REEL ANALYS

A

ÖVNINGAR

20 PENGAR

8.8 c) $y' + y\cot x = \tan^2 x \quad , \; 0 < x < \frac{\pi}{2}$

bestäm en primitiv till $\cot x$:

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$$

$$= \ln(\sin x) + C \qquad \text{ty } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

integrerande faktor: $e^{\ln(\sin x)} = \sin x$

multiplicera ekvationen med $\sin x$:

$y' \sin x + y \cos x = \tan^2 x \sin x$

$[y \sin x]' = \tan^2 x \sin x$

integrera högerledet:

$$\int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \left[\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \cos x + C$$

multiplikation med $\frac{1}{\sin x}$ ger:

$$y = \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{C}{\sin x}$$

$$= \frac{2}{\sin 2x} + \cot x + \frac{C}{\sin x}$$

■

8.9 b) $(1-x^2)y' + xy = x \quad , \; |x| < 1 \quad , \; y(0) = 3$

$$y' + \frac{x}{1-x^2} y = \frac{x}{1-x^2}$$

bestäm en primitiv till $\frac{x}{1-x^2}$:

$$\int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$$

integrerande faktor: $e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y\right]' = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

integrera högerledet:

$$\int \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}}dx = -\frac{1}{2}(-2)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$$

multiplicera med $\sqrt{1-x^2}$:

$y = 1 + C\sqrt{1-x^2}$

villkoret $y(0)=3$ ger konstantens värde :

$y(0) = 1 + C\sqrt{1} = 3 \iff C=2$

$y = 1+2\sqrt{1-x^2}$

$\blacksquare$

8.10 $\sqrt{1+x^2}\,y' + y = \sqrt{1+x^2}$, $y(0)=7$

$y' + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}y = 1$

bestäm en primitiv till $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$:

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ldots$

variabelbyte : $x + \sqrt{1+x^2} = t$

$\sqrt{1+x^2} = t-x$

$1+x^2 = t^2-2tx+x^2$

$x = \frac{t^2-1}{2t} \implies \sqrt{1+x^2} = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{2t} + (t^2-1)\left(-\frac{1}{2t^2}\right) = \frac{2t^2-t^2+1}{2t^2} = \frac{t^2+1}{2t^2} \iff dx = \frac{t^2+1}{2t^2}dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t|+C$$

$$= \ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C$$

integrerande faktor : $x + \sqrt{1+x^2}$

$[(x+\sqrt{1+x^2})\,y]' = x + \sqrt{1+x^2}$

integrera högerledet :

$\int (x+\sqrt{1+x^2})\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \int\sqrt{1+x^2}\,dx = \ldots$

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx = \{\text{partialintegrera}\} = x\sqrt{1+x^2} - \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = x\sqrt{1+x^2} - \underbrace{\int\sqrt{1+x^2}\,dx}_{\text{sökt integral}} + \underbrace{\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx}_{\text{känd}}$$

$$2\int\sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2} + \ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C$$

$$\int(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = \frac{1}{2}\{x^2 + x\sqrt{1+x^2} + \ln|x+\sqrt{1+x^2}|\} + C'$$

$$(x+\sqrt{1+x^2})y = \frac{1}{2}\{x^2 + x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})\} + C'$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{(x-\sqrt{1+x^2})(\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C)}{2(x-\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$= \frac{1}{2}x + (\sqrt{1+x^2}-x)(\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C)\cdot\frac{1}{2}$$

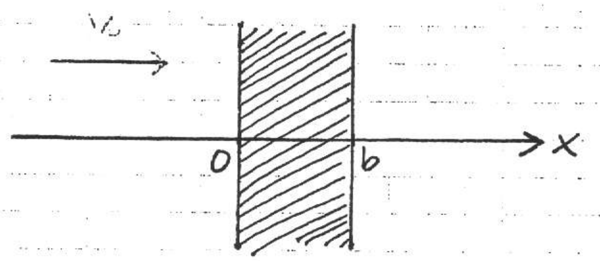
villkoret $y(0)=7$ ger konstantens värde:

$$y(0) = \frac{1}{2}C = 7 \iff C = 14$$

$$y = \frac{1}{2}\{x + (\sqrt{1+x^2}-x)(\ln(x+\sqrt{1+x^2})+14)\}$$

∎

8.20



hastighet: $v(t)$

$$\left.\begin{aligned}\text{retardation: } -v'(t) &= kv(t)\\ v(0) &= v_0\end{aligned}\right\}\quad \text{lösning } v(t) = v_0e^{-kt}$$

Kulan skall nätt och jämt igenom väggen $\Rightarrow$ då kulan är i $x=b$ är hastigheten 0.

Men $v(t) = v_0e^{-kt} = 0 \iff t = \infty$

Kulans position ges av $x(t) = x(0) + \int_0^t v_0e^{-ku}\,du$

$$b = \int_0^\infty v_0e^{-ku}\,du = v_0\left[-\frac{1}{k}e^{-kt}\right]_0^\infty = \frac{v_0}{k}$$

Vi får $b = \frac{v_0}{k}$

∎

8.23 e) $x^2 y \frac{dy}{dx} = 1 + x^2$, $y(2) = 2$

Vi har en separabel diffekvation (dela med x^2 först):

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$y\,dy = (1 + \tfrac{1}{x^2})\,dx$$

integrera höger- och vänsterled:

$$\int y\,dy = \int (1 + \tfrac{1}{x^2})\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 + C_1 = x - \frac{1}{x} + C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 - C_1 \text{ okänd konstant}$$

använd villkoret $y(2) = 2$:

$$\frac{1}{2}\cdot 2^2 = 2 - \frac{1}{2} + (C_2 - C_1) \implies C_2 - C_1 = \frac{1}{2}$$

$$y = \sqrt{2(x - \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{2})}$$

8.28 a) Ställ upp kraftekvationen: $F = ma$

$$mv' = mg - kv^2$$

b) $\frac{dv}{dt} = 1 - v^2$, $v > 1$, $v(0) = 3$

Eftersom $v \neq \pm 1$, så är $1 - v^2 \neq 0$ och ekvationen är separabel:

$$\frac{dv}{1-v^2} = dt$$

partialbråksuppdela vänster led:

$$\frac{1}{1-v^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+v} + \frac{\frac{1}{2}}{1-v}$$

$$\frac{1}{2}\int \left\{\frac{1}{1+v} + \frac{1}{1-v}\right\} dv = \int dt$$

$$\frac{1}{2}(\ln(1+v) - \ln(1-v)) + C = t$$

$$\ln \frac{C'(1+v)}{1-v} = 2t \implies e^{2t} = \frac{C'(1+v)}{1-v}$$

använd villkoret $v(0) = 3$:

$$1 = C'\cdot\frac{1+3}{1-3} \implies C' = -\frac{1}{2}$$

Vi har nu ett uttryck för $t(v)$, men vill ha $v(t)$.

$$2e^{2t} = \frac{1+v}{v-1}$$

$$(v-1)\cdot 2e^{2t} = 1+v$$

$$v = \frac{2e^{2t}+1}{2e^{2t}-1}$$

Gränsvärde då $t \to \infty$? Skriv om $v(t)$:

$$v = \frac{2+e^{-2t}}{2-e^{-2t}} \to \frac{2}{2} = 1 \text{ då } t \to \infty$$

■

8.33 $\frac{dy}{dt} = ry(K-y)$; $r, K > 0$

$$\begin{cases} t=0 \Rightarrow y = 10^4 \\ t=1 \Rightarrow y = 2\cdot 10^4 \\ t \to \infty \Rightarrow y = 10^5 \end{cases}$$

Lös diffekvationen, för att få ett uttryck för y som funktion av t. Ekvationen är separabel:

$$\frac{dy}{y(K-y)} = r\,dt$$

Partialbråksuppdela vänsterledet:

$$\frac{1}{y(K-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{K-y} = \frac{AK - Ay + By}{y(K-y)} = \begin{Bmatrix} AK=1 \\ -A+B=0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{K}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}\right]$$

Integrera:

$$\int \frac{dy}{y(K-y)} = \frac{1}{K}\int\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}\right]dy = \frac{1}{K}(\ln|y| - \ln|K-y|) = \frac{1}{K}\ln\left|\frac{y}{K-y}\right| + C$$

Men y är antalet individer och alltså är $y > 0$.
Dessutom gäller $K - y > 0$ eftersom populationen växer och $y' > 0$.

$$\int \frac{dy}{y(K-y)} = \frac{1}{K}\ln\frac{Cy}{K-y} \quad \text{med } C > 0$$

$$\int r\,dt = rt + C_1$$

$$\int \frac{dy}{y(K-y)} = \int r\,dt$$

$$\frac{1}{K} \ln \frac{Cy}{K-y} = rt$$

$$e^{rKt} = \frac{Cy}{K-y}$$

$$Ke^{rKt} - ye^{rKt} = Cy$$

$$y = \frac{Ke^{rKt}}{C + e^{rKt}} = \frac{K}{Ce^{-rKt} + 1}$$

Bestäm nu C, r och K:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{K}{Ce^{-rKt}+1} = K \implies K = 10^5$$

$$y(0) = 10^4 \implies 10^4 = \frac{10^5}{C+1}$$

$$C = 9$$

$$y(1) = 2\cdot 10^4 \implies e^{10^5 r} = \frac{9\cdot 2\cdot 10^4}{10^5 - 2\cdot 10^4}$$

$$r = 10^{-5} \ln \frac{9}{4}$$

∎

8.34 $f(x) = x + \int_0^x \frac{2t\,f(t)}{1+t^2}\,dt$ (1)

Analysens huvudsats säger att $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt \implies S'(x) = f(x)$

Derivera hela ekvationen:

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{1+x^2} f(x) \implies f'(x) + \frac{-2x}{1+x^2} f(x) = 1 \quad (2)$$

Vi har förlorat information vid deriveringen: Ur (1) kan vi även få ett begynnelsevillkor till (2).

$x=0$ i (1) $\rightarrow$ $f(0)=0$

$$(1) \iff \begin{cases} f'(x) + \frac{-2x}{1+x^2} f(x) = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Lös nu mha integrerande faktor:

$$\int \frac{-2x}{1+x^2}\,dx = -\ln|1+x^2| + C = \ln\frac{1}{1+x^2} + C$$

integrerande faktor: $e^{\ln\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2}$

Multiplicera med $\frac{1}{1+x^2}$

$$\left[\frac{1}{1+x^2}f(x)\right]' = \frac{1}{1+x^2}$$

Integrera högerledet:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C \quad \text{(standardprimitiv)}$$

$$f(x) = (1+x^2)\arctan x + C(1+x^2)$$

$$f(0)=0 \Rightarrow 0 = 1\cdot\arctan 0 + C' \Rightarrow C'=0$$

$f(x) = (1+x^2)\arctan x$ löser integralekvationen

∎

8.38 a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

karakteristiska polynomet: $r^2 - 3r + 2 = 0$

$$r = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 2$$

$r_1 \neq r_2 \Rightarrow$ samtliga lösningar ges av $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{2x}$$

c) $y'' - 6y + 10y = 0$

karakteristiska polynomet: $r^2 - 6r + 10 = 0$

$$r = \frac{6}{2} \pm i\sqrt{\frac{40}{4} - \frac{36}{4}} = 3 \pm i \Rightarrow r_1 = 3+i,\ r_2 = 3-i$$

Komplexkonjugerade rötter $\Rightarrow$ samtliga lösningar ges av

$$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

$$y = e^{3x}(A\cos x + B\sin x)$$

Lösningen kan även skrivas $y = e^{3x}\cdot C\sin(x+\delta)$

∎

8.42 $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(\ell) = 0$: sök icke-triviala lösningar

3 fall: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$

$\underline{\lambda < 0}$: sätt $\lambda = -\omega^2$ med $\omega \in \mathbb{R}$

$y'' - \omega^2 y = 0 \rightarrow$ karakteristiska polynomet: $r^2 - \omega^2 = 0$

rötter $r_{1,2} = \pm\omega$

$y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$

Bestäm C_1 och C_2 mha randvillkoren:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\omega\ell} + C_2 e^{-\omega\ell} = 0 \end{cases}$$

Ekvationssystemet har icke-triviala lösningar då dess determinant (koefficientmatrisens) $= 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\omega\ell} & e^{-\omega\ell} \end{vmatrix} = e^{-\omega\ell} - e^{\omega\ell} \neq 0$$

Det finns alltså inga icke-triviala lösningar utan

$A = B = 0 \implies y = 0$ (trivial)

$\underline{\lambda = 0}$:

$y'' = 0 \implies y = C_3 x + C_4$

Bestäm C_3 och C_4 mha randvillkoren:

$$\begin{cases} C_4 = 0 \\ C_3\ell + C_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \end{cases} \iff y = 0 \quad \text{(trivial)}$$

$\underline{\lambda > 0}$: sätt $\lambda = \omega^2$ med $\omega \in \mathbb{R}$

$y'' + \omega^2 y = 0 \rightarrow$ karakteristiska polynomet: $r^2 + \omega^2 = 0$

rötter $r_{1,2} = \pm i\omega$

$y = A \sin \omega x + B \cos \omega x$

Bestäm A och B mha randvillkoren:

$$\begin{cases} B = 0 \\ A \sin \omega\ell + B \cos \omega\ell = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 0 \\ A \sin \omega\ell = 0 \end{cases}$$

$A \sin \omega l = 0 \Rightarrow A = 0$ eller $\sin \omega l = 0$

Om $A=0$ så får vi den triviala lösningen $y=0$.

