homogena lösningen

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

Vi ansätter som partikulärlösning

$$y_p(x) = Axe^{-x},$$

vs.

$$y_p'(x) = (A-Ax)e^{-x}, \quad y_p''(x) = (-2A+Ax)e^{-x}$$

$$y_p'''(x) = (3A-Ax)e^{-x}$$

insättning i (*) ger

$$(3A - Ax - 2A + Ax + A - Ax + Ax)e^{-x} = e^{-x}$$

$$2A = 1, \quad \underline{\underline{A = \tfrac{1}{2}}}, \quad \text{Dvs } y_p(x) = \tfrac{x}{2}e^{-x}$$

__Svar__: $y(x) = (C_1 + \frac{x}{2})e^{-x} + C_2\cos x + C_3 \sin x$
där C_1, C_2, C_3 är godtyckliga konstanter.

---

4. Vi ser att $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!} = [m = k-1] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+1}{m!} =$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!}}_{\overset{(n=m-1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = \underline{\underline{2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}}}$$

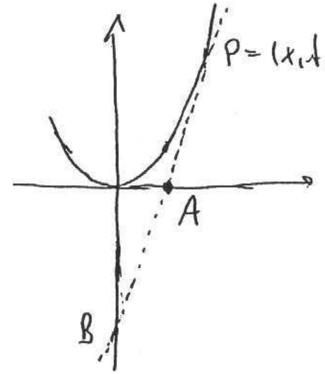
Eftersom $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}x^m$ så är $e = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}$

__Svar__: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = \underline{\underline{2e}}$ (7p)

---

5. Antag att de sökta kurva ges av $y = f(x)$ med $f(1) = 1$. (7)

Om $P = (x, f(x))$, $A = (x_0, 0)$ och $B = (0, y_0)$ så är $\vec{PA} = (x_0 - x, -f(x))$ och $\vec{PB} = (-x, y_0 - f(x))$. Eftersom $\vec{PA} = \frac{1}{2}\vec{PB}$ så följer att



$$-f(x) = \tfrac{1}{2}(y_0 - f(x))$$

dvs $y_0 = -f(x)$.

Lutningen för tangenten i punkten P är $f'(x)$ men också $\frac{f(x) - y_0}{x - 0} = \frac{2f(x)}{x}$.

Dvs $\boxed{f'(x) = \frac{2}{x}f(x)}$, $f'(x) - \frac{2}{x}f(x) = 0$

Integrerande faktor är $e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{x^2}$.

Dvs $\left(\frac{1}{x^2}f(x)\right)' = 0$, $\frac{1}{x^2}f(x) = C$, $f(x) = C\cdot x^2$

Men $1 = f(1) = C \cdot 1^2 = C$, __Svar__ $\underline{\underline{f(x) = x^2}}$

---

6. Sätt $u_n(x) = 1 - \sqrt[3]{1 - (\frac{x}{n})^2}$ och $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $-1 \le x \le 1$

Eftersom $u_n(-x) = u_n(x)$ och $u_n(x)$ är str. växande för $0 \le x \le 1$ så är $|u_n(x)| \le u_n(1) \overset{\text{def.}}{=} a_n$. Men $\sqrt[3]{1-t} = 1 - \frac{1}{3}t + B(t)t^2$ och

$a_n = 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3}\frac{1}{n^2} + B(\frac{1}{n})\cdot\frac{1}{n^4}$. Dvs $\frac{a_n}{1/n^2} = \frac{1}{3} + B(\frac{1}{n})\frac{1}{n^2} \to \frac{1}{3} \neq 0$, $n \to \infty$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent så följer av jämförelsekriteriet för pos. serier att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent och därmed enligt Weierstrass Majorantsats att funktionsserien $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ är likformigt konvergent på $[-1, 1]$. Eftersom $u_n(x)$ är kont. på $[-1,1]$ så är $S(x)$ ...

MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i
Reell Matematisk Analys F, del A, (TMA 975)
Datum: 2002-08-23, 08.45 - 12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Fredrik Altenstedt tel. 0740 459022

---

1. Lös differentialekvationen $y'' + 2y' - 3y = 8xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (7p)

2. Bestäm konvergensintervallet och summan för potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^k}{k} x^{3k}$. (7p)

3. a) Beräkna $\cos(0.1)$ approximativt med Maclaurinpolynomet av grad 2. Ange också en felgräns ! (4p)

   b) Beräkna $\lim_{x \to 0} \frac{24\cos x + 12x^2 - 24}{x^2 - x\sin x}$. (4p)

4. För vilka reella tal p och q konvergerar följande serier (8p)

   a) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sin(n^{-p})$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^q (\ln n)^2}$

5. Vid numerisk lösning av differentialekvationen $y' + ay = f(t)$ kan man ersätta derivatan (8p) y' med differenskvoten $\frac{y(t+h) - y(t)}{h}$ där h är ett fixt men litet tal, (Eulers metod). Genom att sätta $t = nh$, $y_n = y(nh)$ och $d_n = f(nh)$ där $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ diskretiseras differentialekvationen och en approximerande differensekvation erhålls istället. Sätt upp differensekvationen i fallet $a = 1$ och $f(t) = t$ och med begynnelsedata $y(0) = 0$. Jämför sedan lösningen till differensekvationen med lösningen till den ursprungliga differentialekvationen.

6. Låt c vara ett godtyckligt reellt tal. Sätt $f_n(x) = n^c x(1 - x^2)^n$, $0 \le x \le 1$. (7p) Visa först att $f_n(x) \to 0$ punktvis på $[0, 1]$. Undersök sedan för vilka c som funktionsföljden $f_n(x)$ konvergerar likformigt på $[0, 1]$.

7. Formulera och bevisa Maclaurins formel med Lagranges restterm. (8p)

8. Visa att om potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar i punkten $x_0 \ne 0$, så konvergerar (7p) serien absolut för alla x sådana att $|x| < |x_0|$.

Lösningar till "Reell Matematisk Analys F, del A" (TMA975)

2002-08-23

1. Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 2r - 3 = 0 \quad , \quad r_{1,2} = -1 \pm 2 = -3, 1 .$$

Dvs, den allmänna homogena lösningen är

$$y_h(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x .$$

Vi ansätter som partikulärlösning $y_p(x) = (Ax^2 + Bx)e^x$

$$y_p' = (Ax^2 + (2A+B)x + B)e^x \qquad (= (x^2+4x+2)e^x)$$

$$y_p'' = (Ax^2 + (4A+B)x + 2A+2B)e^x$$

Insatt i differentialekvationen så erhåller vi:

$$(\underbrace{A+2A-3A}_{=0})x^2 + (\underbrace{4A+B+4A+2B-3B}_{8A})x + \underbrace{2A+2B+2B}_{2A+4B})e^x = 8xe^x$$

$\therefore \quad 8A = 8 \ , \ \underline{\underline{A=1}} \ ; \ 2A + 4B = 0 \ , \ B = -\frac{1}{2} .$

Dvs den allmänna lösningen är

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x + (x^2 - \tfrac{1}{2}x)e^x$$

Men

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) &= -3c_1 + c_2 - \tfrac{1}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} -4c_1 &= -\tfrac{1}{2} \\ c_1 &= \tfrac{1}{8} \\ c_2 &= 1 - c_1 = \tfrac{7}{8} . \end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{8}e^{-3x} + (x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{8})e^x}}$

2. $8^k x^{3k} = (8x^3)^k$, sätt $t = 8x^3$.

Då är

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^k x^{3k}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} = f(t) . \quad \text{(def.!)}$$

Vi deriverar $f(t)$ (m.a.p. t) och potensserien termvis!

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot t^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t} \ !$$

De geometriska serien är konv. om.m. $|t| < 1$

(för $t = \pm 1$ går termerna i serien ej mot noll!)

Och därmed är den ursprungliga serien konvergent om $|t| < 1$. För $t = 1$ erhåller vi: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ som ju är divergent och för $t = -1$ så får vi: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ som enligt Leibniz konv. kriterium är konvergent.

Dvs $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$ är konv. om.m. $-1 \leq t < 1$.

: För $|t| < 1$ så är $f'(t) = \frac{1}{1-t}$, $f(t) = -\ln(1-t) + C$

Men

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= -\ln 1 + C = C \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^k}{k} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Dvs } C = 0$$

Och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} = \ln(1-t)$.

Till sist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^k x^{3k}}{k} = \ln(1 - 8x^3)$, $|8x^3| < 1$, $|x| < \frac{1}{2}$

och potensserien konv. precis då $-1 \leq 8x^3 < 1$

dvs då $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$

3a $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underbrace{\frac{\cos\theta x}{4!}x^4}_{\varepsilon(x)\ \text{(felet)}}$ för ngt. $\theta: 0<\theta<1$.

Dvs $\cos(0.1) = 1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \varepsilon = \frac{1.99}{2} + \varepsilon = 0.995 + \varepsilon$

där $|\varepsilon| \le \frac{1}{24}\cdot(0.1)^4 \le 0.000005$

Dvs $\cos(0.1) = 0.995 \pm 0.000005$

b) $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + B(x)x^5$

$x^2 - x\sin x = \frac{1}{6}x^4 + B(x)x^6 = x^4\left(\frac{1}{6} + B(x)x^2\right)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + B(x)x^5$

Dvs $\lim_{x\to 0} \frac{24\cos x + 12x^2 - 24}{x^2 - x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4(1 + B(x)x)}{x^4(\frac{1}{6} + B(x)x^2)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + B(x)x}{\frac{1}{6} + B(x)x^2} = 6$

$B(x)$ är funktioner som är begr. i e omgivning till origo.

4a Sätt $a_n = (1+\frac{1}{n})^n \sin(n^{-p})$

$(1+\frac{1}{n})^n \to e$ då $n \to \infty$

och

$\sin(n^{-p}) \to 0$ då $n \to \infty$ om.m $p > 0$,

så för att serie skall konvergera måste $p > 0$

För små x gäller att $\sin x \approx x$, vi jämför

därför termerna a_n med $b_n = n^{-p}$

Då är $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^{-p})}{n^{-p}} =$ VGV

$= e \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^{-p})}{n^{-p}} = \left[\begin{matrix} x = n^{-p} & (p>0) \\ \to 0 & \text{då } n\to\infty \end{matrix}\right] = e \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

$\neq 0$

Dvs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konv. om.m. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konv

Men $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ är konv. precis då $p > 1$.

<u>Svar</u>: $p > 1$.

b) Sätt $f(x) = \frac{1}{x^q(\ln x)^2}$, Eftersom $f(x)$ avtar

för $x \ge 2$ så kan vi jämföra serien

$\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ med integralen $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$.

$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^q(\ln x)^2} = \left[\begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x}\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\infty \to \infty \\ 2 \to \ln 2\end{matrix}\right]$

$= \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{x^{q-1}t^2} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{e^{(1-q)t}}{t^2}\,dt$ (*)

För $1-q > 0$ så divergerar integralen och för $1 - q \le 0$ så konvergerar integralen!

Dvs serien $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^q(\ln n)^2}$ konvergerar precis

då $\underline{\underline{q \ge 1}}$

(*) $\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ är konv. och $\frac{e^{(1-q)t}}{t^2} \le \frac{1}{t^2}$ om $q \ge 1$.

5. Vi löser differentialekvationen först.

(*) $y' + y = t$ (integrerande faktor är e^t)

$$(e^t y)' = te^t$$

$$e^t y = \int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt = (t-1)e^t + C.$$

Dvs $y(t) = t-1+Ce^{-t}$,

Men $y(0) = -1 + C = 0$, $C = 1$ $\quad \underline{y(t) = t-1+e^{-t}}$

Diskretiserar vi (*) så erhåller vi $\left(y' \approx \frac{y((n+1)h) - y(nh)}{h} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \right)$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + y_n = nh$$

(**) $y_{n+1} - (1-h)y_n = nh^2$, $\quad y_0 = y(0) = 0.$

Allmän homogen lösn. är $y_n^h = C\cdot(1-h)^n$.

Vi ansätter $y_n^p = An + B$, då är

$y_{n+1}^p = An + A + B$. och efter insättning i (**)

$$A\cdot n + A + B - A(1-h)n - B(1-h) = nh^2,$$

$$A\cdot h\cdot n + A + B\cdot h = nh^2$$

Dvs $A\cdot h = h^2$ och $A + Bh = 0$; $A = h$, $B = -1$

Den allmänna lösningen till (**) är

$$y_n = y_n^h + y_n^p = C\cdot(1-h)^n + (1-nh).$$

$y_0 = C - 1 = 0$, Dvs $\underline{\underline{y_n = nh - 1 + (1-h)^n}}$

För $t = nh$ så är $y(t) = nh - 1 + e^{-nh} = nh - 1 + \underbrace{(e^{-h})^n}_{\approx 1-h+B(h)h^2}$

Dvs $y(t) \approx y_n$ små h! då $t = nh$

6. $f_n(x) = n^c x(1-x^2)^n$, $\quad 0 \le x \le 1$

$f_n(0) = f_n(1) = 0$ ($\to 0$ förstås då $n \to \infty$).

Om $0 < x < 1$ så är $0 < 1-x^2 < 1$ och därmed är $\ln(1-x^2) < 0$, med $\alpha = -\ln(1-x^2)$ (obs > 0!) så är

$$f_n(x) = x\cdot n^c e^{n\ln(1-x^2)} = x\,\frac{n^c}{e^{\alpha n}} \to 0 \text{ då } n \to \infty$$

Dvs $f_n(x) \to 0$ punktvis i $[0,1]$.

Vi undersöker nu största värdet av $f_n(x)$ på $[0,1]$.

Sätt $g(x) = x(1-x^2)^n$, då är $g'(x) = \underbrace{(1-x^2)^{n-1}}_{>0}(1-x^2(1+2n))$

och $g'(x) > 0$ om $x^2 < \frac{1}{1+2n}$, största värdet för $g(x)$ på $[0,1]$ antas då $x^2 = \frac{1}{1+2n}$.

Dvs $\max_{0\le x\le 1} |f_n(x)| = n^c \frac{1}{\sqrt{1+2n}}\left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n =$

$$= \frac{n^c}{\sqrt{1+2n}}\cdot\left(\frac{2n}{1+2n}\right)^n = \underbrace{\frac{n^c}{\sqrt{1+2n}}}_{\to 0 \text{ omm } \underline{\underline{c<\frac{1}{2}}}} \underbrace{\frac{1}{(1+\frac{1}{2n})^n}}_{\to \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ då } n\to\infty}$$

Härav följer att $f_n(x) \to 0$ likformigt på $[0,1]$

Omm. $\underline{\underline{c < \frac{1}{2}}}$

MATEMATIK | **Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Telefonvakt: Axel Målqvist, tel. 0740 459022
Tentamen | 2002–12–16 kl. 14.15–18.15

Matematisk Analys F1, del A (TMA 975)

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv dessutom linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

Uppgift 4 skall ej räknas av studenter i F1 eller studenter som har gjort Matlab-tentan 2002-12-07.

---

1) (a) Lös differentialekvationen (4p)

$$2xy' + y = x\sqrt{x}, \qquad y(1) = 1.$$

(b) Bestäm alla lösningar till differensekvationen (4p)

$$y_{n+2} + 4y_n = n + 1.$$

2) Bestäm konvergensintervallet för potensserien (7p)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1+\sqrt{n}}\, x^{2n}\,.$$

3) Bestäm konstanten a så att följande gränsvärde existerar (8p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{x^2} + a\tan x}{x^2\ln(1+x)}\,.$$

Beräkna sedan gränsvärdet.

4) **Se nästa sida för uppgift 4.**

5) Visa att (8p)

$$\frac{3}{4} \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{ln(n)}{n^2} \le \frac{5}{4}\,.$$

6) En bil med massan m och begynnelsehastigheten v_0 får rulla fritt (på en rak väg) tills den stannar. Bilen bromsas in dels på grund av s.k. rullfriktion och dels på grund av luftmotståndet. Man anser att rullfriktionen är proportionell mot hastigheten (v) och att luftmotståndet är proportionellt mot v^2. Formulera en rörelseekvation för bilen och beräkna hur långt bilen har rullat när hastigheten har minskat till $v_0/2$. (7p)

Var god vänd!

7) (a) Definiera Maclaurinpolynomet av ordning n till en funktion f. Vilken egenskap karakteriserar Maclaurinpolynomet? (8p)

(b) Formulera Maclaurins formel samt förklara vad den säger om f och dess Maclaurinpolynom.

(c) Härled Maclaurinutvecklingen med restterm (på Lagranges form) för funktionen $f(x) = \arctan x$.

8) (a) Definiera begreppen *absolut konvergent* respektive *betingat konvergent* serie. (7p)

(b) Formulera och bevisa Leibniz konvergenskriterium.

Följande uppgift skall ej räknas av studenter i F1 eller studenter som har gjort Matlab-tentan 2002-12-07.

4) Lös nedanstående differentialekvation med en potensserieansats. (8p)

$$xy'' + y' + y = x, \quad y(0) = 1.$$

Ange också konvergensradien för potensserien och beräkna dessutom de fem första termerna i potensserien.

Lycka till!
TG

MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Telefonvakt: Rolf Liljendhal, tel. 0740 459022

Tentamen 2003–04–17 kl. 08.45–12.45

Matematisk Analys F1, del A (TMA 975)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv dessutom linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

1) Lös differensekvationen (8p)

$$2y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = n2^{-n}, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 1.$$

2) Lös differentialekvationen (8p)

$$y''' + 3y'' - 4y = 2x^2 + 5, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 5.$$

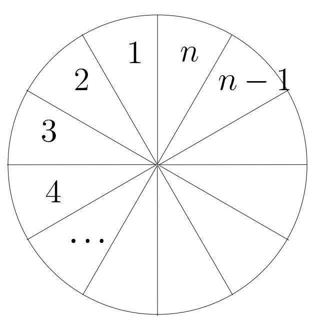
3) Undersök för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent. (8p)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+7}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{2n}}{(2n)!}$

4) Bestäm summan för potensserien $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n-1}$. (7p)

5) Beräkna $\sqrt[3]{1003}$ med 7 gällande decimaler (ett absolut fel mindre än 5×10^{-8}). (7p)

6) En cirkel är indelad i n lika stora och numrerade sektorer (se figuren). Varje sektor skall färgläggas med en färg och det finns totalt k $(k \geq 3)$ stycken färger att välja bland.



(a) Låt a_n vara antalet sätt att färglägga figuren så att två närliggande cirkelsektorer inte har samma färg. Visa att om $n \geq 3$ så gäller följande differensekvation (4p)

$$a_{n+1} + a_n = k(k-1)^n.$$

(En liten ledtråd finns på nästa sida.)

(b) Bestäm a_n (vad är a_3 ?). (4p)

Var god vänd!

7) Formulera och bevisa Maclaurins formel med Lagranges restterm. (7p)

8) Formulera och bevisa en sats om konvergens och divergens för serien (7p)
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, där p är en reell konstant.

Lite hjälp till uppgift 6a: Tänk på att när sista cirkelsektorn (nr. $n+1$) skall färgläggas så är antalet färger man kan välja bland beroende på om sektorerna nr. 1 och nr. n (första och näst sista) har samma färg eller ej.

Lycka till!
TG

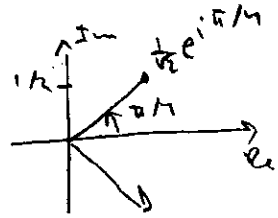
Lösningar till, Matematisk analys F1, del A

TMA975A, 2003-04-17

1. $$2y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = n\cdot 2^{-n}, \quad y_0 = y_1 = 1.$$

Karakteristisk ekvation är

$$2r^2 - 2r + 1 = 0, \quad r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\pi/4}$$



dvs den homogena lösningen är

$$y_n^h = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(A\cos\frac{n\pi}{4} + B\sin\frac{n\pi}{4}\right), \quad n=0,1,2,\ldots$$

Som partikulärlösning ansätter vi:

$$y_n^p = (an+b)\,2^{-n},$$

$$y_{n+1}^p = (an+a+b)\,2^{-n-1}, \quad y_{n+2}^p = (an+2a+b)\,2^{-n-2}$$

Dvs

$$2y_{n+2}^p - 2y_{n+1}^p + y_n^p = \left(\frac{1}{2}(an+2a+b) - (an+a+b) + (an+b)\right)2^{-n}$$
$$= n\,2^{-n}$$

Dvs $\frac{a}{2}n + \frac{b}{2} = n$, $\therefore$ $a = 2$ och $b = 0$

En partikulärlösning är alltså $\underline{\underline{y_n^p = 2n\cdot 2^{-n}}}$

Den allmänna lösningen är då

$$y_n = y_n^h + y_n^p = 2^{-n/2}\left(A\cos\frac{n\pi}{4} + B\sin\frac{n\pi}{4}\right) + 2n\cdot 2^{-n}$$

Med $y_0 = A = 1$ och

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A\frac{1}{\sqrt{2}} + B\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 = 1, \quad \text{Dvs } \frac{1}{2}(A+B) = 0$$

$\underline{\underline{B = -1}}$

Svar $$y_n = 2^{-n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}\right) + 2n\,2^{-n}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

2. Sätt $s(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n-1}$ med $t = x^2$!

$= t \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n-1}$, sätt $g(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n-1}$.

Då är

$$g'(t) = \sum_{n=2}^{\infty} t^{n-2} = \left[m = n-2 \right] = \sum_{m=0}^{\infty} t^m = \frac{1}{1-t} \quad \text{om } |t|<1.$$

Dvs $g(t) = -\ln(1-t) + C$. Men $C = g(0) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{0}{n-1} = 0$.

Alltså är

$$s(x) = t\, g(t) = [t = x^2] = \underline{\underline{-x^2 \ln(1-x^2), \ |x|<1.}}$$

3. a) Sätt $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+7}$ och $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+7}$ (obs $a_n = f(n)$).

Då är $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+7) - \sqrt{x}}{(x+7)^2} = \frac{7-x}{2\sqrt{x}(x+7)^2} \leq 0$ om $x \geq 7$.

Dvs a_n är avtagande för $n \geq 7$. Eftersom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ så ger Leibniz konvergenskriterium att $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ är konvergent. Serien är däremot inte absolutkonvergent eftersom $\frac{|(-1)^n a_n|}{1/\sqrt{n}} = \frac{n}{n+7} \to 1 \neq 0$ då $n \to \infty$ och eftersom serien $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ är divergent. (Jämförelsekriteriet.)

Svar Serien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+7}$ är betingat konvergent.

3b) Sätt $a_n = (1-\frac{1}{n})^{n^2}$, (obs $a_n > 0$). Då är

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(e^{n^2 \ln(1-\frac{1}{n})}\right)^{1/n} = e^{n \ln(1-\frac{1}{n})} = [\ln(1+t) = t + B(t)t^2] =$$

$$= e^{-1 + \frac{1}{n}B(\frac{1}{n})} \longrightarrow e^{-1} = 1/e < 1, \text{ då } n \to \infty.$$

Enl. rotkriteriet för positiva serier följer att

$\sum_{n=2}^{\infty} (1-\frac{1}{n})^{n^2}$ är absolutkonvergent.