Antag nu $A \neq 0$, $\sin \omega l = 0$

$\sin \omega l = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{n\pi}{l}$ med $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\lambda = \omega^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ där $n = 1, 2, \ldots$

Ekvationen har icke-triviala lösningar

$y = A \sin \frac{n\pi x}{l}$ då $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$

8.49 b) $y'' - 3y' + 2y = x^2$

Lös först homogena ekvationen : $y'' - 3y' + 2y = 0$

karakteristiskt polynom : $r^2 - 3r + 2 = 0$

$r = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 2$

$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

Sök nu partikulärlösning : ansätt ett polynom

$y = Ax^2 + Bx + C$

Derivera nu den ansatta lösningen:

$y' = 2Ax + B$

$y'' = 2A$

Alltså gäller sambandet $(2A) - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x$

Identifiera koefficienterna för x^2, x och konstanta terme

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ -6A + 2B = 0 \\ 2A - 3B + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{2} \\ C = \frac{7}{4} \end{cases}$$

Vi får alltså följande partikulärlösning:

$y_p = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$

Den fullständiga lösningen är

$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$

8.51 b) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

Lös först den homogena ekvationen : $y'' - 3y' + 2y = 0$

enligt 8.49 b) : $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$

Sök nu partikulärlösning : ansätt $y_p = z(x)e^{2x}$

Derivera två gånger: $y' = (z' + 2z)e^{2x}$

$$y'' = (z'' + 2z' + 2(z' + 2z))e^{2x}$$

$$= (z'' + 4z' + 4z)e^{2x}$$

Sätt in i ekvationen:

$[(z'' + 4z' + 4z) - 3(z' + 2z) + 2z]e^{2x} = e^{2x}$

$z(x)$ uppfyller $z'' + z' = 1 \rightarrow$ sök partikulärlösning

Ansats: $z = Ax \Rightarrow A = 1$ och $z(x) = x$

Vi får då $y_p = z(x)e^{2x} = xe^{2x}$

Den fullständiga lösningen ges av

$y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + xe^{2x}$ ■

d) $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Lös först den homogena ekvationen : $y'' + 2y' + y = 0$

karakteristiska polynomet: $r^2 + 2r + 1 = 0$

$r = -1 \pm \sqrt{1-1} = 1 \Rightarrow$ dubbelrot $r_{1,2} = -1$

$y_h = (C_1 x + C_2)e^{-x}$

Sök nu partikulärlösning : ansätt $y_p = z(x)e^{-x}$

Derivera två gånger: $y' = (z' - z)e^{-x}$

$$y'' = (z'' - z' - (z' - z))e^{-x}$$

$$= (z'' - 2z' + z)e^{-x}$$

Sätt in i ekvationen:

$[(z'' - 2z' + z) + 2(z' - z) + z]e^{-x} = xe^{-x}$

$z(x)$ uppfyller $z'' = x \rightarrow$ sök partikulärlösning

Integration två gånger ger $z = \frac{1}{6}x^3$

Vi får då $y_p = z(x)e^{-x} = \frac{1}{6}x^3 e^{-x}$

$y = y_h + y_p = (C_2 + C_1 x + \frac{1}{6}x^3)e^{-x}$

$y(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$

$y'(0) = 0 \Rightarrow [C_1 - C_2]e^0 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 1$

Den fullständiga lösningen är

$y = (1 + x + \frac{1}{6}x^3)e^{-x}$

■

8.63 a) $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$

karakteristiska ekvationen : $r^3 + 6r^2 + 11r + 6 = 0$

uppenbar rot $r_1 = -1$, dividera med $r+1$

$$\begin{array}{l|l}
\quad r^2 + 5r + 6 & \\
\hline
r^3 + 6r^2 + 11r + 6 & r+1 \\
\underline{-r^3 - r^2} & \\
\quad 5r^2 + 11r + 6 & \\
\quad \underline{-5r^2 - 5r} & \\
\qquad 6r + 6 & \\
\qquad \underline{-6r - 6} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$\Rightarrow p(r) = (r+1)(r^2 + 5r + 6) = 0$

$r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow r = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{-5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = -2 \\ r_3 = -3 \end{cases}$

samtliga lösningar ges av :

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}$

■

c) $y''' + 9y' = x^2 + 5$

karakteristiska ekvationen : $r^3 + 9r = 0$

$r^3 + 9r = r(r^2 + 9) = r(r - 3i)(r + 3i)$

Den homogena ekvationen löses av :

$y_h = C_1 e^0 + C_2' e^{3ix} + C_3' e^{-3ix}$

$= C_1 + C_2 \sin 3x + C_3 \cos 3x$

Ansätt partikulärlösning : $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

Derivera ansatsen tre gånger: $y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$y_p'' = 6Ax + 2B$

$y_p''' = 6A$

sätt in ansatsen i ekvationen:

$(6A) + 9(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + 5 \rightarrow B = 0$

identifiera x^2-koefficienter och konstanttermer:

$$\begin{cases} 27A = 1 \\ 6A + 9C = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{27} \\ C = \frac{1}{9}(5 - 6 \cdot \frac{1}{27}) = \frac{45}{81} - \frac{2}{81} = \frac{43}{81} \end{cases}$$

En partikulärlösning ges av

$y_p = \frac{1}{27}x^3 + \frac{43}{81}x$

samtliga lösningar ges av

$y = y_h + y_p = C_1 + C_2 \sin 3x + C_3 \cos 3x + \frac{1}{27}x^3 + \frac{43}{81}x$ ■

8.53 $\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = 5e^{-x} + 4x \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Lös först den homogena ekvationen: $y'' - 3y' - 4y = 0$

karakteristiska ekvationen: $r^2 - 3r - 4 = 0$

$r^2 - 3r - 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 4 \end{cases}$

$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$

För partikulärlösning, dela upp ekvationen i två delar:

$$\begin{cases} u'' - 3u' - 4u = 5e^{-x} \\ v'' - 3v' - 4v = 4x \end{cases}$$

Problemets lösning ges då av $y = y_h + u_p + v_p$.

Lös först för u:

Ansätt $u(x) = z(x)e^{-x}$ och använd förskjutningsregeln:

karakteristiska ekvationen: $p(r-1) = 0$

$p(r-1) = ((r-1)+1)((r-1)-4) = r(r-5) = r^2 - 5r$

Den nya ekvationen är då

$[z'' - 5z']e^{-x} = 5e^{-x}$

$z'' - 5z' = 5 \implies z(x) = -x$

$u_p = z(x)e^{-x} = -xe^{-x}$

Lös nu för v: $v'' - 3v' - 4v = 4x$

Ansätt $v = Ax + B$ och derivera: $v' = A$, $v'' = 0$

sätt in i ekvationen och identifiera koefficienterna:

$$-3(A) - 4(Ax+B) = 4x \implies \begin{cases} -3A - 4B = 0 \\ -4A = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -1 \\ B = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$v_p = -x + \frac{3}{4}$

Allmän lösning: $y = y_h + u_p + v_p$

$$= C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} - xe^{-x} - x + \frac{3}{4}$$

Använd begynnelsevillkoren för fullständig lösning:

$y(0) = 1 \implies C_1 + C_2 + \frac{3}{4} = 1$

$C_1 + C_2 = \frac{1}{4}$

derivera y för att använda $y'(0) = -1$

$y' = -C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{4x} - (1-x)e^{-x} - 1$

$y'(0) = -1 \implies -C_1 + 4C_2 - 1 - 1 = -1$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{4} \\ -C_1 + 4C_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Problemets fullständiga lösning ges av

$y = \frac{1}{4}e^{4x} - xe^{-x} - x + \frac{3}{4}$

■

8.56 a) $y'' - 2y' - y = \sin 3x$

Lös först den homogena ekvationen: $y'' - 2y' - y = 0$

karakteristiska ekvationen: $r^2 - 2r - 1 = 0$

$$r^2 - 2r - 1 = 0 \implies r = 1 \pm \sqrt{2} \implies \begin{cases} r_1 = 1 - \sqrt{2} \\ r_2 = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$y_h = C_1 e^{(1-\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1+\sqrt{2})x}$$

För partikulärlösning, betrakta hjälpekvationen

$$y'' - 2y' - y = e^{3ix}$$

ansätt $y(x) = z(x)e^{3ix}$

Enligt förskjutningsregeln fås den karakteristiska ekvationen:

$$p(r+3i) = ((r+3i) - 1 + \sqrt{2})((r+3i) - 1 - \sqrt{2})$$

$$= r^2 + (6i-2)r - (10+6i)$$

Ekvationen vi vill lösa är alltså:

$$[z'' + (6i-2)z' - (10+6i)z]e^{3ix} = e^{3ix}$$

$$z'' + (6i-2)z' - (10+6i)z = 1$$

En partikulärlösning är $z = -\frac{1}{10+6i}$

$$-\frac{1}{10+6i} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5+3i} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{5-3i}{25+9} = \frac{1}{68}(-5+3i)$$

Hjälpekvationen har alltså partikulärlösning:

$$y_{hj} = ze^{3ix} = \frac{1}{68}(-5+3i)(\cos 3x + i\sin 3x)$$

$$= \frac{1}{68}[-5\cos 3x - 3\sin x + i(3\cos 3x - 5\sin 3x)]$$

Dela nu upp höger- och vänsterled i real- och im-del:

$$\mathcal{L}(y) = y'' - 2y' - y$$

$$\mathrm{Re}[\mathcal{L}(y)] = \mathcal{L}[\mathrm{Re}(y)], \quad \mathrm{Im}[\mathcal{L}(y)] = \mathcal{L}[\mathrm{Im}(y)]$$

$\sin 3x = \mathrm{Im}[e^{3ix}] \rightarrow$ vårt egentliga högerled

Den sökta partikulärlösningen är im-delen av hjälpekvationens lösning:

$$y_p = \frac{1}{68}(3\cos 3x - 5\sin 3x)$$

Lösningen till ekvationen ges nu av

$$y = C_1 e^{(1-\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1+\sqrt{2})x} + \frac{1}{68}(3\cos 3x - 5\sin 3x)$$

8.56e) $y'' + 4y = 1 + \cos 2x$

Lös först den homogena ekvationen: $y'' + 4y = 0$

karakteristiska ekvationen: $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$

Homogenlösning: $y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

För partikulärlösning, dela först upp i två delar:

$$\begin{cases} u'' + 4u = 1 \\ v'' + 4v = \cos 2x \end{cases}$$

Lösningen ges då av $y = y_h + u_p + v_p$.

Lös först för u: $u'' + 4u = 1 \Rightarrow u_p = \frac{1}{4}$

Använd hjälpekvationen $v'' + 4v = e^{2ix}$ och förskjutningsregeln för att lösa för v, ansätt $v = ze^{2ix}$.

karakteristiska ekvationen: $p(r+2i) = 0$

$$p(r+2i) = ((r+2i) - 2i)((r+2i) + 2i) = r(r+4i) = r^2 + 4ir$$

Vi vill nu lösa:

$$[z'' + 4iz']e^{2ix} = e^{2ix}$$

$$z'' + 4iz' = 1$$

En partikulärlösning är $z = \frac{1}{4i}x = -\frac{1}{4}ix$

Hjälpekvationen har alltså partikulärlösning:

$$v_{hj} = ze^{2ix} = -\frac{1}{4}ix(\cos 2x + i\sin 2x)$$

$$= \frac{1}{4}x[\sin 2x - i\cos 2x]$$

Vårt egentliga högerled var $\cos 2x = \mathrm{Re}[e^{2ix}]$ och vi får då $v_p = \mathrm{Re}[v_{hj}]$:

$$v_p = \frac{x}{4}\sin 2x$$

Ekvationen har den allmänna lösningen

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} + \frac{x}{4}\sin 2x$$

8.58 a) $y'' - 6y' + 10y = e^{3x}\cos x$

Lös homogena ekvationen : $y'' - 6y' + 10y = 0$

Karakteristiska ekvationen : $r^2 - 6r + 10 = 0$

$$r = 3 \pm i\sqrt{10-9} = \begin{cases} 3+i \\ 3-i \end{cases} \Rightarrow p(r) = (r-(3+i))(r-(3-i))$$

homogenlösning: $y_h = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

För partikulärlösning, betrakta hjälpekvationen

$y'' - 6y' + 10y = e^{(3+i)x}$

och ansätt $y = ze^{(3+i)x}$

Använd förskjutningsregeln :

$p(r + 3+i) = ((r+3+i) - (3+i))(r+3+i-(3-i)) = r(r+2i) = r^2 + 2ir$

Vi får ekvationen

$[z'' + 2iz']e^{(3+i)x} = e^{(3+i)x}$

$z'' + 2iz' = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{2i}x = -\frac{1}{2}ix$

$y = ze^{(3+i)x} = -\frac{1}{2}ix(\cos x + i\sin x)e^{3x} = \frac{1}{2}x(\sin x - i\cos x)e^{3x}$

Realdelen av hjälpekvationens lösning är vår partikulärlösning:

$y_p = \frac{1}{2}xe^{3x}\sin x$

Allmänna lösningen ges av

$y = e^{3x}(C_1\cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}xe^{3x}\sin x$

$\blacksquare$

8.67 $(x-y)y' - y = 0$

Skriv om ekvationen (antag $x \neq y$, $y \neq 0$):

$$y' = \frac{y}{x-y} = \frac{1}{\frac{x}{y}-1} = \frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \Rightarrow y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

variabelsubstitution : $y = xz \Rightarrow y' = xz' + z$

$$xz' + z = \frac{z}{1-z} \Rightarrow \frac{1-z}{z^2}z' = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1-z}{z^2}\,dz = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1-z}{z^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\frac{1}{z} - \ln|z| = \ln|x| + C$$

$$-\frac{1}{z} = \ln|xz| + C$$

Gå tillbaka till y:

$x = -y(\ln|y| + C)$

Betrakta nu fallet $y=0$:

$(x-0)y' = 0 \Rightarrow xy' = 0 \Rightarrow y' = 0$ eller $x = 0$

$y \equiv 0$ är också en lösning ∎

8.71 a) $x^2y'' + 3xy' + 2y = x^3$, $x > 0$

Vi känner igen Eulerekvationen och sätter $x = e^t$

$x = e^t \Rightarrow t = \ln x$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

Skriv om derivatorna med hjälp av kedjeregeln:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x}\,\frac{d}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

Sätt in i ekvationen:

$$x^2\cdot\frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{d^2} - \frac{dy}{dt}\right] + 3x\cdot\frac{1}{x}\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}$$

$$\ddot{y} - \dot{y} + 3\dot{y} + 2y = e^{3t}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = e^{3t}$$

Lös homogena ekvationen: $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0$

Karakteristiska ekvationen: $r^2 + 2r + 2 = 0$

$r = -1 \pm i$

$y_h = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$

Gå tillbaka till x: $y_h = \frac{1}{x}(C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x))$

Sök nu partikulärlösning.

Ansätt $y(t) = z(t)e^{3t}$ och använd förskjutningsregeln:

$P(r+3) = [(r+3)+1-i][(r+3)+1+i] = (r+4)^2 + 1 = r^2 + 8r + 17$

Lös alltså följande ekvation:

$[\ddot{z} + 8\dot{z} + 17z]e^{3t} = e^{3t}$

$\ddot{z} + 8\dot{z} + 17z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{17}$

$y(t) = z(t)e^{3t} = \frac{1}{17}e^{3t}$

$y(x) = \frac{1}{17}x^3$

Ekvationen har den allmänna lösningen:

$y = \frac{1}{x}(C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)) + \frac{1}{17}x^3$ ∎

8.83 Matematisk modell: $y' = 0{,}001y - 500$

Lös ekvationen för att få $y(t)$:

$y' - \frac{1}{1000}y = -500$

integrerande faktor: $e^{-\frac{t}{1000}}$

$[ye^{-\frac{t}{1000}}]' = -500e^{-\frac{t}{1000}}$

$ye^{-\frac{t}{1000}} = -500\int e^{-\frac{t}{1000}}dt = 5 \cdot 10^5 e^{-\frac{t}{1000}} + C$

$y = 5 \cdot 10^5 + Ce^{\frac{t}{1000}}$

Använd begynnelsevillkoret $y(0) = 10^5$ för att bestämma C:

$y(0) = 10^5 \Rightarrow \quad 10^5 = 5 \cdot 10^5 + C$

$C = -4 \cdot 10^5$

$y = (5 - 4e^{\frac{t}{1000}}) \cdot 10^5$

När har befolkningen minskat med 10000?

Sök t_0 sådant att $y(t_0) = 9 \cdot 10^4$:

$$9\cdot 10^4 = (5-4e^{\frac{t}{1000}})\cdot 10^5$$

$$e^{\frac{t}{1000}} = \frac{5-0{,}9}{4} = \frac{41}{40}$$

$$t_0 = 1000 \ln \frac{41}{40}$$

Efter $1000 \ln \frac{41}{40}$ år har befolkningen minskat med 10000.