3c) Med Stirlings formel, $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1+\underbrace{\varepsilon_n}_{\to 0,\, n\to\infty})$

så finner vi att

$$\frac{n^{2n}}{(2n)!} = \frac{n^{2n}}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}\,(1+\varepsilon_{2n})} = \frac{\left(\frac{e}{2}\right)^{2n}}{\sqrt{4\pi n}\,(1+\varepsilon_{2n})} \to$$

$$\to \infty \quad \text{då } n\to\infty \quad \text{ty } \frac{e}{2} > 1$$

Alltså gäller att ~~termerna i serien~~

$\sum (-1)^n \frac{n^{2n}}{(2n)!}$ ej går mot noll och är därmed divergent

---

4. $\sqrt[3]{1003} = \sqrt[3]{1000}\cdot\sqrt[3]{1.003} = 10\ \sqrt[3]{1.003}$

Vi undersöker $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3}$, $f'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-8/3}$

En Maclaurinutveckling av $f(x)$ ger $(f'(0) = \frac{1}{3},\ f''(0) = -\frac{2}{9}$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9\cdot 2!}x^2 + \frac{10}{27\cdot 3!}(1+\theta x)^{-8/3}x^3$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}(1+\theta x)^{-8/3}x^3, \quad \text{ngt } \theta : 0<\theta<1.$$

För $x = 0{,}003 = \frac{3}{1000}$ så är

$$\sqrt[3]{1.003} = f(0.003) = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{1000} - \frac{1}{9}\frac{9}{10^6} + \varepsilon$$

$$= 1 + \frac{1}{1000} - \frac{1}{10^6} + \varepsilon, \quad \text{där}$$

$$|\varepsilon| = \frac{5}{81}\underbrace{\left(1+\theta\frac{3}{1000}\right)^{-8/3}}_{\le 1}\cdot\left(\frac{3}{1000}\right)^3 = \frac{5\cdot 27}{81}10^{-9} = \frac{5}{3}\times 10^{-9}$$

Dvs

$$\sqrt[3]{1.003} = 1.00099900 \pm \frac{5}{3}\times 10^{-9} \quad (8 \text{ decimaler})$$

och

$$\sqrt[3]{1003} = 10\cdot\sqrt[3]{1.003} = 10.0099900 \pm \frac{5}{3}\times 10^{-8}$$

(7 decimaler).

5) $y''' + 3y'' - 4y = 2x^2+5$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=5$

Karakteristisk ekvation är

$r^3+3r^2-4=0$ ($r_1=1$ är en rot!)

$(r-1)\underbrace{(r^2+4r+4)}_{=(r+2)^2}=0$, $r_{2,3}=-2$ är en dubbelrot

Dvs den homogena lösningen är

$y_h(x) = Ae^x + (Bx+C)e^{-2x}$

Som partikulärlösning ansätter vi

$y_p(x) = ax^2+b$ (Eftersom både y_p'' & y saknar x-term likväl som H.L. så kan vi utelämna x-termen i ansättningen)

$y_p' = 2ax$, $y_p''=2a$

$y_p'''=0$

Insättning ger: $3\cdot 2a - 4ax^2 - 4b = 2x^2+5$,

Dvs $-4a=2$, $6a-4b=5$

$\underline{\underline{a=-1/2}}$ $\qquad 4b=-3-5=-8$, $\underline{\underline{b=-2}}$

Den allmänna lösningen är

$y(x) = y_h(x)+y_p(x) = Ae^x+(Bx+C)e^{-2x}-\frac{1}{2}x^2-2$

men $y'(x) = Ae^x+(B-2Bx-2C)e^{-2x}-x$

$y''(x) = Ae^x+(-2B-2B+4Bx+4C)e^{-2x}-1$

och $y(0) = A+C-2=0$

$y'(0) = A+B-2C=1$

$y''(0) = A-4B+4C-1=5$

$\left\{\begin{array}{l} A+C=2 \\ A+B-2C=1 \\ A-4B+4C=6 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 4 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right]$ $\therefore$ $A=2$, $B=-1$, $C=0$

Svar: $y(x) = 2e^x - xe^{-2x} - \frac{1}{2}x^2-2$, $x\in\mathbb{R}$

6. Vi delar in cirkelskivan i $n+1$ sektorer.

a)

1:a sektorn kan färgläggas på	k sätt	
2:a — " —	$k-1$ sätt	(de först valda färgen är tillåten.)
3:e — " —	$k-1$ sätt	
4:e	$k-1$ sätt	
⋮		
n:e — " —	$k-1$ sätt	

De $n+1$:a sektorn kan färgläggas på $k-1$ sätt om vi struntar i att den då kan få samma färg som den 1:a.

I de fall då 1:a och sista ($n+1$:a) sektorn har samma färg (dvs icke godkända fall) så kan vi slå samman dom till en sektor och vi har då n sektorer där inga intilliggande har samma färg, men antalet sådana fall är ju a_n!.

Alltså är $\boxed{a_{n+1} = k(k-1)^n - a_n}$ (resonemanget kräver att $n \geq 3$ och därmed att $(n+1) \geq 4$)

b) Differensekvationen

$$a_{n+1} + a_n = k(k-1)^n$$

har den homogena lösningen $a_n = C \cdot (-1)^n$ $[r+1=0]$

Ansätt $a_n^p = A(k-1)^n$

Insättning ger

$$A(k-1)^{n+1} + A(k-1)^n = k(k-1)^n$$

$$Ak - A + A = k \quad , \quad \underline{\underline{A = 1}}$$

Dvs $a_n = (k-1)^n + C \cdot (-1)^n$

$a_3 = (k-1)^3 - C = k(k-1)(k-2)$

a_3:

sätt att färglägg

$a_3 = k(k-1)(k-2)$.

Svar:

$a_n = (k-1)^n + (k-1)(-1)^n$.

$n = 3, 4, 5, \ldots$

MATEMATIK | **Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola | Telefonvakt: Richards Grzibovskis, tel. 0740 459022

Tentamen | 2003–08–22 kl. 08.45–12.45

Matematisk Analys F1, del A (TMA 975)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv dessutom linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

1) Lös differentialekvationerna (8p)

(a) $\sqrt{x}yy' = y(y-1),\ x > 0$

(b) $xy' - 5y = x,\ x > 0.$

2) Avgör om följande serie är konvergent, (7p)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}.$$

Bestäm i sådana fall dess summa.

3) Beräkna ett närmevärde till den generaliserade integralen (7p)

$$\int_0^1 \frac{cos x - 1}{x^2\sqrt{x}} dx$$

med ett fel som är mindre än 5×10^{-3}, (2 gällande decimaler).

4) I en enkel klimatmodell beskrivs avvikelsen (x_n) från den årliga medeltemperaturen i månad nummer n, med differensekvationen (7p)

$$x_{n+2} - \sqrt{3}x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_1 = -12, \quad x_3 = -6.$$

I vilken månad är det kallast och i vilken är det varmast? Rita en kurva som visar temperaturens svängningar från månad till månad.

5) Låt $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{cos(\frac{n\pi}{3})}{n!} x^n.$ (8p)

(a) Bestäm konvergensradien för $p(x)$.

(b) Visa att $p(x)$ är en lösning till differentialekvationen

$$y'' - y' + y = 0.$$

och uttryck med hjälp av detta $p(x)$ med elementära funktioner.

Var god vänd!

6) År 1861 konstruerade Weierstrass en funktion som väckte stor uppmärksamhet , (8p)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2} sin(2^n x).$$

Bevisa att Weierstrass funktion f är kontinuerlig på $\mathbb{R}$.
En alldeles speciell egenskap som f har är att den inte är deriverbar i någon punkt i $\mathbb{R}$.
Visa att Weierstrass funktion inte är deriverbar i $x = 0$.

7) Formulera och bevisa Maclaurins formel med Lagranges restterm. (7p)

8) Formulera och bevisa lösningsformeln för en homogen linjär differentialekvation av ordning två. (8p)

Lycka till!
TG

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot \arctan\frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right|, \quad a>0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|, \quad a>0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi n}\cdot(1+\epsilon_n), \text{ där } \epsilon_n \to 0 \text{ då } n\to\infty.$$

/TG

Lösningar

1. a) $\sqrt{x}\, y y' = y(y-1)$, $x > 0$

Vi inser direkt att $y(x) = 0$, $x>0$ är en lösning.
Övriga lösningar erhålls genom att lösa ekvationen

$\sqrt{x}\, y' = y - 1$ (Separabel / linjär 1:a ordningens)

$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$,

$\ln|y-1| = 2\sqrt{x} + C$

$|y-1| = e^C \cdot e^{2\sqrt{x}}$, $y = 1 \underbrace{\pm e^C}_{A} \cdot e^{2\sqrt{x}}$

Allmän lösning är $y(x) = 1 + Ae^{2\sqrt{x}}$, $x>0$
där A är en godtycklig reell konstant.

b) $xy' - 5y = x$, $x > 0$

$y' - \frac{5}{x}y = 1$

Integrerande faktor är $e^{\int \frac{-5}{x}dx} = e^{-5\ln x} = e^{\ln x^{-5}} = \underline{\underline{x^{-5}}}$

$(x^{-5}y)' = x^{-5}$

$x^{-5}y = -\frac{1}{4}x^{-4} + C$

" $y = \underline{-\frac{x}{4} + Cx^5}$

där C är en godtycklig reell konstant.

2. Sätt $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 3^n}$ och $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$

Då är $|a_n| \le \left(\frac{1}{3}\right)^n$ och $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ är en konvergent (geometrisk) serie ($\frac{1}{3} < 1$)

Enligt jämförelsekriteriet är serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolutkonvergent och därmed <u>konvergent</u>.

Sätt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

Enligt formelbladet är $f(x) = \arctan x$, alternativt så ser vi att

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}, \quad |x|<1$$

Dvs $f(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, \quad f(0) = 0 = \underline{\underline{C}}$

Men $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1} = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\underbrace{\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}_{=\frac{1}{3}}\Big)^n \right.$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{3^n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = \frac{1}{\sqrt{3}} S.$$

Dvs $S = \sqrt{3}\, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}\, \underbrace{\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}}_{=\frac{\pi}{6}} = \underline{\underline{\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6}}}$

3. $I = \int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^2\sqrt{x}}\, dx$ (Singularitet i $x = 0$!)

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6!}\cos(\theta x) x^6$, $(6! = 720)$

$$\frac{\cos x - 1}{x^2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x^{3/2}}{24} - \frac{\cos(\theta x)}{720} x^{7/2}$$

Dvs

$$I = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x^{3/2}}{24}\right) dx + \varepsilon = \left[-\sqrt{x} + \frac{2}{5\cdot 24} x^{5/2}\right]_0^1 + \varepsilon$$

$$= -1 + \frac{1}{60} + \varepsilon = -\frac{59}{60} + \varepsilon,$$

där

$$0 < \varepsilon = \int_0^1 \frac{\cos(\theta x)}{720} x^{7/2}\, dx \le \frac{1}{720} \int_0^1 x^{7/2} dx = \frac{\frac{2}{9}}{720} = \frac{1}{3240}$$

$< 5 \times 10^{-4}$ (som ju är mindre än 5×10^{-3})

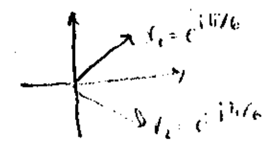
<u>Svar:</u> $I = -\frac{59}{60} \pm 5 \times 10^{-4}$

4 $x_{n+2} - \sqrt{3}\, x_{n+1} + x_n = 0$, $r^2 - \sqrt{3}\, r + 1 = 0$

$r = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$

Allmän homogen lösning är

$x_n = A\cos\frac{n\pi}{6} + B\sin\frac{n\pi}{6}$



$x_0 = A$ $\qquad x_6 = -A$

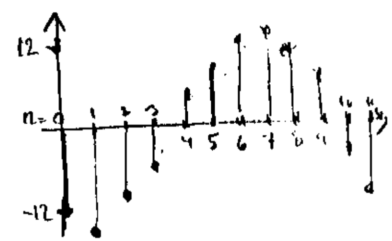
$x_1 = (A\sqrt{3} + B)/2$ $\qquad x_7 = -x_1$

$x_2 = (A + B\sqrt{3})/2$ $\qquad x_8 = -x_2$

$x_3 = B$ $\qquad x_9 = -x_3$

$x_4 = (-A + B\sqrt{3})/2$ $\qquad x_{10} = -x_4$

$x_5 = (-A\sqrt{3} + B)/2$ $\qquad x_{11} = -x_5$



Med $x_0 = -12$ och $x_3 = -6$ så är

$A = -12$ och $B = -6$

$x_0 = -12$, $x_1 = -3(2\sqrt{3}+1)$, $x_2 = -3(2+\sqrt{3})$, $x_3 = -6$, $x_4 = 3(3-\sqrt{3})$, $x_5 = 3(2\sqrt{3}-1$

5. a) $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n!}}_{=a_n} x^n = 1 + \frac{\cos\pi/3}{1}x + \frac{\cos 2\pi/3}{2}x^2 + \dots$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{|\cos n\pi/3|}}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 \text{ då } n\to\infty \text{ ty } \sqrt[n]{n!} \to \infty$$

Alltså är konvergensradien $R = "\frac{1}{0}" = \infty$

b) $p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{(m+1)\pi}{3}}{m!}x^m$ (kalla m för n)

$$p''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{(n+1)\pi}{3}}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{(m+2)\pi}{3}}{m!}x^m$$

Alltså är

$$p''(x) - p'(x) + p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\overbrace{\left(\cos\frac{(m+2)\pi}{3} - \cos\frac{m+1}{3}\pi + \cos\frac{m\pi}{3}\right)}^{=b_m}$$

$$\cos\left(\frac{m\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{m\pi}{3}\cdot\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{m\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\cos\frac{m\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{m\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{m\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{m\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{m\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cos\frac{m\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{m\pi}{3}$$

Alltså är

$$b_m = -\cos m\frac{\pi}{3} + 0\cdot\sin\frac{m\pi}{3} + \cos\frac{m\pi}{3} = 0 \quad !$$

Dvs $p(x)$ är en lösning till differentialekvationen

$$y'' - y' + y = 0, \quad r^2 - r + 1 = 0$$

$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Den allmänna homogena lösningen är

$$y(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Men $1 = p(0) = A$,

$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = p'(0) \overset{*}{=} \frac{1}{2}p(0) + B\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Bigg\}$ $A = 1$, $B = 0$

$* \; y'(x) = \frac{1}{2}y(x) + e^{x/2}\left(-A\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$

Svar $\underline{p(x) = e^{x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x}$, $x \in \mathbb{R}$.

6. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2}\sin(2^n x)$.

Sätt $u_n(x) = 2^{-n/2}\sin(2^n x)$,

då är $|u_n(x)| = 2^{-n/2}|\sin 2^n x| \le 2^{-n/2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

och $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ som är en konvergent geometrisk serie.

Enligt Weierstrass majorantsats följer att $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ konvergerar likformigt på $\mathbb{R}$. Eftersom $(u_n(x))$ alla är kontinuerliga så följer att även gränsfunktionen $f(x)$ är det.

Om $f'(0)$ existerar så existerar gränsvärdet $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$. Här är

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2}\sin(2^n h)$$

Vi undersöker differenskvoten med $h = 2^{-N}\cdot\frac{\pi}{4}$ (N

Eftersom $2^n \cdot 2^{-N}\frac{\pi}{4} = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ då $n = N+2, N+3, \dots$ så följer att $\sin(2^n h) = 0$ då $n \ge N+2$,

Alltså är

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = 2^N\cdot\frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{N} 2^{-n/2}\sin\left(2^{n-N}\frac{\pi}{4}\right) + 2^{-(N+1)/2}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} 2^{n/2}\frac{\sin\left(2^{n-N}\frac{\pi}{4}\right)}{2^{n-N}\frac{\pi}{4}} + \frac{4}{\pi}2^{(N-1)/2} \ge \left| \frac{\sin x}{x} \ge \cos x \right.$$ om $0 \le x \dots$

$$\ge \sum_{n=0}^{N} 2^{n/2}\cos\big(\underbrace{2^{n-N}\tfrac{\pi}{4}}_{\le\frac{\pi}{4}}\big) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{N} 2^{n/2} = \frac{(\sqrt{2})^{N+1} - 1}{\sqrt{2} - 1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\to \infty$ då $N \to \infty$.

$\therefore \lim \frac{f(h)-f(0)}{h}$ existerar ej !

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del A** den 13/12 2003, kl. 14.15–18.15.

Hjälpmedel: Formelblad på baksidan, ej räknedosa.
Telefon: Axel Målqvist, tel. 0740-459022.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.
Uppgift 4 skall ej räknas av studenter i F1 eller studenter som har gjort MATLAB-tentan 2003-12-06.

---

1. Lös differensekvationen
$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = n^2. \qquad (7p)$$

2. Undersök om följande gränsvärden existerar. Beräkna dem i så fall.
$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin^2 x}{1-\cos(x^2)}, \qquad \text{b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{xy^2+x^3}. \qquad (4p per del)$$

3. Lös differentialekvationen
$$y''' + y'' + 4y' + 4y = x + \cos^2 x. \qquad (8p)$$

4. (Denna uppgift räknas endast av studenter i högre årskurs som inte har gjort MATLAB-tentan 2003-12-06.)
Visa att funktionen $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(k+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2}$ är en lösning till differentialekvationen $x^2y'' + xy' + (x^2-4)y = 0$. För vilka x gäller lösningen? (8p)

5. För vilka reella x konvergerar serien
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n\ ? \qquad (7p)$$

6. Studera funktionen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x+n)^2 e^{-(x+n)}$.
a) Visa att serien konvergerar likformigt på $[0,1]$.
b) Beräkna $\int_0^1 f(x)\,dx$. (7p)

7. Formulera och bevisa satsen om Maclaurinutvecklingens entydighet. (7p)

8. Formulera och bevisa jämförelsekriteriet för positiva serier. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys F, del A den 13/12 2003

1. Karakteristiska ekvationen är $r^2+2r+1=0$ med lösning $r_{1,2}=-1$. Därför är homogenlösningen $y_n^{(h)}=(C_1+C_2n)(-1)^n$. Eftersom 1 inte är en karakteristisk rot, ansätts en partikulärlösning $y_n^{(p)}=an^2+bn+c$. Insättning ger

$$\begin{aligned}y_{n+2}^{(p)}+2y_{n+1}^{(p)}+y_n^{(p)}&=a(n+2)^2+b(n+2)+c+2[a(n+1)^2+b(n+1)+c]+an^2+bn+c\\&=4an^2+(8a+4b)n+6a+4b+4c=n^2.\end{aligned}$$

Alltså skall vi ha $4a=1$, $8a+4b=0$, $6a+4b+4c=0$, dvs. $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{8}$. Allmänna lösningen är $y_n=y_n^{(h)}+y_n^{(p)}=\underline{(C_1+C_2n)(-1)^n+\frac{1}{4}n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{8}}$.

---

2. a)

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x^2)-\sin^2 x}{1-\cos(x^2)}&=\frac{x^2-\frac{1}{2}x^4+O(x^6)-[x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5)]^2}{1-[1-\frac{1}{2}x^4+O(x^8)]}=\frac{x^2-\frac{1}{2}x^4-x^2+\frac{1}{3}x^4+O(x^6)}{\frac{1}{2}x^4+O(x^8)}\\&=\frac{-\frac{1}{6}x^4+O(x^6)}{\frac{1}{2}x^4+O(x^8)}=\frac{-\frac{1}{6}+O(x^2)}{\frac{1}{2}+O(x^4)}\to\boxed{-\frac{1}{3}}\text{ då } x\to 0.\end{aligned}$$

b) Om $f(x,y)=\frac{\sin(xy^2)}{xy^2+x^3}$ (definierad för $x\neq 0$), är $f(x,0)=0$ för alla $x\neq 0$, medan $f(x,x)=\frac{\sin(x^3)}{2x^3}$ som går mot $\frac{1}{2}$ då $x\to 0$. Alltså saknas gränsvärde då $(x,y)\to(0,0)$.

---

3. 1. Karakteristiska ekvationen är $r^3+r^2+4r+4=r^2(r+1)+4(r+1)=(r+1)(r^2+4)=0$ med lösningar $r_1=-1$, $r_{2,3}=\pm 2i$. Homogenlösningen är $y_h=C_1e^{-x}+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$.

2. Högerledet är $x+\cos^2 x=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$. Sök först en partikulärlösning till $y'''+y''+4y'+4y=x+\frac{1}{2}$. Ansätt $y_{p,1}=ax+b$. Insättning ger

$$4a+4(ax+b)=4ax+4a+4b=x+\frac{1}{2},$$

varav $4a=1$, $4a+4b=\frac{1}{2}$, dvs. $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{8}$, och $y_{p,1}=\frac{x}{4}-\frac{1}{8}$.

Sök sedan en partikulärlösning $y_{p,2}$ till $y'''+y''+4y'+4y=\frac{1}{2}\cos 2x$. Om u_p är en partikulärlösning till $u'''+u''+4u'+4u=\frac{1}{2}e^{2ix}$, är $y_{p,2}=\operatorname{Re}u_p$. Skriv $u=ze^{2ix}$ och använd förskjutningsregeln:

$$\begin{aligned}u'''+u''+4u'+4u&=(D+1)(D^2+4)[ze^{2ix}]=e^{2ix}(D+2i+1)((D+2i)^2+4)[z]\\&=e^{2ix}(D+2i+1)(D^2+4iD)[z]=e^{2ix}(D^3+(6i+1)D^2+(-8+4i)D)[z]=\frac{1}{2}e^{2ix}.\end{aligned}$$

Alltså är z lösning till $z'''+(6i+1)z''+(-8+4i)z'=\frac{1}{2}$, och vi ansätter $z_p=cx$. Insättning ger $(-8+4i)c=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{8(-2+i)}=\frac{-2-i}{8\cdot 5}=-\frac{1}{40}(2+i)$, så att $u_p=-\frac{x}{40}(2+i)e^{2ix}$, $y_{p,2}=\operatorname{Re}u_p=-\frac{x}{40}\operatorname{Re}[(2+i)(\cos 2x+i\sin 2x)]=-\frac{x}{40}(2\cos 2x-\sin 2x)$.