■

9.2 d) Maclaurinpolynomet av ordning n till $f(x)$:

$$p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Bestäm $p_2(x)$ om $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$p_2(x) = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{-\frac{1}{4}}{2!}x^2 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

■

9.4 Bestäm Taylorpolynomet av ordning 3 till e^x i punkten 1.

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

med $n=3$, $a=1$ och $f(x) = e^x$

$$f(1) = e$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = f^{(3)}(x) = e^x \Rightarrow f''(1) = f^{(3)}(1) = e$$

$$p_3(x) = e + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3$$

$$= e\left(\frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

■

9.10 a) Bestäm $p_3(x)$, Maclaurinutvecklingen till e^x:

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$$

$$p_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

b) Ange $R_4(x)$

$$R_4(x) = \frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

$$f^{(4)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(4)}(\theta x) = e^{\theta x}$$

$$R_4(x) = \frac{e^{\theta x}}{24}x^4 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

c) Uppskatta $|R_4(x)|$ för $|x| \leq 0,1$

$$|R_4(x)| = \left|\frac{1}{24}e^{\theta x}x^4\right| \leq \frac{1}{24}|e^{\theta x}| \cdot |x^4| \leq \frac{1}{24} \cdot e^{1 \cdot 0,1} \cdot 10^{-4} \leq \frac{1}{24}e \cdot 10^{-4}$$

$$\leq \frac{3}{24} \cdot 10^{-4} = 1,25 \cdot 10^{-5}$$

$$e^x = p_3(x) + R_4(x)$$

$|R_4(x)| \leq 1,25 \cdot 10^{-5} \Rightarrow p_3(x)$ approximerar e^x med 4 korrekta decimaler i intervallet

d) $e^{0,1} \simeq 1,105171$
$p_3(0,1) \simeq 1,105167$

$$\left.\begin{matrix} e^{0,1} \simeq 1,105171 \\ p_3(0,1) \simeq 1,105167 \end{matrix}\right\} \quad |e^{0,1} - p_3(0,1)| \leq 5 \cdot 10^{-6}$$

Uppskattningen ger 5 korrekta decimaler.

e) Uppskatta $|R_4(x)|$ på formen $|R_4(x)| \leq Cx^4$ för $|x| \leq 0,1$

$$|R_4(x)| = \frac{1}{24}|e^{\theta x}|x^4 \leq \frac{1}{24}e^{1 \cdot 0,1}x^4 \leq \frac{3}{24}x^4 = \frac{1}{8}x^4$$

f) Visa att $|e^x - p_3(x)| \leq \frac{1}{8}x^4$ om $|x| \leq 0,1$

$|e^x - p_3(x)| = |R_4(x)| \leq \frac{1}{8}x$ för $|x| \leq 0,1$ enligt e)

9.15 Visa att $|e^x + e^{-x} - 2 - x^2| \leq \frac{1}{6}x^4$, $|x| \leq 1$

Maclaurinutveckla e^x och e^{-x} och skriv resttermerna på Lagranges form. Från uppg. 9.10 har vi

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{e^{\theta x}}{24}x^4 \quad , \quad 0 < \theta < 1$$

$x \curvearrowright (-x)$ ger $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{e^{-\theta x}}{24}x^4 \quad , \quad 0 < \theta < 1$

Addition ger:

$$e^{x}+e^{-x}-2-x^{2}=\frac{1}{24}x^{4}(e^{\theta x}+e^{-\theta x})$$

$$|e^{x}+e^{-x}-2-x^{2}|=\frac{1}{24}x^{4}|e^{\theta x}+e^{-\theta x}|$$

för $|x|\leq 1$ och $0<\theta<1$, finn en övre gräns till högerledet

$e^{\theta x}+e^{-\theta x}=2\cosh \theta x$ maximal då $|x|=1$, $\theta=1$

$$|e^{\theta x}+e^{-\theta x}|\leq e^{1\cdot 1}+e^{-1\cdot 1}\leq 3+1=4$$

Vi erhåller den sökta olikheten:

$$|e^{x}+e^{-x}-2-x^{2}|\leq \frac{1}{6}x^{4}$$

■

9.25 Maclaurinutveckla till ordning 4 $\sin x \arctan x$.

Enligt entydighetssatsen för Maclaurinutvecklingar kan vi räkna ut denna hur vi vill. Vi väljer då att utveckla $\sin x$ och $\arctan x$ var för sig och sedan multiplicera.

$f(x)=\sin x$:

$f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=\sin x$

$f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{(4)}(0)=0$

$$f(x)=x-\frac{1}{6}x^{3}+x^{5}B_f(x)$$

$g(x)=\arctan x$:

$g'(x)=\frac{1}{1+x^{2}}$, $g''(x)=-\frac{2x}{(1+x^{2})^{2}}$, $g'''(x)=-\frac{2}{(1+x^{2})^{2}}+\frac{8x^{2}}{(1+x^{2})^{3}}$, $g^{(4)}(x)=\ldots$

$g(0)=0$, $g'(0)=1$, $g''(0)=0$, $g'''(0)=-2$, $g^{(4)}(0)=0$

$$g(x)=x-\frac{1}{3}x^{3}+x^{5}B_g(x)$$

Multiplicera ihop:

$$(x-\frac{1}{6}x^{3}+x^{5}B_f(x))(x-\frac{1}{3}x^{3}+B_g(x)x^{5})=x^{2}-\frac{1}{2}x^{4}+x^{6}B(x)$$

$$\sin x \arctan x = x^{2}-\frac{1}{2}x^{4}+x^{6}B(x)$$

■

1704 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ har gränsvärde a om till varje $\varepsilon > 0$ finns

a) N_ε så att

$$n > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}\right| = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2} \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1} = \frac{1}{n^2}\cdot n = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\uparrow$

ty $(1+\frac{k}{n})^2 \geq 1$ för $k = 1, \ldots, n$

om $\frac{1}{n} < \varepsilon$ så gäller $n > \frac{1}{\varepsilon}$

välj $N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$:

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad n > N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\right| < \varepsilon$$

$$|a_n - 0| < \varepsilon$$

då har $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gränsvärdet 0 ∎

b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergerar mot ∞ om till varje $M > 0$ finns N_M så att

$$n > N_M \Rightarrow a_n > M$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n}}\cdot n = \sqrt{\frac{n}{2}} > M$$

$\uparrow$

ty $\sqrt{1+\frac{k}{n}} \leq \sqrt{1+1}$ för $k = 1, \ldots, n$

om $\sqrt{\frac{n}{2}} > M$ så gäller $n > \frac{M^2}{2}$

välj $N_M = \frac{M^2}{2}$:

$$\forall M > 0 : \quad n > N_M = \frac{M^2}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}} > M$$

$$a_n > M$$

då divergerar $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ mot ∞

∎

1704 c) Använd instängningsregeln för gränsvärden:

Om $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ och $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ har samma gränsvärde A och

$b_n \leq a_n \leq c_n \quad (\forall n)$

så har även $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gränsvärdet A.

Majorera a_n:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} \underset{\uparrow}{\leq} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 = c_n$$

ty $\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} \geq \sqrt{1}$ för $k=1,\dots,n$

Minorera a_n:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} \underset{\uparrow}{\geq} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = b_n$$

ty $\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}}$ för $k=1,\dots,n$

$\forall n: \quad b_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq a_n \leq 1 = c_n$

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ och $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ har gränsvärdet 1

då har $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gränsvärdet 1 $\blacksquare$

1707 c) $y_{n+1} - 2y_n = n$

För homogenlösning, använd karakteristiska ekvationen:

$r - 2 = 0 \Rightarrow r = 2$

$y_h = C \cdot 2^n$

För partikulärlösning, ansätt ett polynom i n:

$y_p = an + b$

sätt in i ekvationen: $a(n+1) + b - 2[an+b] = n$

identifiera koefficienter: $\begin{cases} a - 2a = 1 \\ a + b - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

$y = y_h + y_p = C \cdot 2^n - n - 1$

använd begynnelsevillkoret:

$y_0 = 0 \Rightarrow C \cdot 2^0 - 0 - 1 = 0$

$C = 1$

Fullständig lösning ges av

$y_n = 2^n - n - 1$ ■

1709 b) $y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 0$

karakteristiska ekvationen: $r^2 - 7r + 10 = 0$

$$r = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{40}{4}} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

rötter: $r_1 = 2$, $r_2 = 5$

$y = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 5^n$

d) $9y_{n+2} + 6y_{n+1} + y_n = 0$

karakteristiska ekvationen: $9r^2 + 6r + 1 = 0$

$$r = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{9}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow r_{1,2} = -\frac{1}{3}$$

$y = (C_1 + C_2 n)(-\frac{1}{3})^n$

f) $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 8y_n = 0$

karakteristiska ekvationen: $r^2 + 4r + 8 = 0$

$r = -2 \pm i\sqrt{8-4} = -2 \pm 2i$

skriv rötterna på polär form:

$$\left.\begin{array}{l} |r| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}} \\ \arg r = \pm \frac{3\pi}{4} \end{array}\right\} r_{1,2} = 2^{\frac{3}{2}} e^{\pm i \frac{3\pi}{4}}$$

$$y = 2^{\frac{3n}{2}} \left(C_1 \cos \frac{3n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{3n\pi}{4}\right)$$ ■

1713 p_n : sannolikhet att A har n kr och förlorar allt

$p_1 = P(\text{A har 1 kr och förlorar den})$

$= P(\text{A vinner 1 kr och förlorar sedan 2 kr}) + P(\text{A förlorar 1 k}$

oberoende händelser : $P(A \& B) = P(A) \cdot P(B)$

$p_1 = P(A \text{ vinner}) \cdot P(A \text{ har } 2 \text{ kr och förlorar dem}) + P(A \text{ förlorar})$

$= p \cdot p_2 + q$

Likadant för start med n kr:

$p_n = P(A$ vinner 1 kr och förlorar sedan $n+1$ kr$)$

$+ P(A$ förlorar 1 kr och förlorar sedan $n-1$ kr till$)$

oberoende händelser:

$p_n = P(A \text{ vinner}) \cdot P(A \text{ har } n+1 \text{ kr och förlorar dem})$

$+ P(A \text{ förlorar}) \cdot P(A \text{ har } n-1 \text{ kr och förlorar dem})$

$= p \cdot p_{n+1} + q \cdot p_{n-1}$

$p_0 = 1$, ty A är redan ruinerad

$p_a = 0$, ty B är ruinerad och spelet tar då slut

Lös nu $p_n = p\,p_{n+1} + q\,p_{n-1}$ för $1 \le n \le a-1$:

karakteristisk ekvation: $pr^2 - r + q = 0$

$$r = \frac{1}{2p} \pm \sqrt{\frac{1}{4p^2} - \frac{4pq}{4p^2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p} = \begin{cases} 1 \\ \frac{q}{p} \end{cases}$$

om $p = q = \frac{1}{2}$ får vi en dubbelrot $r_{1,2} = 1$:

$p_n = (C_1 + C_2 n) \cdot 1^n$

$p_0 = 1 \Rightarrow \quad C_1 = 1$

$p_a = 0 \Rightarrow \quad C_1 + C_2 a = 0$

$C_2 = -\frac{1}{a}$

Lösningen, då $p = q = \frac{1}{2}$, blir $\quad p_n = 1 - \frac{n}{a}$

Antag nu $p \neq q$:

$p_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^n$

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = 1 \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1 \\ p_a = 0 \Rightarrow \quad C_1 + C_2\left(\frac{q}{p}\right)^a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}$$

$$C_1 = \frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}$$

Lösningen för $p \neq q$ ges av:

$$p_n = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}$$

$\blacksquare$

1715 c) $y_{n+2} - 3y_{n+1} - 10y_n = 36n - 21$

Lös först homogena ekvationen : $y_{n+2} - 3y_{n+1} - 10y_n = 0$

karakteristiska ekvationen : $r^2 - 3r - 10 = 0$

rötter : $r_1 = -2$, $r_2 = 5$

homgenlösning : $y_n^{(h)} = C_1(-2)^n + C_2 \cdot 5^n$

För partikulärlösning, ansätt $y_P^{(p)} = an + b$

sätt in i ekvationen:

$$a(n+2) + b - 3[a(n+1)+b] - 10[an+b] = 36n - 21$$

$$-12an - a - 12b = 36n - 21$$

identifiera koefficienter framför n och konstanttermer:

$$\begin{cases} -12a = 36 \\ -a - 12b = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow y_n^{(p)} = -3n + 2$$

Lösningen ges av

$$y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = C_1(-2)^n + C_2 \cdot 5^n - 3n + 2$$

$\blacksquare$

h) redan löst i 1707 c) : $y_n = 2^n - n - 1$

1716 b) $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = n \cdot 2^n$

Lös först homogena ekvationen : $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0$

karakteristiska ekvationen : $r^2 - r - 2 = 0$

rötter : $r_1 = 2$, $r_2 = -1$

homogenlösning : $y_n^{(h)} = C_1 \cdot 2^n + C_2(-1)^n$

För partikulärlösning, ansätt $y_n^{(p)} = n(an+b) \cdot 2^n$

eftersom 2 är en rot till kar. ekv.

sätt in i ekvationen:

$$(n+2)[a(n+2)+b]\cdot 2^{n+2}-(n+1)[a(n+1)+b]\cdot 2^{n+1}-2n(an+b)\cdot 2^n = n\cdot 2^n$$

$$2^n\{4(an^2+4an+4a+bn+2b)-2(an^2+2an+a+bn+b)-2(an^2+nb)\}=n$$

$$n^2[4a-2a-2a]+n[16a+4b-4a-2b-2b]+[16a-8b-2a-2b]=n$$

identifiera koefficienterna:

$$\begin{cases}12a=1\\14a+6b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{12}\\b=-\frac{7}{36}\end{cases} \Rightarrow y_n^{(p)}=n\left(\tfrac{1}{12}n-\tfrac{7}{36}\right)\cdot 2^n$$

Lösningen ges av

$$y_n=\left(\tfrac{1}{12}n^2-\tfrac{7}{36}n+C_1\right)\cdot 2^n + C_2(-1)^n$$

■

1717c) $y_{n+2}-4y_n=-6n^2+8n+17+2^{n+1}$

Lös först homogena ekvationen: $y_{n+2}-4y_n=0$

karakteristiska ekvationen: $r^2-4=0$

rötter: $r_1=-2,\ r_2=2 \Rightarrow y_n^{(h)}=C_1\cdot(-2)^n+C_2\cdot 2^n$

För partikulärlösning, dela upp högerledet i två delar:

$$y_n^{(p)}=z_n^{(p)}+w_n^{(p)} \quad \text{där } z_n^{(p)},\ w_n^{(p)} \text{ löser } \begin{cases}z_{n+2}-4z_n=-6n^2+8n+17\\w_{n+2}-4w_n=2^{n+1}\end{cases}$$

sök först partikulärlösning $z_n^{(p)}$: ansätt $z_n^{(p)}=an^2+bn+c$

sätt in i ekvationen:

$$[a(n+2)^2+b(n+2)+c]-4[an^2+bn+c]=-6n^2+8n+17$$

$$n^2[a-4a]+n[4a+b-4b]+[4a+2b+c-4c]=-6n^2+8n+17$$

identifiera koefficienter:

$$\begin{cases}-3a=-6\\4a-3b=8\\4a+2b-3c=17\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=2\\b=0\\c=-3\end{cases} \Rightarrow z_n^{(p)}=2n^2-3$$

för partikulärlösning $w_n^{(p)}$: ansätt $w_n^{(p)}=d\cdot n\cdot 2^n$

$\uparrow$ ty 2 är rot till kar. ekv.

sätt in i ekvationen:

$$[d(n+2)\cdot 2^{n+2}] - 4[dn\,2^n] = 2\cdot 2^n$$

$$n[4d-4d] + 8d = 2$$

identifiera koefficienter: $8d = 2 \Rightarrow d = \frac{1}{4}$

$$w_n^{(p)} = \frac{1}{4} n\, 2^n$$

Ekvationens lösning ges nu av

$$y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = y_n^{(h)} + z_n^{(p)} + w_n^{(p)}$$

$$= C_1(-2)^n + C_2\cdot 2^n + 2n^2 - 3 + \frac{1}{4} n\cdot 2^n$$

$$= C_1(-2)^n + [\tfrac{1}{4}n + C_2]\cdot 2^n + 2n^2 - 3$$

■

1803 a) Antag $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Visa att $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_1$

Skriv den n:te delsumman $S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=2}^{n+1} a_k =$$

$$= a_1 + \sum_{k=2}^{n}(a_k - a_k) + a_n = a_1 + a_n \to a_1 \text{ då } n\to\infty$$

Serien $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1})$ är konvergent ty $\lim_{n\to\infty} S_n = a_1$.