3. Allmänna lösningen till den givna ekvationen är

$$y=C_1e^{-x}+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x+\frac{x}{4}-\frac{1}{8}-\frac{x}{40}(2\cos 2x-\sin 2x)$$

---

4. $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!(k+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2}$.

$$\begin{aligned}x^2f''(x)+xf'(x)+(x^2-4)f(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k+2)(2k+1)}{k!(k+2)!}(\frac{x}{2})^{2k+2}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+2}{k!(k+2)!}(\frac{x}{2})^{2k+2}\\&+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!(k+1)!}4(\frac{x}{2})^{2k+2}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{4}{k!(k+2)!}(\frac{x}{2})^{2k+2}.\end{aligned}$$

Se på koefficienten för $(\frac{x}{2})^{2k+2}$. För $k = 0$ är den $\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{4}{1\cdot 2} = 0$. För $k \geq 1$ fås

$$
\begin{aligned}
&(-1)^k \frac{(2k+2)(2k+1)}{k!(k+2)!} + (-1)^k \frac{2k+2}{k!(k+2)!} + (-1)^{k-1} \frac{4}{(k-1)!(k+1)!} - (-1)^k \frac{4}{k!(k+2)!} \\
&\quad = (-1)^k \frac{(2k+2)(2k+1) + 2k + 2 - 4k(k+2) - 4}{k!(k+2)!} = 0.
\end{aligned}
$$

Alltså satisfierar $f(x)$ differentialekvationen $x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$.

---

5. Studera potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln \cos \frac{1}{n}} = e^{n^2 \ln[1 - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^4})]} = e^{n^2[-\frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^4})]} = e^{-\frac{1}{2} + O(\frac{1}{n^2})}, \\
\sqrt[n]{|a_n|} &= e^{-\frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^3})} \to 1 \quad \text{då } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Alltså är konvergensradien 1. För $x = \pm 1$ fås serien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, och enligt ovan går allmänna termens absolutbelopp inte mot 0 då $n \to \infty$ (utan mot $e^{-\frac{1}{2}}$); serien divergerar. Den givna serien är alltså konvergent precis då $-1 < x < 1$.

---

6. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x+n)^2 e^{-(x+n)}$. a) För $0 \leq x \leq 1$ är $(x+n)^2 e^{-(x+n)} \leq (n+1)^2 e^{-n} \leq \frac{C}{n^2}$ för någon konstant C (eftersom $n^2(n+1)^2 e^{-n} \to 0$ då $n \to \infty$). Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2}$ är konvergent, ger Weierstrass' majorantsats att $\sum_{n=0}^{\infty} (x+n)^2 e^{-(x+n)}$ är likformigt konvergent på $[0, 1]$.

b) På grund av den likformiga konvergensen gäller att

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (x+n)^2 e^{-(x+n)}\,dx = [x + n = t] = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} t^2 e^{-t}\,dt \\
&= \int_0^{\infty} t^2 e^{-t}\,dt = [-t^2 e^{-t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2te^{-t}\,dt = [-2te^{-t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2e^{-t}\,dt \\
&= [-2e^{-t}]_0^{\infty} = \boxed{2}.
\end{aligned}
$$

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del A** den 17/4 2004, kl. 8.45–12.45.

Hjälpmedel: Formelblad på baksidan, ej räknedosa.
Telefon: Erik Broman, tel. 0739-77 92 68.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Lös differentialekvationerna
   a) $(x+1)y' + 2y = x^2, \quad y(0) = 1,$ b) $(x+1)y' = y^2, \quad y(0) = 1.$ (8p)

2. Undersök för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2n^2-1},$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{1}{n}),$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(1+n^2)}.$ (8p)

3. Lös differentialekvationen
   $$y'' + 2y' - 3y = (x+1)e^x.$$ (7p)

4. Bestäm konstanten a så att följande gränsvärde existerar,
   $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a\ln(1+2x)}{x \tan x} \right).$$
   Beräkna sedan gränsvärdet. (7p)

5. Definiera rekursivt en talföljd x_n genom
   $$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n + 1}.$$
   Undersök om x_n konvergerar då $n \to \infty$. Beräkna i så fall gränsvärdet. (8p)

6. Finn lösningar till $2xy'' - y = 0$ i form av en potensserie $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Vad är potensseriens konvergensradie? (7p)

7. Betrakta differensekvationen $y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = d_n$. Låt $y_n^{(p)}$ vara en partikulärlösning till denna ekvation och låt $y_n^{(h)}$ vara allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation (med $d_n = 0$). Visa att $y_n = y_n^{(p)} + y_n^{(h)}$ är allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen. (8p)

8. Antag att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerar i punkten $x_0 \neq 0$. Visa att serien då är absolutkonvergent för alla x sådana att $|x| < |x_0|$. (7p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys F, del A den 17/4 2004

1. a) Skriv ekvationen som $y' + \frac{2}{x+1}y = \frac{x^2}{x+1}x$. Den är linjär med en integrerande faktor $e^{\int \frac{2}{x+1}dx} = e^{2\ln(x+1)} = (x+1)^2$. Multiplicera alltså ekvationen med $(x+1)^2$. Då fås $\frac{d}{dx}((x+1)^2 y) = (x+1)^2 y' + 2(x+1)y = x^2(x+1)$, $(x+1)^2 y = \int (x^3 + x^2)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$. Villkoret $y(0) = 1$ ger $1 = C$, och $\underline{\underline{y = \frac{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+1}{(x+1)^2}}}$.

   b) Ekvationen $(x+1)y' = y^2$ är separabel. Om $y \neq 0$ och $x \neq -1$ kan ekvationen skrivas $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x+1}$, och lösningen ges av $\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x+1}$, $-\frac{1}{y} = \ln|x+1| + C$. Villkoret $y(0) = 1$ ger $C = -1$, och $\underline{\underline{y = \frac{1}{1-\ln(x+1)}}}$.

---

2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2n^2-1}$. Allmänna termen alternerar i tecken. Dess absolutbelopp är $\frac{n}{2n^2-1}$, som går avtagande mot 0 då $n \to \infty$ (för att visa avtagandet, studera funktionen $\frac{x}{2x^2-1}$ vars derivata $-\frac{2x^2+1}{(2x^2-1)^2}$ är negativ). Enligt Leibniz' kriterium är serien konvergent. Men $\sum_1^{\infty} \frac{n}{2n^2-1}$ är divergent (jämför med $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$). Alltså är serien <u>betingat konvergent</u>.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{1}{n})$. Allmänna termen är $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{\sqrt{n}}[\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})]$. Jämför med $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$. Då är $\frac{a_n}{b_n} = 1 + O(\frac{1}{n}) \to 1 > 0$ då $n \to \infty$. Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent, så är också $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>(absolut)konvergent</u>.

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(1+n^2)}$. För $n \geq 2$ är $\frac{\ln(1+n^2)}{\ln n} \leq \frac{\ln(2n^2)}{\ln n} = \frac{\ln 2}{\ln n} + \frac{2\ln n}{\ln n} \leq 3$ och $\frac{1}{n\ln(1+n^2)} \geq \frac{1}{3}\frac{1}{n\ln n}$. Eftersom $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ är divergent (välkänt; om inte, använd integralkriteriet och det faktum att $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = [\ln\ln x]_2^{\infty} = \infty$), varför den givna serien är <u>divergent</u>.

---

3. 1. Karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r - 3 = 0$ med rötter $r_1 = 1$, $r_2 = -3$. Allmänna lösningen till homogena ekvationen är $y_h = C_1e^x + C_2e^{-3x}$.

   2. Då 1 är en enkelrot till karakteristiska ekvationen, ansätts en partikulärlösning $y_p = x(ax+b)e^x = (ax^2+bx)e^x$. Då är

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' - 3y_p &= 2ae^x + 2(2ax+b)e^x + (ax^2+bx)e^x + 2((2ax+b)e^x + (ax^2+bx)e^x) - 3(ax^2+bx)e^x \\ &= 2\,(4ax + a + 2b)\,e^x = (x+1)e^x. \end{aligned}$$

   Alltså är $8a = 1$ och $2(a+2b) = 1$, vilket ger $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{3}{16}$.

   3. Allmänna lösningen till den givna ekvationen är $\underline{\underline{y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + (\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{16}x)e^x}}$.

4.
$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x-1} - \frac{a\ln(1+2x)}{x\tan x} &= \frac{x\tan x - a(e^x-1)\ln(1+2x)}{(e^x-1)x\tan x} \\ &= \frac{x(x+O(x^3)) - a(x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3))(2x-\frac{1}{2}4x^2+O(x^3))}{(x+O(x^2))x(x+O(x^3))} \\ &= \frac{x^2+O(x^4) - a(2x^2-2x^3+x^3+O(x^4))}{x^3+O(x^4)} \\ &= \frac{(1-2a)x^2+ax^3+O(x^4)}{x^3+O(x^4)}. \end{aligned}$$

   För att gränsvärde då $x \to 0$ skall kunna existera måste $\underline{a = \frac{1}{2}}$. I så fall blir uttrycket

$$\frac{\frac{1}{2}x^3+O(x^4)}{x^3+O(x^4)} = \frac{\frac{1}{2}+O(x)}{1+O(x)} \to \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \quad \text{då } x \to 0.$$

---

5. *Metod 1.* Visa att talföljden är växande och uppåt begränsad. *Om* så är fallet, finns ett gränsvärde α, som måste satisfiera $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha+1}$, $\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\alpha+1}$, $\alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0$, $\alpha = 2 \pm \sqrt{8}$. Men $\alpha > 0$, så $\alpha = 2 + 2\sqrt{2}$. För kommande bruk noterar vi att $x^2 - 4x - 4 = (x-\alpha)(x-2+2\sqrt{2})$.

Det gäller att $x_0 = 1 < \alpha$. Om $0 < x_n < \alpha$ för något n, följer att $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n+1} < \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha+1} = \alpha$ och även $x_{n+1} > 0$. Alltså är $0 < x_n < \alpha$ för alla n. Vidare är

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= -\frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n+1} = \frac{x_n + 1 - \frac{x_n^2}{4}}{\frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n+1}} = -\frac{1}{4}\frac{x_n^2 - 4x_n - 4}{\frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n+1}} \\ &= -\frac{1}{4}\frac{(x_n - \alpha)(x_n - 2 + 2\sqrt{2})}{\frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n+1}} > 0, \end{aligned}$$

ty $0 < x_n < \alpha$. Alltså är följden växande och uppåt begränsad, och enligt ovan vet vi då att $\underline{\lim_{n\to\infty} x_n = 2 + 2\sqrt{2}}$.

Metod 2. Använd satsen om fixpunktsiteration. Vi har $x_{n+1} = f(x_n)$, där $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{x+1}$. Låt I vara intervallet $[1, 8]$. $x_0 \in I$. Om $x \in I$ så följer $f(x) \geq \frac{1}{2} + \sqrt{2} > 1$, och $f(x) \leq 4 + \sqrt{9} < 8$, dvs. $f(x) \in I$. Vidare är $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, och för $x \in I$ är $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$. Enligt en sats konvergerar då x_n mot den entydigt bestämda roten α till ekvationen $x = f(x)$ i I. Som ovan fås $\alpha = 2 + 2\sqrt{2}$.