Seriens summa är a_1. ■

b)

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{4k-2} \\ a_{k+1} &= \frac{1}{4(k+1)-2} = \frac{1}{4k+2} \end{aligned}\right\} \quad a_k - a_{k+1} = \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2} = \frac{4k+2-4k+2}{(4k)^2-4} = \frac{1}{4k^2-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_1 = \frac{1}{4\cdot 1-2} = \frac{1}{2}$$ ■

c) $a_k = \frac{k+1}{2^{k-1}}$, $a_{k+1} = \frac{k+2}{2^k} \Rightarrow a_k - a_{k+1} = \frac{2(k+1)-(k+2)}{2^k} = \frac{k}{2^k}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k} = a_1 = \frac{1+1}{2^{1-1}} = 2$$

■

d) $\left.\begin{array}{l} a_k = \frac{1}{k!} \\ a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \end{array}\right\} \quad a_k - a_{k+1} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = a_1 = \frac{1}{1!} = 1$$

1816 a) $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ med $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$, $a_1 = \sqrt{2}$

Visa med induktion att $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är begränsad och monoton:

$n=2$: $\quad a_1 = \sqrt{2} \leq 2 \Rightarrow a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \leq \sqrt{4} = 2$

$a_2 - a_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2} \geq 0$

antag sant för n: $\quad a_n \leq 2, \quad a_n - a_{n-1} \geq 0$

$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leq \sqrt{2+2} = 2$

$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2+a_n} - a_n \geq 0$ (likhet då $a_n = 2$)

Påståendet gäller för $n+1$, alltså för $n = 1, 2, \ldots$

En monoton talföljd är konvergent om den är begränsad, alltså är $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent och $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existerar.

Då gäller $a_{n-1} \to a$, $a_n \to a$:

$a = \sqrt{2+a}$, $a > 0$

$a^2 - a - 2 = 0$, $a > 0$

$a = \frac{1}{2} (\pm) \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1+3}{2} = 2$

1820 c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}$

Skriv om med hjälp av Stirlings formel:

$$\sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \left\{ \left[\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1+\varepsilon_n) \right]^2 \Big/ \left[\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}\,(1+\varepsilon_{2n}) \right] \right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left\{ \frac{\sqrt{n}}{4^n} \cdot \sqrt{\pi} \frac{(1+\varepsilon_n)^2}{1+\varepsilon_{2n}} \right\}^{\frac{1}{n}} = \underbrace{n^{\frac{1}{2n}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{4^{\frac{n}{n}}}}_{\to \frac{1}{4}} \cdot \underbrace{\left\{ \sqrt{\pi} \frac{(1+\varepsilon_n)^2}{1+\varepsilon_{2n}} \right\}^{\frac{1}{n}}}_{\to 1} \to \frac{1}{4}$$

då $n \to \infty$

1822 Visa att $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$ konvergerar för $p>1$, men divergerar för $0<p\leq 1$.

Använd integralkriteriet:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p} \text{ konvergent} \iff \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx \text{ konvergent}$$

byt variabel i integralen:

$$x = e^t, \quad t = \ln x \;; \quad dx = e^t\,dt$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{e^t (t)^p} e^t\,dt = \int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{t^p}\,dt$$

integralen är då konvergent för $p>1$, divergent för $0<p\leq 1$.

■

1827 c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + k^2}{4^k + 1}$

De dominerande termerna är 3^k och 4^k (stora jämfört med k^2 och 1 då k är stort), jämför därför a_k med $b_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k$ och använd jämförelsekriteriet på gränsvärdesform:

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{3^k + k^2}{4^k + 1} \cdot \frac{4^k}{3^k} = \frac{1 + \frac{k^2}{3^k}}{1 + \frac{1}{4^k}} = \frac{1 + e^{2\ln k - k\ln 3}}{1 + \frac{1}{4^k}} \to 1 \text{ då } k \to \infty$$

Satsen säger att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ nu antingen är båda konvergenta eller båda divergenta. Undersök $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$:

$$\sqrt[k]{b_k} = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^k\right]^{\frac{1}{k}} = \frac{3}{4} < 1 \quad \forall k$$

Enligt rotkriteriet är $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent: Vår serie är alltså också konvergent.

■

1828 b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k\sqrt{k}}$

Vi vet att $\ln k$ växer långsammare än k^p i oändligheten, använd detta för att bestämma en majorant till a_k.

$$\frac{\ln k}{k\sqrt{k}} \leq \frac{k^p}{k\sqrt{k}} \quad \text{för } k>m$$

välj $p=\frac{2}{5}$ (vilket ger $m=0$):

$$\frac{\ln k}{k\sqrt{k}} \leq \frac{1}{k^{3/2-2/5}} = \frac{1}{k^{11/10}} = b_k$$

Vi vet att $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent (ty $\frac{11}{10}>1$), dessutom gäller $a_k \leq b_k \ \forall k$:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent. ☒

1828 d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(3k)!}$

Använd Stirlings formel och sedan rotkriteriet:

$$\frac{(2k)!}{(3k)!} = \frac{\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}\sqrt{2\pi 2k}\,(1+\varepsilon_{2k})}{\left(\frac{3k}{e}\right)^{3k}\sqrt{2\pi 3k}\,(1+\varepsilon_{3k})} = \left(\frac{4}{27}\right)^k \left(\frac{e}{k}\right)^k \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1+\varepsilon_{2k}}{1+\varepsilon_{3k}}$$

$$\sqrt[k]{\frac{(2k)!}{(3k)!}} = \frac{4e}{27}\cdot\frac{1}{k}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1+\varepsilon_{2k}}{1+\varepsilon_{3k}}\right)^{\frac{1}{k}} \longrightarrow 0 \text{ då } k\to\infty$$

Vi har att $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 0 < 1$ och $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent. ☒

1829 a) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k+\frac{1}{k}}-\sqrt{k}\right)$

Använd Maclaurinutveckling för att hitta en serie att jämföra med: $\sqrt{1+x^2} = 1+\frac{x}{2}+\mathcal{O}(x^2)$

$$a_k = \sqrt{k}\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{k^2}}-1\right) = \sqrt{k}\left(1+\tfrac{1}{2k^2}+\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{k^4}\right)-1\right) = \frac{1}{2k^{3/2}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{7/2}}\right)$$

Tag $b_k = \frac{1}{k^{3/2}}$:

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{1}{2k^{3/2}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{7/2}}\right)}{\frac{1}{k^{3/2}}} = \frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \to \frac{1}{2} \text{ då } k\to\infty$$

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent (ty $\frac{3}{2}>1$), alltså är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ också konvergent enligt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform.

☒

1829c) $\sum_{k=1}^{\infty} \arctan k^{-1}$

Använd Maclaurinutvecklingen för arctan:

$\arctan \frac{1}{k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{3k^3} + \ldots = \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)$

Tag $b_k = \frac{1}{k}$:

$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)}{\frac{1}{k}} = 1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \to 1$ då $k \to \infty$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent och enligt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform är då även $\sum_{k=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{k}$ divergent. ∎

1830a) $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)$

Skriv om $\sqrt[k]{k}$ och Maclaurinutveckla:

$\sqrt[k]{k} = k^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k} \ln k}$ Vi kan Maclaurinutv. ty $\frac{\ln k}{k} \to 0$ då $k \to \infty$

$e^x = 1 + x + O(x^2)$

$e^{\frac{1}{k} \ln k} = 1 + \frac{\ln k}{k} + O\left(\frac{(\ln k)^2}{k^2}\right)$ och $\sqrt[k]{k} - 1 = \frac{\ln k}{k} + O\left(\frac{(\ln k)^2}{k^2}\right)$

Tag $b_k = \frac{\ln k}{k}$:

$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{\ln k}{k} + O\left(\left(\frac{\ln k}{k}\right)^2\right)}{\frac{\ln k}{k}} = 1 + O\left(\left(\frac{\ln k}{k}\right)^2\right) \to 1$ då $k \to \infty$

Är då $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent eller divergent?

$\frac{\ln k}{k} > \frac{1}{k}$ för $k > 2$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent, alltså är $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent.

Enligt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform är då även $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent. ∎

1830c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$

Tag $b_k = \frac{1}{k}$:

$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}}{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{k} \ln k}} \to 1$ då $k \to \infty$

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är divergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är också divergent. ∎

1835 a) $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^{4/3}}}_{a_k}$

Betrakta $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k \ln k}{k^{4/3}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{4/3}}$$

Vi vet att $\ln k$ växer långsammare än k^p i oändligheten, använd detta för att bestämma en majoration till serien:

$$\frac{\ln k}{k^{4/3}} \leq \frac{k^p}{k^{4/3}} = \frac{1}{k^{4/3-p}} \quad \text{för } k > m$$

välj p så att $\frac{4}{3} - p > 1$: $p < \frac{1}{3}$, tag $p = \frac{1}{4}$

$$\frac{\ln k}{k^{4/3}} \leq \frac{k^{\frac{1}{4}}}{k^{4/3}} = \frac{1}{k^{13/12}} = b_k \quad \text{för } k > m \quad (m \sim 5500)$$

Vi vet att $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent (ty $13/12 > 1$), dessutom gäller att $|a_k| \leq b_k$ för $k > m$ (ändligt många termer a_k med $k \leq m$ kan inte ändra serien från konvergent till divergent):

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är konvergent

Enligt satsen om absolut konvergens är nu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (absolut) konvergent. ∎

1836 a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$

$\{\ln k\}_{k=1}^{\infty}$ är en växande följd av positiva tal ($k > 1$) som går mot ∞ då $k \to \infty$.

Då är $\left\{\frac{1}{\ln k}\right\}_{k=2}^{\infty}$ en avtagande följd av positiva tal med gränsvärdet 0.

Enligt Leibniz konvergenskriterium är $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln k}$ konv. ∎

1836 e) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k^2+1}{k}\pi$

Använd trigonometri för att skriva om $\sin \frac{k^2+1}{k}\pi$:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{k}\right) = \underbrace{\sin k\pi}_{=0} \cos\frac{\pi}{k} + \underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k} \sin\frac{\pi}{k}$$

$$= (-1)^k \sin\frac{\pi}{k}$$

$0 \leq \frac{\pi}{k} \leq \frac{\pi}{2}$ för $k > 1$ och $\sin\frac{\pi}{k} > 0$ och avtagande

$\lim_{k\to\infty} \sin\frac{\pi}{k} = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k^2+1}{k}\pi = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\frac{\pi}{k}$$

$\left\{\sin\frac{\pi}{k}\right\}_{k=2}^{\infty}$ är en avtagande följd av positiva tal med gränsvärdet 0.

Då är vår serie konvergent enligt Leibniz konvergenskriterium.

$\boxtimes$

1837 b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

Betrakta funktionen $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\cdot \ln x = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0$$

$$x = e$$

Vi vet att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f(e) = \frac{1}{e}$, då är $f(x)$ strängt avtagande för $x > e$, dessutom är $f(x) > 0$.

$\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}_{n=3}^{\infty}$ är analogt en avtagande följd av positiva tal med gränsvärdet 0.

Enligt Leibniz konvergenskriterium är vår serie konvergent.

$\boxtimes$

1837 c) $\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n n}}_{a_n}$

För att bli av med $(-1)^n$, betrakta udda resp. jämna n var för sig:

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n}+2n}$$

$$a_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}-(2n+1)}$$

Notera att $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n}+a_{2n+1})$, sätt $c_n = a_{2n}+a_{2n+1}$.

Vi ser att $a_{2n}>0$, $a_{2n+1}<0$ och anar att $a_{2n+1}>a_{2n}$.

Visa att $c_n<0$:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2n}+2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}-(2n+1)} = \frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}-1}{(\sqrt{2n}+2n)(\sqrt{2n+1}-(2n+1))}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i nämnaren:} & \sqrt{2n+1}-(2n+1) < 0, \ \forall n>0 \\ \text{i täljaren:} & \sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}-1 > 0, \ \forall n>0 \end{array}\right\} c_n<0, \ \forall n>0$$

Undersök nu konvergens hos serien $\sum_{n=1}^{\infty}(-c_n) = -\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Utveckla $-c_n$:

$$-c_n = \frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}-1}{4n^2+2n+(2n+1)\sqrt{2n}-2n\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}\sqrt{2n+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{2n}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right)-1}{4n^2+(2n)^{3/2}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right)+2n\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right)}$$

högsta potenser i täljare resp. nämnare : $\sqrt{n}$ och n^2

tag $b_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$:

$$\frac{-c_n}{b_n} = \frac{n^2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right)-n^{3/2}}{4n^2+(2n)^{3/2}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right)+2n\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right)-n^{-1/2}}{4+n^{-1/2}2^{3/2}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right)+2n^{-1}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right)} \to \frac{\sqrt{2}\cdot 2}{4} \text{ då } n\to\infty$$

Nu ger jämförelsekriteriet på gränsvärdesform att $\sum_{n=1}^{\infty}(-c_n)$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ antingen båda är konvergenta

Vi vet att $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent, alltså är även
$\sum_{n=1}^{\infty}(-c_n) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n = -\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergent.

■

1902 c) Bestäm de reella x för vilka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ är konvergent:

$a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$

$\sqrt[k]{a_k} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2\cdot\frac{1}{k}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} = e^{k\ln(1+\frac{1}{k})} = e^{k[\frac{1}{k}+O(\frac{1}{k^2})]} = e^{1+O(k^{-1})}$

$\sqrt[k]{a_k} \to e$ då $k\to\infty \Rightarrow R = \frac{1}{e}$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ konvergent för $|x| < 1/e$, kolla konvergens då $x = \pm\frac{1}{e}$:

$x = \frac{1}{e} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{e^{-k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}}_{b_k}$

$b_k = e^{-k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} = e^{-k} e^{k^2\ln(1+\frac{1}{k})} = e^{-k+k^2(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+O(k^{-3}))} = e^{-\frac{1}{2}+O(k^{-1})}$
$\to e^{-1/2}$ då $k\to\infty$

$b_k \to 0$ är ett nödvändigt villkor för seriens $(\sum_{k=1}^{\infty} b_k)$ konvergens
$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ inte konvergent för $x = \frac{1}{e}$

$x = -\frac{1}{e} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(-e)^k\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k \to$ divergent enl. ovan

Alltså:
$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k$ konvergent för $|x| < \frac{1}{e}$.

■

1902 f) $a_k = \frac{k^k}{k!}$

Stirlings formel:

$a_k = \frac{k^k}{(\frac{k}{e})^k\sqrt{2\pi k}(1+\varepsilon_k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+\varepsilon_k)}\cdot\frac{e^k}{\sqrt{k}}$

$\sqrt[k]{a_k} = \frac{e}{k^{\frac{1}{2k}}} \to e$ då $k\to\infty \Rightarrow R = \frac{1}{e}$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ konvergent då $|x| < \frac{1}{e}$, kolla $x = \pm\frac{1}{e}$:

$x = \frac{1}{e}$: $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k^k}{k!} \frac{1}{e^k}}_{b_k}$

$b_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{e}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+\varepsilon_k)} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$ jämför med $c_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$

$\frac{b_k}{c_k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+\varepsilon_k)} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > 0$ då $k \to \infty$

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ är divergent $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är också divergent

$x = -\frac{1}{e}$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} \frac{1}{(-e)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$

$\left\{\frac{1}{\sqrt{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ är en avtagande följd av positiva tal med gv 0

$\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ konvergent

Alltså :

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} x^k$ konvergent för $-\frac{1}{e} \le x < \frac{1}{e}$.

∎

1902 o) $a_k = \sqrt{\frac{2k+1}{k^2+1}}$

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \sqrt{\frac{2(k+1)+1}{(k+1)^2+1} \cdot \frac{k^2+1}{2k+1}} = \sqrt{\frac{2k^3+3k^2+2k+3}{2k^3+4k^2+6k+2}} = \sqrt{\frac{2+3k^{-1}+2k^{-2}+3k^{-3}}{2+4k^{-1}+6k^{-2}+2k^{-3}}} \to 1$

$\Rightarrow R = 1$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ konvergent för $|x| < 1$, kolla $x = \pm 1$:

$x = 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2k+1}{k^2+1}}$ jämför med $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$

$\frac{a_k}{b_k} = \sqrt{k}\sqrt{\frac{2k+1}{k^2+1}} = \sqrt{\frac{2k^2+k}{k^2+1}} = \sqrt{\frac{2+k^{-1}}{1+k^{-2}}} \to \sqrt{2} > 0$

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är divergent $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är också divergent

$x = -1$: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sqrt{\frac{2k+1}{k^2+1}}$

$\left\{\sqrt{\frac{2k+1}{k^2+1}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ är en avtagande följd av positiva tal med gv 0

$\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ är konvergent

Alltså : $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2k+1}{k^2+1}} x^k$ konvergent för $-1 \le x < 1$.

∎

1902 r) $a_{2p-1} = 3^p$, $a_{2p} = (-4)^p$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p-1} x^{2p-1} + \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p} x^{2p}$$

Vänsterledet konvergent när båda serierna i högerledet konvergerar: Hitta det gemensamma området.

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{2p-1} x^{2p-1} = \sum_{p=1}^{\infty} 3^p x^{2p-1} = 3x \sum_{p=0}^{\infty} 3^p x^{2p} = 3\sqrt{t} \sum_{p=0}^{\infty} 3^p t^p \quad \text{där } t = x^2$$

$$\sqrt[p]{3^p} = 3 \Rightarrow R = \frac{1}{3}$$

$\sum_{p=0}^{\infty} 3^p t^p$ konvergent för $|t| < \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p-1} x^{2p-1}$ konvergent för $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{2p} x^{2p} = \sum_{p=1}^{\infty} (-4)^p x^{2p} = \sum_{p=1}^{\infty} (-4)^p t^p \quad \text{där } t = x^2$$

$$\sqrt[p]{|(-4)^p|} = 4 \Rightarrow R = \frac{1}{4}$$

$\sum_{p=1}^{\infty} (-4)^p t^p$ konvergent för $|t| < \frac{1}{4} \Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} (-4)^p x^{2p}$ för $|x| < \frac{1}{2}$

serien är alltså konvergent för $|x| < \frac{1}{2}$, kolla $x = \pm\frac{1}{2}$:

$x = -\frac{1}{2}$: $\sum_{p=1}^{\infty} (-4)^p \left(-\frac{1}{2}\right)^{2p} = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \rightarrow$ divergent!

$x = \frac{1}{2}$: $\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \rightarrow$ divergent!

Alltså: serien konvergerar för $|x| < \frac{1}{2}$.

1903 c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^{3k}$ tag $x^3 = t$: $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^k}{k}}_{a_k} t^k$

$\sqrt[k]{a_k} = \frac{2}{k^{1/k}} \rightarrow 2$ då $k \rightarrow \infty \Rightarrow R = \frac{1}{2}$ konv. då $|t| < \frac{1}{2}$

$|x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$t = \frac{1}{2}$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent

$t = -\frac{1}{2}$: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \rightarrow \left\{\frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ pos. avt. m. gv 0 $\Rightarrow$ konvergent

38 Alltså är $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^{3k}$ konvergent för $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \leq x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

1904 b) $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(n!)^3}{(3n)!}}_{a_n} x^n$

$$a_n = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{3n} \left(\sqrt{2\pi n}\right)^3 (1+\varepsilon_n)^3}{\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n} \sqrt{2\pi 3n}\,(1+\varepsilon_{3n})} = \frac{n}{27^n} \cdot \frac{2\pi(1+\varepsilon_n)^3}{1+\varepsilon_{3n}}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{27}\left(\frac{2\pi(1+\varepsilon_n)^3}{1+\varepsilon_{3n}}\right)^{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{27} \implies R = 27$$

$\blacksquare$

1906 c) $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 = \frac{1+x^2-2x}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2-4x}{(1+x)^2} = 1 - \frac{4x}{(1+x)^2}$$

Men vi vet att:

$$1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$$

Derivera termvis:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k, \quad |x|<1$$

Sätt in $(-x)$:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) x^k$$

Skriv nu potensserien till $f(x)$:

$$f(x) = 1 - 4x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) x^k$$

$$= 1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k x^k, \quad |x|<1$$

$\blacksquare$

1906 e) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$

Partialbråksuppdela:

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)x^k, \quad |x|<1$$

$\blacksquare$

1908 b) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$

Derivera termvis:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\quad , \quad f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(-1)^{n-1}(x^2)^{n-1}}_{a_n}$$

$\sqrt[n]{|a_n|}=:1 \Rightarrow R=1$: serierna konvergenta då $|x|<1$

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x)=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x$$

$$f(x)=\int\arctan x\,dx=x\arctan x-\int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\quad \text{för } |x|<1$$

1909 d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{n!}$ för $p=1,2,3$

Använd $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ och sätt $x=1$. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$

$p=1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$$

$p=2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=2e$$

$p=3$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{n-1+1}{(n-1)!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n-2)!}+\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}}^{2e}$$

$$=2e+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n!}=2e+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}}_{e}+2\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}}_{2\cdot e}=5e$$

1909 f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+2)3^{n+2}}$ Tag $x=\frac{1}{3}$: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+2}}{n(n+2)}=f(x)$

Derivera termvis:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n}=x\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}}_{\ln(1+x)\text{ för }|x|<1\text{, alltså för }x=\frac{1}{3}}=x\ln(1+x)$$

$$f(x)=\int x\ln(1+x)\,dx\overset{\text{PI}}{=}\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{1+x}\,dx$$

$$\int x^2\cdot\frac{1}{1+x}\,dx=\int x\left(\frac{1+x-1}{1+x}\right)dx=\int\left(x-\frac{x}{1+x}\right)dx=\int\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1+x)+\frac{1}{2}x\left(-\frac{1}{2}x+1\right)$$

Sätt in $x=\frac{1}{3}$:

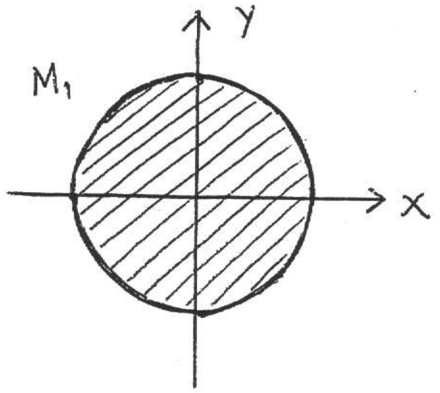
$$f\left(\tfrac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-1\right)\ln\frac{4}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{6}+1\right)$$

$$=\frac{5}{36}-\frac{4}{9}\ln\frac{4}{3}$$

PB2: 1.6 Rita följande mängder i $\mathbb{R}^2$:

- $M_1 = \{(x,y)\ ;\ x^2+y^2 \leq 1\}$

  $= \{$ alla punkter på eller innanför enhetscirkeln $\}$



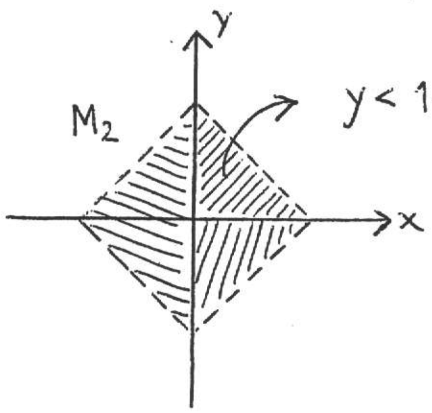
sluten (randen ingår)
begränsad
$\rightarrow$ kompakt

- $M_2 = \{(x,y)\ ;\ |x|+|y| < 1\}$

  Rita den del av M_2 som ligger i första kvadranten ($x \geq 0$, $y \geq 0$) och spegla sedan i x- och y-axeln.

  $x \geq 0,\ y \geq 0, \qquad |x|+|y| = x+y < 1$

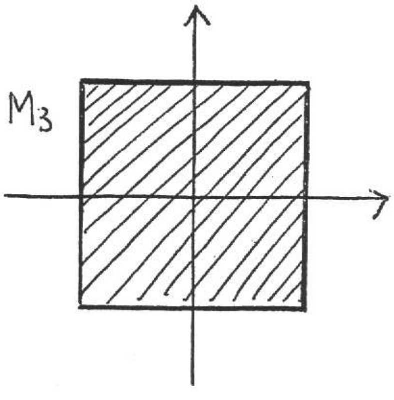
  $y < 1-x$



$y < 1-x$ och $x \geq 0,\ y \geq 0$

öppen (randen ingår ej
begränsad

- $M_3 = \{(x,y)\ ;\ \max(|x|,|y|) \leq 1\}$

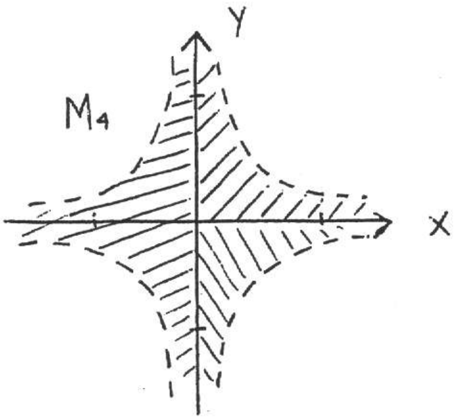


sluten
begränsad
$\rightarrow$ kompakt

• $M_4 = \{(x,y) ;\ |xy| < \frac{1}{4}\}$

$x \geq 0,\ y \geq 0, \quad |xy| = xy < \frac{1}{4}$

$$y < \frac{1}{4x}$$



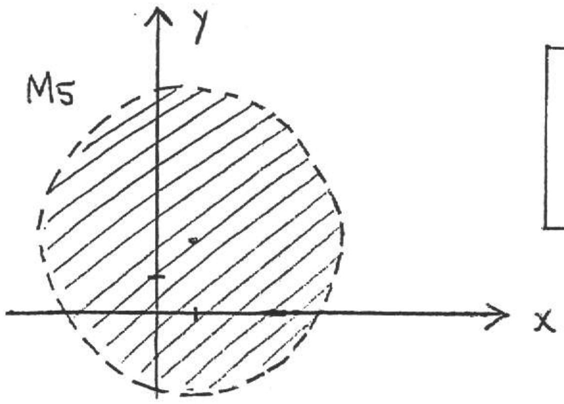
öppen
"obegränsad"

• $M_5 = \{(x,y) ;\ x^2 + y^2 - 2x - 4y < 11\}$

Kvadratkomplettera : $x^2 - 2x + \quad - \quad + y^2 - 4y + 4 - 4 < 11$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 < 11 + 1 + 4 = 16$$

M_5 är mängden av alla punkter som ligger i cirkeln som har radien 4 och centrum i $(1,2)$.

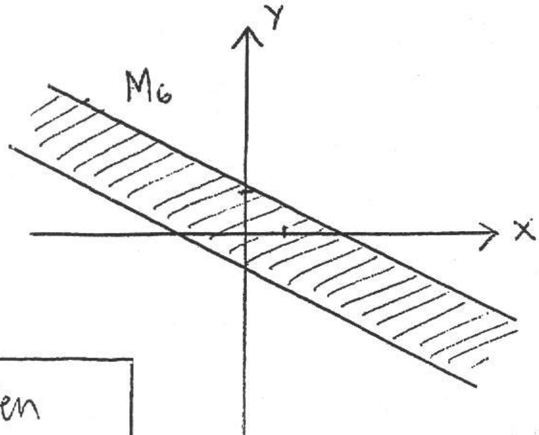


öppen
begränsad

• $M_6 = \{(x,y) ;\ |x + 2y| \leq 2\}$

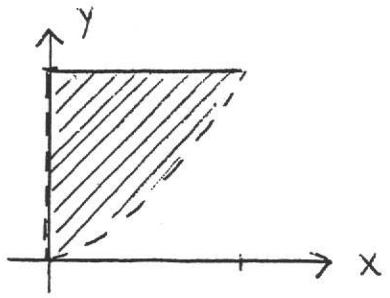
$-2 \leq x + 2y \leq 2$

$-2 \leq x + 2y \leq 2 \iff \begin{cases} y \geq -1 - \frac{x}{2} \\ y \leq 1 - \frac{x}{2} \end{cases}$



sluten
"obegränsad"

• $M_7 = \{(x,y);\ y > x^2,\ 0 < x < 1,\ y \leq 1\}$



varken öppen eller sluten
(del av randen ingår)
begränsad

• $M_8 = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leq 2 \leq -4-4x-4y-x^2-y^2\}$

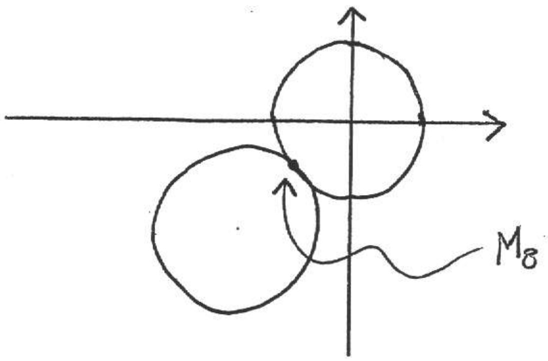
$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 2 & (1) \\ 2 \leq -4-4x-4y-x^2-y^2 & \end{cases}$$ → kvadratkomplettera

$$x^2+y^2+4x+4y+4 \leq -2$$

$$(x^2+4x+4)+(y^2+4y+4)-4 \leq -2$$

$$(x+2)^2+(y+2)^2 \leq 2 \qquad (2)$$

M_8 är området som ligger i eller på cirklarna som bestäms av (1) och (2).