---

6. Ansätt en lösning $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Om konvergensradien R är positiv, gäller för $|x| < R$

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1}, \\ 2xy'' - y &= \sum_{n=0}^{\infty} 2n(n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [2n(n+1)a_{n+1} - a_n] x^n = 0. \end{aligned}$$

Alltså är $2n(n+1)a_{n+1} - a_n$ för alla n. $n = 0$ ger $a_0 = 0$, och för $n > 0$ är $a_{n+1} = \frac{1}{2n(n+1)} a_n$. Vi får

$$a_2 = \frac{1}{2\cdot 1\cdot 2} a_1, \quad a_3 = \frac{1}{2\cdot 2\cdot 3} a_2 = \frac{1}{2^2(1\cdot 2)^2 3} a_1, \quad a_4 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} a_3 = \frac{1}{2^3(1\cdot 2\cdot 3)^2 4} a_1.$$

Allmänt fås $a_n = \frac{1}{2^{n-1}[(n-1)!]^2 n} a_1$. Eftersom $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2n(n+1)} \to 0$ då $n \to \infty$, är $R = \infty$. Alltså ger

$$y = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}[(n-1)!]^2 n} x^n$$

en lösning till differentialekvationen för alla x.

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del A** den 20/8 2004, kl. 8.45–12.45.

Hjälpmedel: Formelblad på baksidan, ej räknedosa.
Telefon: Erik Broman, tel. 073-977 92 68.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Lös differensekvationen $y_{n+2} + 2y_{n+1} + 4y_n = n^2 + 1$. (8p)

2. Lös differentialekvationen $(x^2+1)y' + x(y^2+2y) = 0$. (7p)

3. Konvergerar eller divergerar

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[\ln(n^2+2) - \ln(n^2+1)]\sqrt{n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{2n}}{(3n)!}$? (8p)

4. Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^{x^2} - e^{-x^2})\sqrt{1+x^2} - x^2(e^x + e^{-x})}{2\ln(1+x^4) - \ln(1+2x^4)}\right).$$ (8p)

5. Beräkna summan
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{-2n}}{(2n+1)(2n+2)}.$$ (7p)

6. Undersök funktionsföljden $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}e^{\frac{nx}{n+x}}$ m.a.p. punktvis resp. likformig konvergens då $n\to\infty$ för $x\in[0,1]$. Beräkna $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$. (7p)

7. Formulera och bevisa Maclaurins formel med Lagranges restterm. (7p)

8. Formulera och bevisa lösningsformeln för en linjär homogen differentialekvation av ordning två. (8p)

KH

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{1+\theta x}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{1+(\theta x)^2}$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \ \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del A, för F1 den 20/8 2004

1. Lös $y_{n+2} + 2y_{n+1} + 4y_n = n^2 + 1$. Karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r + 4 = 0$ med lösning $r = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm i2\pi/3}$. Allmänna lösningen till homogena ekvationen är $y_n^{(h)} = 2^n(C_1 \cos\frac{2\pi n}{3} + C_2 \sin\frac{2\pi n}{3})$. Ansätt en partikulärlösning $y_n^{(p)} = an^2 + bn + c$ till den givna ekvationen. Insättning ger

$$\begin{aligned} &a(n+2)^2 + b(n+2) + c + 2a(n+1)^2 + 2b(n+1) + 2c + 4an^2 + 4bn + 4c \\ &= 7an^2 + (8a + 7b)n + 6a + 4b + 7c = n^2 + 1. \end{aligned}$$

Då fås ekvationerna $7a = 1$, $8a + 7b = 0$, $6a + 4b + 7c = 1$ med lösning $a = \frac{1}{7}$, $b = -\frac{8}{49}$, $c = \frac{39}{343}$. Ekvationens allmänna lösning är $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = \underline{2^n(C_1 \cos\frac{2\pi n}{3} + C_2 \sin\frac{2\pi n}{3}) + \frac{1}{7}n^2 - \frac{8}{49}n + \frac{39}{343}}$.

---

2. Lös $(x^2+1)y' + x(y^2+2y) = 0$. Ekvationen kan skrivas $\frac{dy}{y^2+2y} = -\frac{x\,dx}{x^2+1}$, om $y \neq 0$ och $y \neq -2$, och är alltså separabel. Lösningen ges av $\int \frac{dy}{y^2+2y} = -\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$. Vi har $\int \frac{dy}{y^2+2y} = \int \frac{dy}{y(y+2)} = \int (\frac{1}{2}\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\frac{1}{y+2})\,dy = \frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{2}\ln|y+2| = -\frac{1}{2}\ln|\frac{y+2}{y}|$, och $\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$, varför $\ln|\frac{y+2}{y}| = \ln(x^2+1) + C_1 = \ln[e^{C_1}(x^2+1)]$, och $|\frac{y+2}{y}| = e^{C_1}(x^2+1)$, $\frac{y+2}{y} = 1 + \frac{2}{y} = \pm e^{C_1}(x^2+1) = C(x^2+1)$, där C är en godtycklig konstant, $C \neq 0$. Alltså är $\frac{2}{y} = C(x^2+1) - 1$, $y = \frac{2}{C(x^2+1)-1} = \underline{\frac{2}{Cx^2+C-1}}$. Vi kan här även tillåta $C = 0$, vilket ger lösningen $y = -2$. Dessutom är $\underline{y = 0}$ en lösning, som inte fås för någon konstant C. För $C \leq 0$ och $C > 1$ existerar lösningen för alla x. För $0 < C \leq 1$ existerar den på intervall där $x \neq \pm\sqrt{\frac{1-C}{C}}$.

---

3. a) Vi har serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, där $a_n = [\ln(n^2+2) - \ln(n^2+1)]\sqrt{n} = \sqrt{n}\ln\frac{n^2+2}{n^2+1} = \sqrt{n}\ln(1 + \frac{1}{n^2+1}) = \sqrt{n}[\frac{1}{n^2+1} + O(\frac{1}{n^4})]$. Jämför med $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$. Då är $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n^2+1} + O(\frac{1}{n^2}) \to 1 > 0$, då $n \to \infty$. Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent, så är också $\underline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent}}$.

b) Vi har serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, där $a_n = \frac{n!n^{2n}}{(3n)!}$. Det gäller att

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!(n+1)^{2n+2}(3n)!}{(3n+3)!n!n^{2n}} = \frac{(n+1)(n+1)^2(n+1)^{2n}}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)n^{2n}} \\ &= \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{3(3+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})}(1+\frac{1}{n})^{2n} \to \frac{1}{27}e^2 < 1, \text{ då } n \to \infty. \end{aligned}$$

Enligt kvotkriteriet är då $\underline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent}}$.

---

4. Använd Maclaurinutveckling. Se på nämnaren först. $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ då $t \to 0$, varför

$$2\ln(1+x^4) - \ln(1+2x^4) = 2[x^4 - \frac{1}{2}x^8 + O(x^{12})] - [2x^4 - \frac{1}{2}4x^8 + O(x^{12})] = x^8 + O(x^{12}).$$

Utveckla täljaren t.o.m. x^8-termer. Utvecklingarna $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{5040}t^7 + O(t^8)$ och $\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}t^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\cdot 3}t^3 + O(t^4) = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + O(t^4)$ då $t \to 0$ ger

$$\begin{aligned} &(e^{x^2} - e^{-x^2})\sqrt{1+x^2} - x^2(e^x + e^{-x}) = [2x^2 + \frac{1}{3}x^6 + O(x^{10})][1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + O(x^8)] \\ &\quad -x^2[2 + x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{360}x^6 + O(x^8)] = \frac{13}{45}x^8 + O(x^{10}) \text{ då } x \to 0. \end{aligned}$$

Alltså gäller att

$$\frac{(e^{x^2} - e^{-x^2})\sqrt{1+x^2} - x^2(e^x + e^{-x})}{2\ln(1+x^4) - \ln(1+2x^4)} = \frac{\frac{13}{45}x^8 + O(x^{10})}{x^8 + O(x^{12})} = \frac{\frac{13}{45} + O(x^2)}{1 + O(x^4)} \to \underline{\frac{13}{45}} \text{ då } x \to 0.$$

---

5. Studera funktionen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$. Eftersom den formellt två gånger deriverade serien är $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, som har konvergensradien 1, så har serien för $f(x)$ också konvergensradien 1, och det gäller att $f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$ för $|x| < 1$. Alltså är $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x + C_1$, och då $f'(0) = 0$, är $C_1 = 0$. Ytterligare en integrering ger $f(x) = \int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_2$. Eftersom $f(0) = 0$, är $C_2 = 0$. Den sökta summan är $9f(\frac{1}{3}) = 9[\frac{1}{3} \arctan \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{1}{9})] = \underline{3 \arctan \frac{1}{3} - \frac{9}{2} \ln \frac{10}{9}}$.

---

6. För fixt $x \in [0,1]$ gäller att $f_n(x) = \frac{nx}{n+x} e^{\frac{nx}{n+x}} \to xe^x$ då $n \to \infty$. Undersök $|f_n(x) - xe^x|$. Man kan t.ex. utnyttja att $f_n(x) = g(\frac{nx}{n+x})$ för funktionen $g(t) = te^t$. Då är $|f_n(x) - xe^x| = |g(\frac{nx}{n+x}) - g(x)| = |(\frac{nx}{n+x} - x)g'(\xi)|$ för något ξ (beroende på n och x) mellan $\frac{nx}{n+x}$ och x, speciellt mellan 0 och 1. Nu är $\frac{nx}{n+x} - x = -\frac{x^2}{n+x}$och $g'(t) = (t+1)e^t$. Alltså är (för $0 \leq x \leq 1$ och $n \geq 1$)

$$|f_n(x) - xe^x| = \frac{x^2}{n+x}(\xi + 1)e^{\xi} \leq \frac{1}{n} 2e \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

Alltså konvergerar $f_n(x)$ likformigt mot xe^x på $[0,1]$ då $n \to \infty$. P.g.a. den likformiga konvergensen gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x) \, dx = \int_0^1 xe^x \, dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - (e-1) = \underline{1}.$$

Matematik, Chalmers/GU
Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del A**
Tid: 11/12 2004, kl 14.00 – 18.00
Hjälpmedel: Formelblad bifogas tesen, ej räknedosa
Telefonvakt: Leonid Gershuni 073- 977 9268

---

1. Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = n^2 \\ y_0 = 1,\ y_1 = 2 \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \cos^2 x \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

(7p)

3. Avgör om gränsvärdena existerar och i så fall beräkna dem

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3 \cos x}$,

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 - y}$.

(4p+4p)

4. (Denna uppgift ska **endast** räknas av studenter i högre årskurs som inte gjort MATLAB-tentan 2004-12-04.) Bestäm en icke-trivial lösning ($y(x) \not\equiv 0$) till $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$ på formen $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ samt beräkna konvergensradien för denna.

(8p)

5. Konvergerar eller divergerar

   (a) $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{\tan \frac{1}{n}}{\ln(n+1)}$,

   (b) $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$?

(4p+4p)

6. Låt f vara en kontinuerlig reell funktion som uppfyller

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

där C är en positiv konstant. Definiera[1] F på $\mathbb{R}$ som

$$F(x) = \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n).$$

Visa att

(a) F är kontinuerlig och periodisk med perioden 1, dvs. $F(x+1) = F(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

(b) för varje kontinuerlig periodisk funktion $G(x)$ med perioden 1 gäller

$$\int_0^1 F(x)G(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)\,dx.$$

(7p)

7. Formulera och bevisa Leibniz' konvergenskriterium för alternerande serier.

(8p)

8. Definiera begreppet likformig konvergens på en mängd M för en funktionsföljd, samt formulera och bevisa satsen om gränsövergång under integraltecknet för en likformigt konvergent funktionsföljd.