sluten (innehåller sin enda punkt)
begränsad
→ kompakt

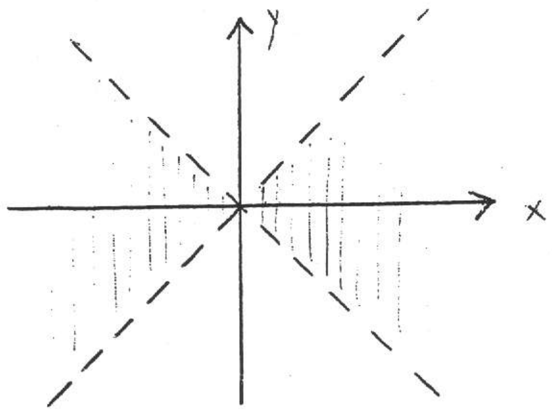
1.12 c) Skissera största möjliga definitionsmängd till

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

$$D = \{(x,y);\ \frac{x+y}{x-y} > 0\}$$

$$\frac{x+y}{x-y} > 0 \iff \begin{cases} x+y>0 \text{ och } x-y>0 & (1) \\ x+y<0 \text{ och } x-y<0 & (2) \end{cases}$$

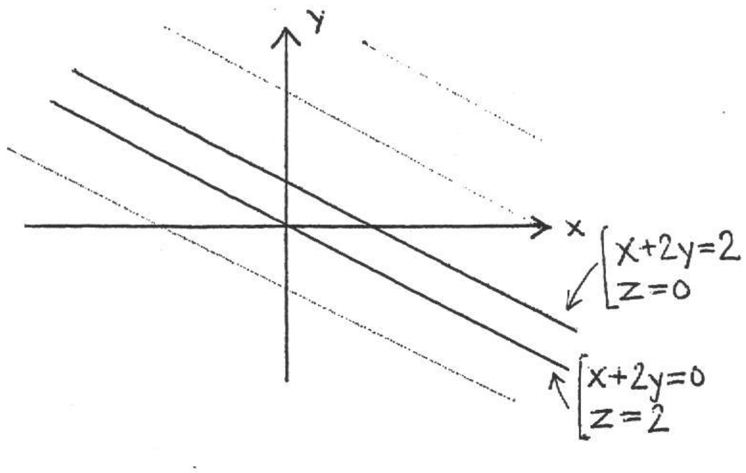
$(1): \begin{cases} y > -x \\ y < x \end{cases}$ $\qquad (2): \begin{cases} y < -x \\ y > x \end{cases}$



1.17 b) Rita några nivåkurvor till $f(x,y) = x+2y-2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

graf: $z = x + 2y - 2 \longrightarrow$ ett plan

nivåkurvor: $z=k \Rightarrow x+2y-2=k \longrightarrow$ linjer



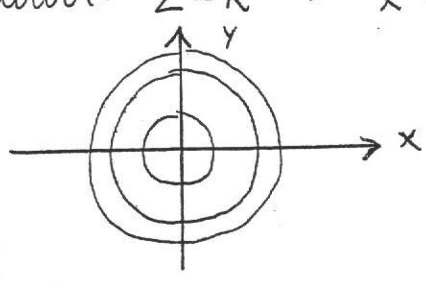
c) Rita några nivåkurvor till $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $x^2+y^2 \leq 1$

graf: $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

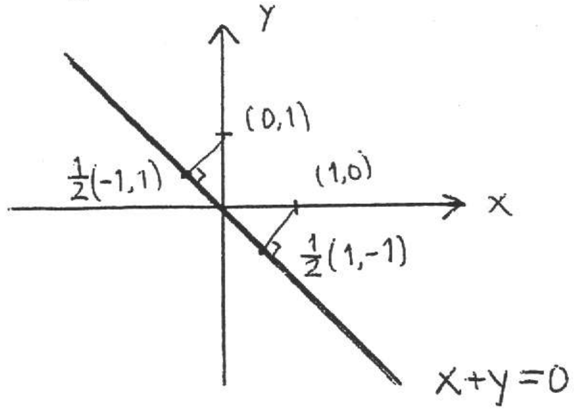
$z^2 = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$

$x^2+y^2+z^2 = 1$, $z \geq 0 \longrightarrow \begin{cases} \text{övre halvan av} \\ \text{enhetssfären} \end{cases}$

nivåkurvor: $z=k \Rightarrow x^2+y^2 = 1-k^2 \longrightarrow \begin{cases} \text{koncentriska} \\ \text{cirklar med centrum} \\ \text{i origo och radie} \leq 1 \end{cases}$



1.21 a) Beskriv analytiskt vinkelrät projektion på linjen $x+y=0$.



$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

linjär algebra: undersök projektionen av två vektorer och sätt upp ett linjärt ekvationssystem

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Vinkelrät projektion på $x+y=0$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u-v) \\ y = \frac{1}{2}(-u+v) \end{cases}$$

▨

1.25 c) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x-1}$

På linjen $x-y=0$ har funktionen $\frac{x-y}{x-1}$ värdet 0, så även då vi närmar oss punkten (1,1).

På linjen $y=1$ har funktionen $\frac{x-y}{x-1}$ däremot värdet 1.

Om vi närmar oss (1,1) från olika håll får vi olika gränsvärden: Inget gränsvärde existerar i (1,1).

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2}$

$x=0 \Rightarrow \frac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2} = 2$, $y=0 \Rightarrow \frac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2} = \frac{1}{2}$ $\Big\} \Rightarrow$ inget gränsvärde

▨

1.27 b) Existerar gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{x^2+(x+y)^2} \ ?$$

Skriv med polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $(x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow r\to 0$

$$\frac{x^4 y}{x^2+(x+y)^2} = \frac{r^5\cos^4\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+(\cos\theta+\sin\theta)^2)} = \frac{\cos^4\theta\sin\theta}{1+\cos^2\theta+\sin 2\theta}\, r^3$$

Kan vi få problem med nämnaren?

$$\underset{\left[\cos^2\theta \geq 0\right]}{1+\cos^2\theta} + \underset{\left[-1\leq \sin 2\theta \leq 1\right]}{\sin 2\theta} = 0 \iff \cos^2\theta = 0 \text{ och } \sin 2\theta = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2\theta = 0 \iff \cos\theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k\in\mathbb{Z} \\ \sin 2\theta = -1 \iff 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi \iff \theta = \frac{3\pi}{4} + l\pi, \ l\in\mathbb{Z} \end{array}\right\} \neq$$

$\because \ 1+\cos^2\theta+\sin 2\theta \neq 0 \ \ \forall\theta$

$\frac{\cos^4\theta\sin\theta}{1+\cos^2\theta+\sin 2\theta}\, r^3 \to 0$ då $r\to 0$ (oberoende av θ)

Vi har alltså

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{x^2+(x+y)^2} = 0$$

$\blacksquare$

1.28 c) Bestäm $\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2+x^2y^2}$.

Skriv med polära koordinater. $x^2+y^2\to\infty \iff r\to\infty$

$\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2+x^2y^2} = \frac{r^3}{r^4}\cdot\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{1+\cos^2\theta\sin^2\theta} \to 0$ då $r\to\infty$ (ober. av θ)

Alltså:

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2+x^2y^2} = 0$$

$\blacksquare$

1.28 e) Bestäm $\lim_{x^2+y^2\to\infty} xye^{-(x+y)^2}$.

Polära koordinater: $x^2+y^2\to\infty \iff r\to\infty$

$$xye^{-(x+y)^2} = r^2\cos\theta\sin\theta\, e^{\underbrace{-r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}_{\geq 0}} \to 0 \text{ då } r\to\infty$$

(oberoende av θ) ▨

1.30 e) Avgör om $f(x,y)$ kan utvidgas så att den blir kontinuerlig i hela $\mathbb{R}^2$ om

$$f(x,y) = xe^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}, \quad (x,y)\neq(0,0)$$

f kan utvidgas om $f(x,y)\to A$ då $(x,y)\to(0,0)$

Skriv med polära koordinater och låt $r\to 0$:

$$f(r,\theta) = \underbrace{r\cos\theta}_{\to 0}\, \underbrace{e^{\underbrace{-\frac{1}{r}}_{\to -\infty}}}_{\to 0} \to 0 \text{ då } r\to 0$$

Definiera nu

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} & \text{om } (x,y)\neq 0 \\ 0 & \text{om } (x,y)=0 \end{cases}$$

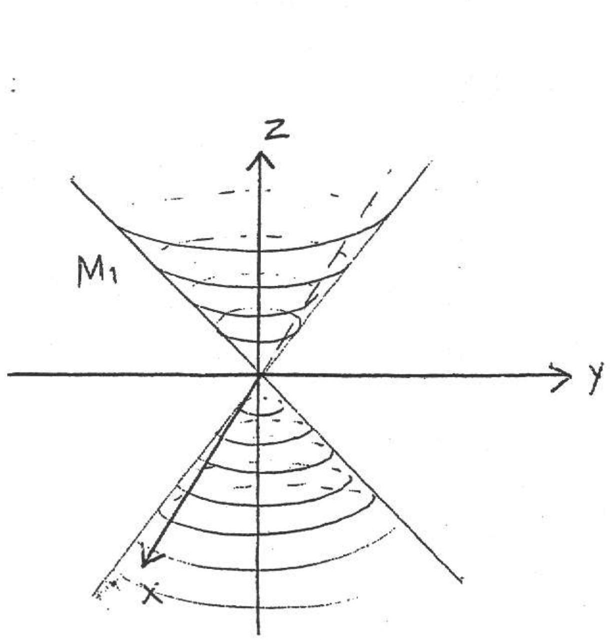
▨

1.33 Rita följande mängder i $\mathbb{R}^3$:

$M_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2-z^2 \leq 0\}$

$x^2+y^2=r^2$ och $z^2\geq r^2$

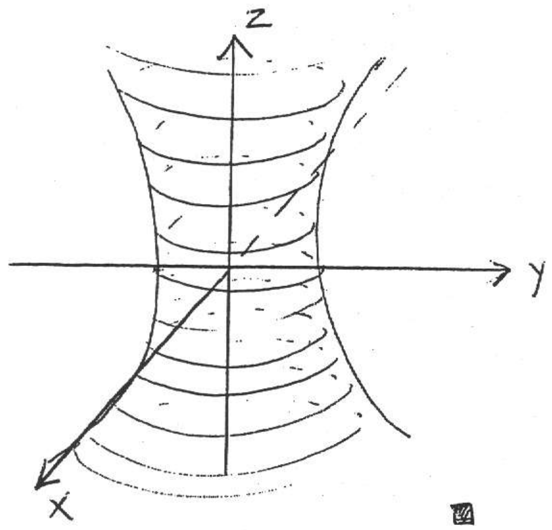
<u>en kon</u>



$M_2 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}$

$x^2 + y^2 = r^2$ och $z^2 \geq r^2 - 1$

<u>en hyperboloid</u>



9.2 a) Maclaurinpolynomet av ordning n till $f(x)$:

$$p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Bestäm $p_3(x)$ om $f(x) = e^x$

$f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$

$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1$

$f^{(3)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(3)}(0) = e^0 = 1$

$$p_3(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

■

9.20 Beräkna $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ med fyra korrekta decimaler.

Utveckla $\frac{\sin x}{x}$ och använd resttermen för att uppskatta felet.

Enligt entydighetssatsen för Maclaurinutvecklingar kan vi räkna ut den på vilket sätt vi vill, så vi väljer att utveckla $\sin x$ och sedan dividera med x.

$f(x) = \sin x$, $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$

$f^{(5)}(x) = \cos x$, $f^{(6)}(x) = -\sin x$, $f^{(7)}(x) = -\cos x$

$f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1$

$f^{(6)}(0) = 0$

$$f(x) = \frac{1}{1}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{\cos(\theta x)}{7!}x^7 \quad \text{där } 0 \leq \theta \leq 1$$

Utvecklingen av $\frac{\sin x}{x}$ ges nu av

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{\cos(\theta x)}{5040} x^6$$

Integrera:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{\cos(\theta x) x^6}{5040} \right\} dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \left\{ 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \right\} dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 \frac{\cos(\theta x) x^6}{5040}\,dx}_{I_2}$$

Om $I_2 < 5 \cdot 10^{-5}$, så ger I_2 värdet på integralen med fyra korrekta decimaler. Uppskatta I_2:

$$0 \leq \theta \leq 1 \quad \text{och} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \cos(\theta x) \leq 1$$

så

$$\int_0^1 \frac{\cos(\theta x) x^6}{5040}\,dx \leq \frac{1}{5040} \int_0^1 1 \cdot x^6\,dx = \frac{1}{5040} \left[\frac{x^7}{7!} \right]_0^1 = \frac{1}{35280}$$

$$I_2 \leq 2{,}9 \cdot 10^{-5}$$

Beräkna nu I_1, som ger ett tillräckligt bra närmevärde:

$$I_1 = \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \right\} dx = \left[x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600}$$

$$\simeq 0{,}9461$$

Sammanfattningsvis:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = 0{,}9461 \pm 5 \cdot 10^{-5}$$

$\blacksquare$

9.27 b) Finn Maclaurinutvecklingen av ordning 4, med restterm på formen $x^n B(x)$ där $B(x)$ är begränsad i en omgivning av $x=0$, då $f(x)=e^{\cos x}$

Standardutvecklingar:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^5 B_1(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B_2(x)$$

$B_1(x)$ och $B_2(x)$ är begränsade i en omgivning av $x=0$.

Det är frestande att stoppa in $\cos x$ i utvecklingen av e^x, men detta är <u>inte</u> tillåtet:
$B_1(x)$ är begränsad nära $x=0$, men $\cos x \to 1$ då $x \to 0$, vilket ger att vi inte kan säga att $B_1(\cos x)$ är begränsad nära $x=0$. Detta medför att vi inte kan garantera att resttermen $\to 0$ då $x \to 0$ och utvecklingen är alltså felaktig.

Titta istället på $\cos x - 1$:

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B_2(x) \to 0 \text{ då } x \to 0$$

Stoppa in utvecklingen för $\cos x - 1$ i e^x:

$$e^{\cos x - 1} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B_2(x)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B_2(x)\right)^2$$
$$+ \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B_2(x)\right)^3 \tilde{B}_1\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B_2(x)\right)$$

$\uparrow$

Vi behöver inte utveckla längre, eftersom alla ytterligare termer kommer att ha ordning ≥ 4.

$$e^{\cos x - 1} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + x^6 \tilde{B}(x)$$

$$e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}\right) + x^6 B(x)$$

$\blacksquare$

9.28 b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{x + \ln(1-x)}{1 - \sqrt{1-x^2}}$

Täljare och nämnare har båda gränsvärdet 1, så vi Maclaurinutvecklar. Använd standardutvecklingar:

$$\ln(1-x) = \ln(1+(-x)) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + x^3 B_1(x)$$
$$x + \ln(1-x) = x - x - \frac{x^2}{2} + x^3 B_1(x) = -\frac{x^2}{2} + x^3 B_1(x)$$

$$\sqrt{1-x^2} = (1+(-x^2))^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(-x^2) + \quad \tilde{B}_2(x)$$
$$1 - \sqrt{1-x^2} = 1 - 1 + \frac{x^2}{2} + x^3 B_2(x) = \frac{x^2}{2} + x^3 B_2(x)$$

$$\frac{x + \ln(1-x)}{1 - \sqrt{1-x^2}} = \frac{-\frac{x^2}{2} + x^3 B_1(x)}{\frac{x^2}{2} + x^3 B_2(x)} = \frac{-\frac{1}{2} + x B_1(x)}{\frac{1}{2} + x B_2(x)} \to \frac{-\frac{1}{2} + 0}{\frac{1}{2} + 0} \text{ då } x \to 0$$

ty $B_1(x)$ och $B_2(x)$ begränsade i en omgivning av 0.

Alltså har vi att

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \ln(1-x)}{1 - \sqrt{1-x^2}} = -1$$

$\blacksquare$

9.29 b) Beräkna $\lim_{x\to 0} (1+\sin^2 x)^{-\frac{2}{x^2}}$

Skriv om funktionen

$$(1+\sin^2 x)^{-\frac{2}{x^2}} = e^{\ln(1+\sin^2 x)^{-\frac{2}{x^2}}} = e^{-\frac{2}{x^2}\ln(1+\sin^2 x)}$$

Maclaurinutveckla exponenten:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + x^n B_1(x)$$

$\sin^2 x \to 0$ då $x \to 0$, så vi kan stoppa in dess utveckling i uttrycket för $\ln(1+x)$.

Sök Maclaurinutvecklingen för $\sin^2 x$:

$$\left.\begin{aligned}
(\sin^2 x)' &= 2\sin x\cos x = \sin 2x && \to 0\\
(\sin^2 x)'' &= (\sin 2x)' = 2\cos 2x && \to 2\\
(\sin^2 x)^{(3)} &= (2\cos 2x)' = -4\sin 2x && \to 0\\
(\sin^2 x)^{(4)} &= (-4\sin 2x)' = -8\cos 2x && \to -8
\end{aligned}\right\} \text{ då } x \to 0$$

$$\sin^2 x = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{8}{4!}x^4 + x^6 \tilde{B}_2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + x^6 \tilde{B}_2(x)$$

Maclaurinutvecklingen för exponenten blir då

$$-\frac{2}{x^2}\left[\left(x^2 + x^4 B_2(x)\right) - \left(x^2 + x^4 B_2(x)\right)^2 B_1\left(x^2 + x^4 B_2(x)\right)\right]$$

$$= -2 + x^2 B_{exp}(x)$$

Och funktionen kan skrivas

$$(1+\sin^2 x)^{-\frac{2}{x^2}} = e^{-2+x^2 B_{exp}(x)} \to e^{-2+0} \text{ då } x \to 0$$

ty $B_{exp}(x)$ är begränsad i en omgivning till $x=0$.

Det sökta gränsvärdet är

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin^2 x)^{-\frac{2}{x^2}} = e^{-2}$$

∎

9.31 b) Beräkna $\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n \cdot e^{-n}$

Sätt $t = \frac{1}{n}$ och skriv om funktionen:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n \cdot e^{-n} = \lim_{t\to 0} \underbrace{(1+t)^{\frac{1}{t^2}} e^{-\frac{1}{t}}}_{f(t)}$$

$$f(t) = (1+t)^{\frac{1}{t^2}} e^{-\frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{t^2}\ln(1+t) - \frac{1}{t}}$$

Maclaurinutveckla exponenten:

$$\frac{1}{t^2}\ln(1+t) - \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2}\left[t - \frac{t^2}{2} + t^3 B(t)\right] - \frac{1}{t} = -\frac{1}{2} + tB(t)$$

$$e^{\frac{1}{t^2}\ln(1+t) - \frac{1}{t}} = e^{-\frac{1}{2} + tB(t)} \to e^{-\frac{1}{2}} \quad \text{då } x \to 0$$

Sammanfattningsvis:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n e^{-n} = \lim_{t\to 0} e^{-\frac{1}{2} + tB(t)} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

∎

9.31 c) Beräkna $\lim_{x\to\infty} (x^2 \sqrt[3]{1+x^3} - x^3)$

Bryt ut x^3 ur rotuttrycket:

$$x^2 \sqrt[3]{1+x^3} - x^3 = x^3 \sqrt[3]{1+x^{-3}} - x^3$$

Sätt $t = \frac{1}{x^3}$:

$$\frac{1}{t}\sqrt[3]{1+t} - \frac{1}{t}$$

Maclaurinutveckla:

$$\frac{1}{t}\sqrt[3]{1+t} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}(1+t)^{1/3} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left[1 + \frac{t}{3} + t^2 B(t)\right] - \frac{1}{t} = \frac{1}{3} + tB(t)$$

$$\to \frac{1}{3} \quad \text{då } t \to 0$$

Sammanfattningsvis:

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 \sqrt[3]{1+x^3} - x^3) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{3} + tB(t)\right) = \frac{1}{3}$$

∎

1639 Bestäm a och b så att $\lim_{x\to 0} x^{-3}\left(\cot x + \frac{a}{x} + bx\right)$ existerar. Beräkna gränsvärdet.

$$f(x) = \frac{1}{x^3}\left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{a}{x} + bx\right)$$

$\cot x$ är ej kontinuerlig i $x=0$ $\rightarrow$ ingen Maclaurinutv.
Skriv på gemensamt bråkstreck och utveckla täljare och nämnare för sig.

$$f(x) = \frac{x\cos x + (a+bx^2)\sin x}{x^4 \sin x}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B_1(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^7 B_2(x)$$

$$f(x) = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B_1(x)\right) + (a+bx^2)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + B_2(x)x^7\right)}{x^4\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + B_2(x)x^7\right)}$$

$$= \frac{x[1+a] + x^3[-\frac{1}{2} + b - \frac{a}{6}] + x^5[\frac{1}{24} + \frac{a}{120} - \frac{b}{6}] + x^7 B_2(x)}{x^5 - \frac{x^8}{6} + \frac{x^9}{120} + x^{11}B_2(x)}$$

Gränsvärdet existerar ($\neq$ "∞"!) om och endast om koefficienten framför x och framför x^3 i täljaren är noll.

$$1 + a = 0 \iff a = -1$$

$$-\frac{1}{2} + b - \frac{-1}{6} = 0 \iff b = \frac{1}{3}$$

Sätt in värden på a och b:

$$\frac{1}{24} + \frac{-1}{120} - \frac{\frac{1}{3}}{6} = -\frac{1}{45}$$

$$f(x) = \frac{x^5\left(-\frac{1}{45}\right) + x^7 B_2(x)}{x^5 + x^8 \tilde{B}_2(x)} = \frac{-\frac{1}{45} + x^2 B_2(x)}{1 + x^3 \tilde{B}_2(x)} \rightarrow -\frac{1}{45} \text{ då } x \rightarrow 0$$

Alltså:

$\lim_{x\to 0} x^{-3}\left(\cot x + \frac{a}{x} + bx\right)$ existerar om $\begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$ och har då värdet $-\frac{1}{45}$.

1640 a) Beräkna $\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1}{x^3}\left(\int_0^1 \frac{\sin xt}{t}\,dt - x\right)}_{f(x)}$

Maclaurinutveckla $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{x^3}\left[\int_0^1 \frac{(xt) - \frac{(xt)^3}{6} + (xt)^5 B(xt)}{t}\,dt - x\right]$$

$$= \frac{1}{x^3}\left[\int_0^1 \left(x - \frac{x^3}{6}t^2 + x^5 t^4 B(xt)\right)dt - x\right]$$

$$= \frac{1}{x^3}\left[\left[xt - \frac{x^3 t^3}{18} + \tilde{B}(xt)x^5 t^5\right]_0^1 - x\right]$$

$$= \frac{1}{x^3}\left[x - \frac{x^3}{18} + x^5\tilde{B}(x) - x\right] = -\frac{1}{18} + x^2\tilde{B}(x)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{18} + x^2\tilde{B}(x)\right) = -\frac{1}{18}$$

∎

1643 b) Beräkna $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$, $a>0$, $b>0$

Vi ser att $\ln \sin ax \to -\infty$, $\ln \sin bx \to -\infty$ då $x \to 0^+$.

Derivera:

$$[\ln \sin ax]' = \frac{1}{\sin ax}\cdot \cos ax \cdot a$$

Derivatorna av täljare och nämnare existerar på intervallet $]0; \frac{\pi}{2}[$ med konstant tecken.

$$\frac{a\cos ax}{\sin ax}\cdot\frac{\sin bx}{b\cos bx} = \frac{a}{b}\cdot\frac{(1+x^2B_1(x))(bx + x^3 B_2(x))}{(ax + x^3 B_2(x))(1+x^2 B_1(x))}$$

$$= \frac{a}{b}\cdot\frac{bx + x^3\tilde{B}_1(x)}{ax + x^3\tilde{B}_2(x)} = \frac{a}{b}\cdot\frac{b + x^2\tilde{B}_1(x)}{a + x^2\tilde{B}_2(x)} \to 1 \text{ då } x\to 0^+$$

Enligt L'Hopitals regel gäller nu att

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx} = 1$$

∎

1643c) Beräkna $\lim_{x\to\infty} x\operatorname{arccot} x$

$$x\operatorname{arccot} x = \frac{\operatorname{arccot} x}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$$

$\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{\pi}{2} - \arctan x \to 0$ då $x \to \infty$

$\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)' = -\frac{1}{1+x^2} < 0$ på intervallet $]0;\infty[$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$ på intervallet $]0;\infty[$

Då får vi använda l'Hopitals regel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\operatorname{arccot} x = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

■

1644 a) Beräkna $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$

$$\frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{\int_2^x \frac{dt}{\ln t}}{\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{-1}} = \frac{\int_2^x \frac{dt}{\ln t}}{\left(\frac{x}{\ln x}\right)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{\ln x} \to \infty \text{ då } x \to \infty \\ f'(x) = \frac{1}{\ln x} > 0 \text{ på } [2;\infty[\\ g'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} > 0 \text{ på }]e;\infty[\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

enligt l'Hopitals regel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x - 1}{\ln x} = 1$$

■

1907 Utveckla $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ i potensserie och härled sedan potensserieutvecklingen av $\arcsin x$.

binomialserien: $(1+x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}}$, så

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\ldots(-\frac{1}{2}-(k-1))}{k!} (-1)^k x^{2k} + \frac{1}{2}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{k!} (-1)^k x^{2k} + \frac{1}{2}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2k)} x^{2k} + \frac{1}{2}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k} + \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\arcsin x)' \iff \arcsin x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Potensserier får integreras termvis inom sin konvergensradie. Den resulterande serien får samma konvergensradie.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2(k+1)-1)!!}{(2(k+1))!!} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} = \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{1+\frac{1}{2k}}{1+\frac{1}{k}} \to 1 \text{ då } k \to \infty$$

$R=1$, så för $|x|<1$ gäller

$$\arcsin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + x$$

∎

1914 a) Bestäm potensserien som satisfierar

$xy'' + y' - y = 0$, $y(0)=1$

Ansätt $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ med konvergensradie $R>0$.

För $|x|<R$ gäller då

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) k a_{k+1} x^{k-1}$$

$$xy'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) k a_{k+1} x^k$$

Insättning i differentialekvationen ger

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left[(k+1) k a_{k+1} + (k+1) a_{k+1} - a_k \right]}_{=0} x^k = 0$$

$$(k+1) k a_{k+1} + (k+1) a_{k+1} - a_k = 0 \iff a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2} a_k$$

$$a_k = \frac{1}{k^2} a_{k-1}$$

Konvergensradien?

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{(k+1)^2} \to 0 \text{ då } k \to \infty \iff \text{serien konvergent } \forall x \in \mathbb{R}$$

Begynnelsevillkoret $y(0)=1$ ger

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k 0^k = a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{1^2} \cdot 1, \quad a_2 = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{1^2}, \quad a_3 = \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{1^2}, \ldots, a_k = \frac{1}{(k!)^2}$$

Lösningen ges av

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} x^k$$

■

1910 $f(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$

Visa att $f(x)$ satisfierar $y'' + y' + y = e^x$ och använd det för att bestämma $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots, \quad f''(x) = \frac{x^1}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$f''(x)+f'(x)+f(x)=\left(1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\dots\right)$$
$$+\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\dots\right)$$
$$+\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\dots\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$$

$f(x)$ satisfierar alltså differentialekvationen. Bestäm nu alla lösningar för att kunna bestämma $f(x)$.

Lös först homogena ekvationen $y''+y'+y=0$:

Karakteristiska ekvationen: $r^2+r+1=0$

$$r=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_h=e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+B\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

Sök partikulärlösning: ansätt $y=z(x)e^x$

$y'=(z'+z)e^x$, $y''=[(z'+z)'+(z'+z)]e^x=(z''+2z'+z)e^x$

Insättning i ekvationen ger

$[(z''+2z'+z)+(z'+z)+z]e^x=e^x$

$z(x)$ satisfierar $z''+3z'+3z=1 \iff z(x)=\frac{1}{3}$

$y_p=\frac{1}{3}e^x$

Alla lösningar ges av $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+B\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{3}e^x$

Vi noterar att $f(0)=1$ och $f'(0)=0$. $f(x)$ satisfierar alltså $y''+y'+y=e^x$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$

$e^0(A+0)+\frac{1}{3}e^0=1 \iff A=\frac{2}{3}$

$$y'=e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}B\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}B\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{3}e^x$$

$y'(0)=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}B+\frac{1}{3}=0 \iff B=0$

$$f(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}e^x$$

1818 a) $\{x_n\}_1^\infty$: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$

Visa att talföljden är konvergent och beräkna dess gränsvärde.

En monoton talföljd är konvergent om och endast om den är begränsad.

Visa med induktion att $\{x_n\}_1^\infty$ är monoton och begränsad:

$x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

för $n=2$: $x_2 = \frac{1}{2} < 1$

$x_2 - x_1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$

Antag sant för n : $x_n < 1$

$x_n - x_{n-1} < 0$

för $n+1$: $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} < 1$ ty $x_n > 0$

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{1+x_n} - x_n < \frac{1}{1+x_{n-1}} - \frac{1}{1+x_{n-1}} = 0$

Påståendet är alltså sant för $n \geq 2$. Talföljden är konvergent.

Antag $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, då gäller $\lim_{n\to\infty} [x_{n+1} - x_n] = 0$

$x = \frac{1}{1+x}$

$x^2 + x - 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$

$= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Men $x_n > 0 \ \forall n$, så den negativa roten är falsk.

$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

■

1919 Visa att följande funktionsföljder konvergerar punktvis och bestäm gränsfunktionen.

a) $\{e^{-nx}\}_1^\infty$ på $[0;\infty[$ b) $\left\{\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\right\}_1^\infty$ på $]-\infty;\infty[$

a) $f_n = e^{-nx} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^n$

fixera x: $x>0 \rightarrow \frac{1}{e^x}<1$

$\left(\frac{1}{e^x}\right)^n \rightarrow 0$ då $n\rightarrow\infty$

$x=0 \rightarrow \frac{1}{e^0}=1$

$\left(\frac{1}{e^0}\right)^n = 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ där $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x=0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$

b) $f_n = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} = \frac{1}{1+x^{-2n}}$

fixera x: $|x|>1 \rightarrow \frac{1}{x^2}<1$

$\frac{1}{x^{2n}} \rightarrow 0$ då $n\rightarrow\infty$

$\frac{1}{1+\frac{1}{x^{2n}}} \rightarrow 1$ då $n\rightarrow\infty$

$|x|=1 \rightarrow 1^{2n}=1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$|x|<1 \rightarrow x^2<1$

$\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \rightarrow \frac{0}{1+0} = 0$ då $n\rightarrow\infty$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ där $f(x) = \begin{cases} 0, & |x|<1 \\ \frac{1}{2}, & |x|=1 \\ 1, & |x|>1 \end{cases}$

1920 Visa att funktionsföljden $\{nx^{n-1}\}_1^\infty$ konvergerar punktvis på $[0;1[$ och beräkna $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} nx^{n-1}\,dx$ och $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^{n-1}\,dx$.