(7p)

[1] $F(x) = \lim_{N\to\infty} \Sigma_{n=-N}^{N} f(x+n)$

Lösningsförslag till TMA975 del A, 2004-12-11

1. Lös

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = n^2, \ n = 0, 1, 2, \ldots & (*) \\ y_0 = 1, y_1 = 2 \end{cases}$$

Lösning:
Karakteristiska polynomet: $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$ ger homogenlösningen $y_m^{(h)} = A + B2^m$.
För partikulärlösning ansätt $y_n^{(p)} = n(C + Dn + En^2)$, då 1 är ett nollställe till det karakteristiska polynomet. Insättning i $(*)$ och identifiering av koefficienterna ger

$$\begin{aligned} n^0 :& \quad -C + D + 5E = 0 \\ n^1 :& \quad -2D + 3E = 0 \\ n^2 :& \quad -3E = 1 \end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{cases} C = -\frac{13}{6} \\ D = -\frac{1}{2} \\ E = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Lösningen till $(*)$ ges av

$$y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = A + B2^n - \frac{13}{6}n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{3}n^3, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Koefficienterna A och B bestäms från begynnelsevillkoren $y_0 = 1, y_1 = 2$ vilket ger $A = -3, B = 4$.

Svar: $y_n = -3 + 4 \cdot 2^n - \frac{13}{6}n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{3}n^3, \ n = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Lös

$$\begin{cases} y'' - y' + y = \cos^2 x \\ y(0) = 1, y(0) = 2 \end{cases}$$

Lösning:
Karakterisisk polynomet: $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$ ger homogenlösningen $y_h(x) = (A + Bx)e^x$. Ansätt partikulärlösning $\tilde{y}_p(x) = C + De^{i2x}$ då $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$.
Detta ger

$$\begin{cases} C = \frac{1}{2} \\ (-4 - 2 \cdot 2i + 1)De^{i2x} = \frac{1}{2}e^{i2x} \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} C = \frac{1}{2} \\ D = -\frac{3}{50} + i\frac{2}{25} \end{cases}$$

Vi får partikulärlösningen

$$y_p(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\,((-\frac{3}{50} + i\frac{2}{25})e^{i2x}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{50}\cos 2x - \frac{2}{25}\sin 2x.$$

Lösningen till differentialekvationen ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A + Bx)e^x + \frac{1}{2} - \frac{3}{50}\cos 2x - \frac{2}{25}\sin 2x$$

Konstanterna A och B bestäms av begynnelsevillkoren $y(0) = 1, y'(0) = 2$. Vi får

$$A = \frac{14}{25}, \quad B = \frac{40}{25}$$

Svar: $y(x) = (\frac{14}{25} + \frac{40}{25}x)e^x + \frac{1}{2} - \frac{3}{50}\cos 2x - \frac{2}{25}\sin 2x$.

3. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3 \cos x}$

   Lösning:

   MacLaurinutveckling av nämnare och täljare ger

$$\frac{\arctan x - \sin x}{x^3 \cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3} - (x - \frac{x^3}{6}) + O(x^5)}{x^3 + O(x^5)} = \frac{-\frac{1}{6} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \to -\frac{1}{6}, \quad x \to 0.$$

   Svar: $-\frac{1}{6}$.

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 - y}$.

   Lösning:

   Sätt $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 - y}$. Vi får

$$f(x, 0) = x \to 0, \quad x \to 0$$
$$f(x, x^2 - x^3) = 1 \to 1, \quad x \to 0$$

   Svar: gränsvärdet existerar ej.

4. Lös $x^2y^4 + xy'' + (x^2 - 1)y = 0$ med potensserieansats.

   Lösning:

   Sätt $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. För $|x| < R$, där R = konvergensradien för potensserien kan denna deriveras termvis upprepade gånger. Detta ger

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + (x^2 - 1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

   Detta ger (efter lite byte av index)

$$\begin{cases} a_n(n(n-1) + n - 1) + a_{n-2} = 0 & n = 2, 3, \ldots \\ a_1 - a_1 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

dvs

$$a_{2k} = 0,\ k = 0, 1, 2, \dots$$
$$a_{2k+1} = (-1)^k (\frac{1}{2})^{2k} \frac{1}{k!(k+1)!} a_1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Alltså

$$y(x) = a_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-19^k (\frac{1}{2})^{2k} \frac{1}{k!(k+1)!} x^{2k+1}$$

Denna potensserie har konvergensradien

$$R = 1/(\lim_{k\to\infty} \frac{a_{2k+3}}{a_{2k+1}})^{\frac{1}{2}} = \infty,$$

dvs, konvergensområdet är $\mathbb{R}$.

Svar: $a_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\frac{1}{2})^{1k} \frac{1}{k!(k+1)!} x^{2k+1}$ med konvergensområdet $\mathbb{R}$.

5. Konvergerar eller divergerar

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tan \frac{1}{n}}{\ln(n+1)}$.

Lösning:
Jämför med $\frac{1}{n \ln n}$, där vi vet att $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergerar.

$$\frac{\frac{\tan \frac{1}{n}}{\ln(n+1)}}{\frac{1}{n \ln n}} = n \tan \frac{1}{n} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)} =$$
$$= \underbrace{n(\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}))}_{\longrightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}}}_{\longrightarrow 1} \longrightarrow 1, \quad n \to \infty$$

Jämföreslsekriteriet på gränsvärdesform ger att

Svar: serien divergerar

Kommentar: Observera att en utveckling av logaritmfunktionen a la

$$\ln(1+n) = n + O(n^2)$$

ger ingen information då resttermen dominerar.

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

Lösning:
Jämför även här med $\frac{1}{n \ln n}$. Vi har

$$\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n \ln n}} = \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{n}}} \to +\infty, n \to \infty.$$

Jämförelsekriteriet ger ($\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{n \ln n}$ för stora n) att
Svar serien divergerar
Kommentar: Man kan **inte** utifrån att $1+\frac{1}{n} > 1$ dra slutsatsen att $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ konvergerar!!

6. $f \in C(R)$ uppfyller $|f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Sätt

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n),\ n \in \mathbb{R}.$$

Vi ska visa:

(a) $F \in C(\mathbb{R})$ och $F(x+1) = F(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$

(b) $\int_0^1 F(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx$ för alla $G \in C(\mathbb{R})$ där $G(x+1) = G(x)$ alla $x \in \mathbb{R}$.

Lösning:
Fixera kompakt intervall $[-R, R]$ där $R > 1$. Då gäller att $|f(x+n)| \leq \frac{1}{1+(\frac{n}{2})^2}$ alla $x \in [-R, R]$ för alla $|n| \geq 2R$. Weierstrass M-test ger att $\sum_{|n|\geq 2R} f(x+n)$ konvergerar likformigt på $[-R, R]$ och så också hela $F(x)$ (Den punktvisa konvergensen klar direkt via jämförelse med serien $\Sigma\frac{1}{n^2}$). Då alla translationer $f(x+n)$ av $f(x)$ är kontinuerliga och serien konvergerar likformigt är F kontinerlig på $[-R, R]$. $F(x+1) = F(x)$ följer lätt. Vidare

$$\int_0^1 F(x)G(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)G(x)dx = \{\text{gränsövergång}$$

under $\int$-tecknet med likformig konvergens$\}$ =

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n)G(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)G(x-n)dx =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx.$$

Hjälpmedel: Formelblad bifogas tesen, ej räknedosa

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Telefon: Axel Målqvist, 0739-779268
2005–04–02 kl. 08.30–12.30

Tentamen i TMA975 Reell matematisk analys F, del A

Betygsgränser: 3=24p, 4=36p, 5=48p. Lärares närvaro i tentamenssalen: ca 9.30 och 11.30.
OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = x^2y - 3x^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 24xe^{-x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2. \end{cases}$$

(7p)

3. Avgör om gränsvärdena existerar[1] och beräkna i så fall dem:

   a) $\lim_{n\to\infty} \Pi_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$, (4p)

   b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$. (4p)

4. a) Avgör för vilka reella tal p som serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

   konvergerar. (4p)

   b) Avgör om

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$$

   konvergerar. (3p)

5. Bestäm den allmänna potensserie som satisfierar

$$y'' - xy' + 2y = 0.$$

   Bestäm också potensseriens konvergensradie. (8p)

6. Låt f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[0,1]$. Avgör om

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\, dx$$

   existerar och beräkna i så fall gränsvärdet. (8p)

7. Formulera och bevisa satsen om potensseriers konvergens. (7p)

8. Formulera l'Hospitals sats. Bevisa något av fallen. (8p)

PK

[1] Tolkning av produktsymbolen: $\Pi_{n=1}^{N} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_N$

Lösningsförslag till TMA975, del A, 2005-04-02

1. $\begin{cases} y' = x^2y - 3x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ är en separabel differentialekvation. Då $y \equiv 3$ ej satisfierar $y(0) = 1$ gäller

$$\int_1^y \frac{dy}{y-3} = \int_0^x x^2 dx$$

dvs $\ln|y-3| - \ln|1-3| = \frac{1}{3}x^3$
dvs $|y-3| = e^{\ln 2 + \frac{1}{3}x^3} = 2e^{\frac{1}{3}x^3}$
dvs $y = 3 - 2e^{\frac{1}{3}x^3}$ då $y(0) = 1$.

Svar: $y(x) = 3 - 2^{\frac{1}{3}x^3}$.

Kommentar: Problem kan naturligtvis också lösas med metoden med integrerande faktor.

2. $\begin{cases} y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 24xe^{-x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \end{cases}$

Karakteristiska polynomet: $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r-1)(r-2)(r-3)$. Homogenlösningen ges då av $y_h(x) = Ae^x + Be^{2x} + Ce^{3x}$. Ansätt en partikulärlösning $y_p(x) = (ax+b)e^{-x}$.

Förskjutningsregeln tillämpad på

$$(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)[(ax+b)e^{-x}] = 24xe^{-x}$$

ger

$$((D-1)^3 - 6(D-1)^2 + 11(D-1) - 6)[ax+b] = 24x$$

dvs

$$(D^3 - 9D^2 + 26D - 24)[ax+b] = 24x$$

dvs

$$-24ax + 26a - 24b = 24x$$

Alltså $a = -1, b = -\frac{13}{12}$.

Den allmänna lösningen till differentialekvationen ges av

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x} + Ce^{3x} - xe^{-x} - \frac{13}{12}e^{-x}$$

Villkoren $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2$ bestämmer A, B och C

$$\begin{cases} A + B + C - \frac{13}{12} = 0 \\ A + 2B + 3C - \frac{11}{12} = 0 \\ A + 4B + 9C - \frac{13}{12} = 0 \end{cases}$$

dvs $A = \frac{3}{2}, B = -\frac{2}{3}, C = \frac{1}{4}$.

Svar: $y(x) = \frac{3}{2}e^{x} - \frac{2}{3}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{3x} - xe^{-x} + \frac{13}{12}e^{-x}$.

3. (a)

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot n\cdot n\cdot (n+1)\cdot (n+1)}{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot (n+1)\cdot n\cdot (n+2)} =$$

$$= \frac{2\cdot (n+1)}{(n+2)} = 2\cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \to 2 \quad n \to \infty.$$

Svar: 2

(b) $(x^2+y^2)^{x^2y^2} = \{\text{polära koordinater } x = r\cos\theta, y = r\sin\theta\} = e^{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\ln(r^2)}$ där $|r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\ln(r^2)| \le 2r^4|\ln r| \to 0, r \to 0$.

Alltså

$$(x^2+y^2)^{x^2y^2} \to 1 \quad \text{då} \quad (x,y) \to (0,\infty).$$

Svar: 1

4. (a) $\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}B(\frac{1}{n})$ där funktionen B är begränsad i en omgivning av 0. Då $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ konvergerar om och endast om $p > 1$ gäller

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sin(\frac{1}{n})$ konvergerar för $p > 0$ då $|\frac{1}{n^p}\sin(\frac{1}{n}| \le \frac{C}{n^{p+1}}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ för något $C > 0$ enligt jämförelsesatsen.
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sin(\frac{1}{n})$ divergerar för $p \le 0$ ty för $p \le -1$ gäller $\frac{1}{n^p}\sin(\frac{1}{n}) \not\to 0$ då $n \to \infty$ och för $p \in]-1, 0]$ gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sin(\frac{1}{n}) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}}_{\text{divergent}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+3}}\cdot B(\frac{1}{n})}_{\text{konvergent}}$$

Svar: Serien konvergerar om och endast om $p > 0$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ är en alternerande serie och funktionen $f(x) = \sqrt[x]{x} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$ är avtagande för $x > e$ då $f'(x) = \sqrt[x]{x}\cdot(\frac{1+\ln x}{x^2}) < 0$ för $x > e$. Men $f(x) \to 1$ då $x \to \infty$ och det är ett nödvändigt villkor för att en serie ska konvergera att termerna gåt mot 0. Alltså divergerar serien.

Svar: Serien divergerar.

5. Betrakta $y'' - xy' + 2y = 0$. Ansätt potensserier $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$. För x i det inre av konvergensintervallet gäller $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$ och $y^k(x) = \sum_{r=2}^{\infty}a_nn\cdot(n-1)x^{n-2}$. Insättning i differentialekvationen och indexbyte

ger $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$.
dvs

$$\begin{cases} 2a_2 + 2a_0 = 0 \\ a_{n+2} \cdot (n+2)(n+1) - na_n + 2a_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Vi har

$$\begin{cases} a_2 = -a_0 \\ a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n(n-2) = 0, \quad n = 1, 2, 3 \end{cases}$$

För jämn index gäller

$$\begin{cases} a_2 = -a_0 \\ a_4 = a_6 = \ldots = a_{2k} = \ldots = 0 \end{cases}$$

För udda index gäller

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{(2k-3)}{(2k+1)\cdot 2k} a_{2k-1} = \\ &= \frac{(2k-3)\cdot(2k-5)}{(2k+1)\cdot 2k\cdot(2k-1)\cdot(2k-2)} a_{2k-3} = \\ &= -\frac{(2k-3)!!}{(2k+1)!} a_1, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Detta ger

$$y(x) = a_0(1-x^2) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k+1)!} a_1 x^{2k+1}$$

För att bestämma konvergensradien skriv

$$y(x) = a_0(1-x^2) - a_1 x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k+1)!} x^{2k}$$

där vi sätter $h(x^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k+1)!} x^{2k}$. Som funktion av $t = x^2$ konvergerar $h(t)$ för $|t| < R$ där $\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+3)!} / \frac{(2k-3)!!}{(2k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k-1}{(2k+3)(2k+1)} = 0$ dvs $R = \infty$. Alltså $y(x)$ konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$.

Svar: $y(x) = a_0(1-x^2) - a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ **och serien konvergerar för** alla x, dvs konvergensradie R är "$R = \infty$".

6. Vi noterar att för en kontinuerlig funktion f på $[0,1]$ med $f(1) \neq 0$ gäller inte att $nx^n f(x)$ konvergerar likformigt på $[0,1]$ då $n \to \infty$ eftersom

$$nx^n f(x) \to \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ \pm\infty & x = 1 \qquad \text{då } f(1) \neq 0 \end{cases}$$

och gränsfunktionen inte är kontinuerlig.

Vi noterar vidare att

$$n\int_0^1 x^n f(x)dx = n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))dx + n\int_0^1 x^n f(1)dx,$$

där

- $n\int_0^1 x^n f(1)dx = \frac{n}{n+1}f(1) \to f(1),\ n\to\infty$

  och

  (*) $\qquad n\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|dx \to 0, \quad n\to\infty$

  För att visa (*), sätt $M = \max_{x\in[0,1]}|f(x)-f(0)|$.

  För varje $1>\delta>0$ gäller

- $\qquad n\int_0^{1-\delta} x^n|f(x)-f(1)|dx \le \frac{n}{n+1}(1-\delta)^n M \to 0, \quad n\to\infty.$

Fixera $\epsilon>0$. Välj $\delta>0$ så att $|f(x)-f(1)|<\epsilon$ för $|x-1|<\delta$. För detta $\delta>0$ gäller

$$n\int_{1-\delta}^1 x^n|f(x)-f(1)|dx < \epsilon\frac{n}{n+1}(1-(1-\delta)^{n+1}) < \epsilon \quad \text{alla } n.$$

Alltså, för varje $\epsilon>0$ existerar N så att

$$n\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|dx < \epsilon \quad \text{för alla} \quad n\ge N.$$

Alltså

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|dx = 0.$$

Svar: $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1).$

Hjälpmedel: Formelblad bifogas tesen, ej räknedosa
MATEMATIK Telefon: Erik Broman, 0762-721860
Chalmers tekniska högskola 2005–08–19 kl. 08.30–12.30

Tentamen i TMA975 Reell matematisk analys F, del A

Betygsgränser: 3=24p, 4=36p, 5=48p. Lärares närvaro i tentamenssalen: ca 9.30 och 11.30.
OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y''' + 3y'' + 4y' + 2y = e^{-x} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

(7p)

2. Beräkna för godtyckliga reella tal a_0 och a_1 följden $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ då

$$a_{n+2} = \frac{2a_{n+1} + a_n}{3}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Beräkna sedan

$$\max\{\lim_{n\to\infty} a_n : a_0^2 + a_1^2 = 1\}.$$

(8p)

3. Avgör om gränsvärdena existerar och beräkna i så fall dem:

a) $\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x} + e^{\frac{2}{x}})^x$, (4p)

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy|^{x^4+y^4}$. (4p)

4. Avgör för vilka reella tal x som serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}} x^n$$

konvergerar. (6p)

5. Bestäm den allmänna potensserie som satisfierar

$$y'' - xy' + 2y = 0.$$

Bestäm också potensseriens konvergensradie. (8p)

6. För vilka reella tal x konvergerar serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n} - 1}.$$

(8p)

7. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats. (7p)

8. Formulera och bevisa integralkriteriet. (8p)

PK

Lösningsskisser TMA 975 den 19/8 2005

(1) Kar. ekv. $r^3+3r^2+4r+2=0$

$r_1=-1$

$$\begin{array}{r|l} & r^2+2r+2 = (r+1)^2+1 = (r+1+i)(r+1-i). \\ r+1 & r^3+3r^2+4r+2 \\ & r^3+r^2 \\ \hline & 2r^2+4r+2 \\ & 2r^2+2r \\ \hline & 2r+2 \\ & 2r+2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$r_{2,3}=-1\pm i$

$y_h(x) = Ae^{-x}+Be^{-x}\cos x + Ce^{-x}\sin x$

$y_p(x) = e^{-x}z(x)$

Förskjutning $(D^3+3D^2+4D+2)[e^{-x}z(x)]$

$= e^{-x}\left((D-1)^3+3(D-1)^2+4(D-1)+2\right)[z(x)]$

$= e^{-x}(D^3+D)[z(x)]$

Välj $z(x)=dx$ Då fås $d=1$

Allmänna lösningen $y(x) = y_h(x)+y_p(x) =$

$= Ae^{-x}+Be^{-x}\cos x+Ce^{-x}\sin x + xe^{-x}$.

Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{cases} 0 = A+B \\ 0 = -A-B+C+1 \\ 0 = A+2C-2 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=-1 \end{cases}$$

Svar: $y(x) = xe^{-x} - e^{-x}\sin x$

(2) Kar. ekv. för rekursionsekv. $a_{n+2} = \dfrac{2a_{n+1}+a_n}{3}$

$r^2-\frac{2}{3}r-\frac{1}{3}=0$, dvs $r_{1,2} = \frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}$ $\begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3}\end{cases}$

Alltså

$a_n = A+B\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad n=0,1,2,\ldots$

där $a_0=A+B$, $a_1 = A-\frac{1}{3}B$. Vi har

$A = \frac{1}{4}a_0+\frac{3}{4}a_1$, $B=\frac{3}{4}a_0-\frac{3}{4}a_1$

Detta ger $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}a_0+\frac{3}{4}a_1$

Återstår att beräkna

$\max\left\{ \frac{1}{4}a_0 + \frac{3}{4}a_1 : a_0^2 + a_1^2 = 1 \right\} \equiv M$

$\frac{1}{4}a_0 + \frac{3}{4}a_1$ är konstant på linjer $\frac{1}{4}a_0 + \frac{3}{4}a_1 = \lambda$

i (a_0, a_1)-planet, vilka har $(1,3)$ som normalvektor

Speciellt ger $t^2 + (3t)^2 = 1$, $t > 0$ att $t = \frac{1}{\sqrt{10}}$ och

$$M = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{4}\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Svar: $a_n = \frac{1}{4}a_0 + \frac{3}{4}a_1 + \left(\frac{3}{4}a_0 - \frac{3}{4}a_1\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n$, $n = 0,1,2,\ldots$

och $M = \frac{\sqrt{10}}{4}$

(3) a)

$$\left[\frac{1}{x} + e^{\frac{2}{x}}\right]^x = \left[\frac{1}{x} + \left(1 + \frac{2}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]^x =$$

$$= \left[1 + \frac{3}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^x =$$

$$= e^{x\ln\left(1 + \frac{3}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} = e^{x\left(\frac{3}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} =$$

$$= e^{3 + O\left(\frac{1}{x}\right)} \longrightarrow e^3, \quad x \to \infty$$

b)

$$|xy|^{x^4+y^4} = \{\text{polära koordinater}\} = \left|\tfrac{1}{2}r^2\sin(2\theta)\right|^{r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta)} \leq$$

$$\leq (r^2)^{r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta)}$$

Men $\cos^4\theta + \sin^4\theta = \cos^4\theta + (1-\cos^2\theta)^2 =$

$$= 1 - 2\cos^2\theta + 2\cos^4\theta =$$

$$= 2\left(\cos^2\theta - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} \geq \tfrac{1}{2}$$

Alltså

$$|xy|^{x^4+y^4} \leq (r^2)^{\frac{1}{2}r^4} = r^{r^4} = e^{r^4\ln r} \to 1, \ r \to 0$$

Med $f(x,y) = |xy|^{x^4+y^4}$

$f(0,y) = f(x,0) = 0$

$x > 0$: $f(x,x) = x^{2(x^4+x^4)} = e^{4x^4\ln x^2} \longrightarrow 1$, $x \to 0$.

Gränsvärdet existerar ej!

④ Potensserie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}} x^n$

Konv radie R:

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}\ln n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}(\ln n)^2} = 1$$

$x = -1$: Leibniz ger konv då

$$\frac{1}{n^{\ln n}} \searrow 0, \quad n \to \infty$$

$x = 1$: konv. då $\left|\frac{1}{n^{\ln n}}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ då $n \geq e^2$.

⑤ Se förra tentan

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n}-1}$

$-1 < x < 1$: Konvergent då $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ konvergent

och $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0$

$x > 1$: Konvergent då $x^{2n} - 1 > \frac{1}{2} x^{2n}$

för x tillr. stort och

$$\sum_{x \text{ stort}} \frac{x^n}{x^{2n}-1} \leq \sum_{x \text{ stort}} 2 \frac{x^n}{x^{2n}} = 2 \sum_{x \text{ stort}} x^{-n}$$

$x < -1$ Analogt

Svar: Konvergent för $x \neq \pm 1$