$f_n = nx^{n-1}$

fixera x: $\quad x=0$, $f_n(0) = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\quad 0<x<1$, $f_n = nx^{n-1} \to 0$ då $n\to\infty$

Beräkna integralerna:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \lim_{n\to\infty} nx^{n-1}\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0 \\ &\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^{n-1}\,dx = \lim_{n\to\infty}[x^n]_0^1 = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \end{aligned}\right\} \neq$$

ty endast punkvis konvergens

$\blacksquare$

1922 b) Beräkna $\frac{d}{dx}[\lim_{n\to\infty} S_n(x)]$ och $\lim_{n\to\infty}[\frac{d}{dx}S_n(x)]$ då

$$S_n(x) = \frac{\arctan nx}{n}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = ?$

fixera x: $\quad x=0 \to S_n(0) = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\quad x\neq 0 \to \arctan nx \to \pm\frac{\pi}{2}$ (beror på tecknet på x)

$n\to\infty$

$S_n\to 0$

$$\frac{d}{dx}[\lim_{n\to\infty} S_n(x)] = \frac{d}{dx}[0] = 0$$

$$\frac{d}{dx}S_n(x) = \frac{n}{n}\cdot\frac{1}{1+n^2x^2} = \frac{1}{1+n^2x^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{d}{dx}S_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^2x^2} = \begin{cases} 1 & \text{om } x=0 \\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+x^2} = 0 & \text{om } x\neq 0 \end{cases}$$

$\blacksquare$

1924 a) $\{f_n\}_1^\infty$ med $f_n = \frac{x^n-1}{x^n+1} \cdot x$ konvergerar punktvis på intervallet $[0;\infty[$. Bestäm gränsfunktionen.

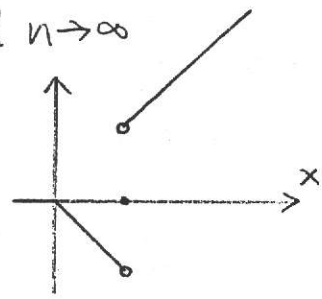
fixera x: $x=0$, $f_n(0)=0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$0<x<1$, $f_n \to -x$ då $n\to\infty$

$x=1$, $f_n(1)=0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$1<x$, $f_n \to x$ då $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -x & \text{om } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{om } x=1 \\ x & \text{om } x>1 \end{cases}$$



b) Är konvergensen likformig på $[0;\infty[$? På $[2;\infty[$?

Om f_n kontinuerlig på I och $f_n \to f$ likformigt på I, så är f kontinuerlig på I. (*)

Tag $I = [0;\infty[$:

$$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ polynom, så kontinuerlig på } I \\ f \text{ är inte kontinuerlig på } I \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

f_n konvergerar <u>inte</u> likformigt på I

Observera att satsen (*) inte ger någon information i andra riktningen!

Använd definitionen av likformig konvergens:

$\{f_n\}_1^\infty$ konvergerar likformigt mot f på I om det till varje tal $\varepsilon>0$ finns ett tal N_ε så att

$|f_n - f| < \varepsilon$ för alla $x \in I$ då $n > N_\varepsilon$.

$$|f_n - f| = \left| x\frac{x^n-1}{x^n+1} - x \right| = \left| x\,\frac{x^n-1-(x^n+1)}{x^n+1} \right| = \frac{2x}{x^n+1} \text{ på } [2;\infty[$$

$\frac{2x}{x^n+1}$ strängt avtagande på $[2;\infty[$ för $n>1 \Longrightarrow$

$$\frac{2x}{x^n+1} < \frac{2\cdot 2}{2^n+1} = \frac{4}{2^n+1}$$

För ett fixt $\varepsilon > 0$:

$$|f_n - f| < \frac{4}{2^n+1} < \varepsilon \iff 2^n+1 > \frac{4}{\varepsilon}$$

$$2^n > \frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$n \ln 2 > \ln\left(\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

$$n > \frac{\ln\left(\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$$

Välj $N_\varepsilon = \frac{\ln\left(\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ n > N_\varepsilon = \frac{\ln\left(\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \Longrightarrow |f_n - f| < \varepsilon$$

Då konvergerar f_n likformigt mot f på $[2;\infty[$.

$\blacksquare$

192.9 Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-n^2x}$ är likformigt konvergent på $[0;\infty[$.

$$f_n(x) = xe^{-n^2x}$$

$$f_n'(x) = (1-n^2x)e^{-n^2x}, \quad f_n'(x) = 0 \iff 1-n^2x = 0$$

$$x = \frac{1}{n^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{en^2} \\ f_n(0) = 0 \end{array}\right\} \quad f_n(x) \text{ antar max i } x = \frac{1}{n^2} : \ f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\forall x \in [0;\infty[, \quad 0 \leq xe^{-n^2x} \leq \frac{1}{en^2}, \quad |xe^{-n^2x}| \leq \frac{1}{en^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{en^2}$ konvergent $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-n^2x}$ likformigt konvergent på $[0;\infty[$.

$\blacksquare$

1818 a) Givet är den rekursiva följden

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n} \end{cases}$$

Visa att följden är konvergent och bestäm dess gränsvärde.

Lösning Om följden är konvergent, så gäller $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = l$ och vi får

$$l = \frac{1}{1+l} \qquad l^2 + l - 1 = 0$$

$$l_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad l_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad \circledast \left(l = \frac{1-l}{l} \right)$$

Eftersom alla element i följden är positiva får vi att om det finns ett gränsvärde l, så gäller $l = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Återstår att visa att följden konvergerar. En metod (som här inte kommer att fungera rakt av) är att visa att följden är monoton och begränsad, så det finns anledning att jämföra x_n med det eventuella gränsvärdet: $x_1 < l$;

$$x_{n+1} - l = \frac{1}{1+x_n} - l = \frac{1 - l - l x_n}{1+x_n} =$$

$$= \frac{l\left(\frac{1-l}{l} - x_n\right)}{1+x_n} = \frac{\overset{>0}{l}\,(l - x_n)}{\underset{>0}{1+x_n}} \quad (\text{se } \circledast \text{ ovan})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n < l \Rightarrow x_{n+1} > l \\ x_n > l \Rightarrow x_{n+1} < l \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x_{2k-1} < l \qquad \forall k \in \mathbb{N}$

$\qquad x_{2k} > l \qquad \forall k \in \mathbb{N}$

(eftersom $x_1 < l$, $x_2 > l$, $x_3 < l$ etc)

$\Rightarrow$ det verkar rimligt att försöka visa att elementen med udda nummer bildar en växande följd och att de med jämna nummer bildar en avtagande följd.

$$x_{2k+1} - x_{2k-1} = \frac{1}{1+x_{2k}} - \left(\frac{1}{x_{2k}} - 1\right) =$$

$$= \frac{\cancel{x_{2k}}1 - (1+\cancel{x_{2k}}) + x_{2k} + x_{2k}^2}{(1+x_{2k})x_{2k}} = \frac{x_{2k}^2 + x_{2k} - 1}{\underbrace{x_{2k}(1+x_{2k})}_{>0}}$$

$x_{2k} > l$, l det största nollstället till x^2+x-1 $\Rightarrow$ $x_{2k}^2 + x_{2k} - 1 > 0$

$\Rightarrow x_{2k+1} - x_{2k-1} > 0 \Rightarrow \{x_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ är en växande (uppåt begränsad) följd

På samma sätt (gör det!!!) fås att $\{x_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ är avtagande (nedåt begränsad).

$\Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = l'$, $\exists \lim_{k\to\infty} x_{2k} = l''$

Vi har: $\lim_{k\to\infty}(x_{2k+1} - x_{2k-1}) = l' - l' = 0 =$

$$= \frac{(l'')^2 + l'' - 1}{l''(1+l'')}$$ och som förut får vi $l''(=l) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

P.s.s.: $l'(=l) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ■

1919 Visa att följande funktionsföljder konvergerar punktvis och bestäm gränsfunktionen.

a) $\{e^{-nx}\}_1^{\infty}$ på $[0;\infty[$ b) $\left\{\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\right\}_1^{\infty}$ på $]-\infty;\infty[$

a) $f_n = e^{-nx} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^n$

fixera x : $x>0 \rightarrow \frac{1}{e^x} < 1$

$\left(\frac{1}{e^x}\right)^n \rightarrow 0$ då $n\rightarrow\infty$

$x=0 \rightarrow \frac{1}{e^0} = 1$

$\left(\frac{1}{e^0}\right)^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ där $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x=0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$

b) $f_n = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} = \frac{1}{1+x^{-2n}}$

fixera x : $|x|>1 \rightarrow \frac{1}{x^2} < 1$

$\frac{1}{x^{2n}} \rightarrow 0$ då $n\rightarrow\infty$

$\frac{1}{1+\frac{1}{x^{2n}}} \rightarrow 1$ då $n\rightarrow\infty$

$|x|=1 \rightarrow 1^{2n} = 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$|x|<1 \rightarrow x^2 < 1$

$\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \rightarrow \frac{0}{1+0} = 0$ då $n\rightarrow\infty$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ där $f(x) = \begin{cases} 0, & |x|<1 \\ \frac{1}{2}, & |x|=1 \\ 1, & |x|>1 \end{cases}$

1920 Visa att funktionsföljden $\{nx^{n-1}\}_1^\infty$ konvergerar punktvis på $[0;1[$ och beräkna $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} nx^{n-1}\,dx$ och $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^{n-1}\,dx$.

$f_n = nx^{n-1}$

fixera x: $\quad x=0, \quad f_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\qquad 0<x<1, \quad f_n = nx^{n-1} \to 0$ då $n\to\infty$

Beräkna integralerna:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \lim_{n\to\infty} nx^{n-1}\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0 \\ &\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^{n-1}\,dx = \lim_{n\to\infty} [x^n]_0^1 = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \end{aligned}\right\} \neq$$

ty endast punkvis konvergens

∎

1922 b) Beräkna $\frac{d}{dx}[\lim_{n\to\infty} S_n(x)]$ och $\lim_{n\to\infty}[\frac{d}{dx}S_n(x)]$ då

$$S_n(x) = \frac{\arctan nx}{n}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = ?$

fixera x: $\quad x=0 \to S_n(0) = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\qquad x\neq 0 \to \arctan nx \to \pm\frac{\pi}{2}$ (beror på tecknet på x)

$n\to\infty$

$S_n \to 0$

$$\frac{d}{dx}[\lim_{n\to\infty} S_n(x)] = \frac{d}{dx}[0] = 0$$

$$\frac{d}{dx} S_n(x) = \frac{n}{n}\cdot\frac{1}{1+n^2x^2} = \frac{1}{1+n^2x^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{d}{dx}S_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^2x^2} = \begin{cases} 1 & \text{om } x=0 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+x^2} = 0 & \text{om } x\neq 0 \end{cases}$$

∎

1924 a) $\{f_n\}_1^\infty$ med $f_n = \frac{x^n-1}{x^n+1} \cdot x$ konvergerar punktvis på intervallet $[0;\infty[$. Bestäm gränsfunktionen.

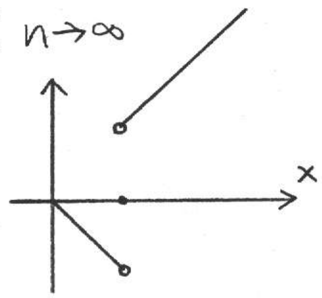
fixera x: $x=0$, $f_n(0)=0 \ \forall n\in\mathbb{N}$

$0<x<1$, $f_n \to -x$ då $n\to\infty$

$x=1$, $f_n(1)=0 \ \forall n\in\mathbb{N}$

$1<x$, $f_n \to x$ då $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -x & \text{om } 0\le x<1 \\ 0 & \text{om } x=1 \\ x & \text{om } x>1 \end{cases}$$



b) Är konvergensen likformig på $[0;\infty[$? På $[2;\infty[$?

Om f_n kontinuerlig på I och $f_n\to f$ likformigt på I, så är f kontinuerlig på I. (*)

Tag $I=[0;\infty[$:

$$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ polynom, så kontinuerlig på } I \\ f \text{ är inte kontinuerlig på } I \end{array}\right\} \Rightarrow$$

f_n konvergerar <u>inte</u> likformigt på I

Observera att satsen (*) inte ger någon information i andra riktningen!

Använd definitionen av likformig konvergens:

$\{f_n\}_1^\infty$ konvergerar likformigt mot f på I om det till varje tal $\varepsilon>0$ finns ett tal N_ε så att $|f_n-f|<\varepsilon$ för alla $x\in I$ då $n>N_\varepsilon$.

$$|f_n - f| = \left| x\frac{x^n-1}{x^n+1} - x \right| = \left| x\,\frac{x^n-1-(x^n+1)}{x^n+1} \right| = \frac{2x}{x^n+1} \text{ på } [2;\infty[$$

$\frac{2x}{x^n+1}$ strängt avtagande på $[2;\infty[$ för $n>1 \implies$

$$\frac{2x}{x^n+1} < \frac{2\cdot 2}{2^n+1} = \frac{4}{2^n+1}$$

För ett fixt $\varepsilon>0$:

$$|f_n-f| < \frac{4}{2^n+1} < \varepsilon \iff 2^n+1 > \frac{4}{\varepsilon}$$

$$2^n > \frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$n\ln 2 > \ln\left(\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

$$n > \frac{\ln\left(\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$$

Välj $N_\varepsilon = \frac{\ln\left(\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$:

$$\forall \varepsilon>0 \ : \ n > N_\varepsilon = \frac{\ln\left(\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \implies |f_n-f|<\varepsilon$$

Då konvergerar f_n likformigt mot f på $[2;\infty[$.

∎

1929 Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-n^2x}$ är likformigt konvergent på $[0;\infty[$.

$$f_n(x) = xe^{-n^2x}$$

$$f_n'(x) = (1-n^2x)e^{-n^2x}, \quad f_n'(x)=0 \iff 1-n^2x=0$$

$$x = \frac{1}{n^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{en^2} \\ f_n(0)=0 \end{array}\right\} \quad f_n(x) \text{ antar max i } x=\frac{1}{n^2} : \ f_n(x) \le f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\forall x\in[0;\infty[, \quad 0 \le xe^{-n^2x} \le \frac{1}{en^2}, \quad |xe^{-n^2x}| \le \frac{1}{en^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{en^2}$ konvergent $\implies \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-n^2x}$ likformigt konvergent på $[0;\infty[$.

∎

1.28 e) Bestäm $\lim_{x^2+y^2\to\infty} \underbrace{xye^{-(x+y)^2}}_{f(x,y)}$.

linjen $x=0$: $f(x,y)=0 \quad \to 0$
linjen $x+y=0$: $f(x,y) = x(-x)e^0 = -x^2 \quad \to -\infty$

$\neq$ gv existerar inte!

■

1.30 e) Avgör om $f(x,y)$ kan utvidgas så att den blir kontinuerlig i hela $\mathbb{R}^2$ om

$$f(x,y) = xe^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

f kan utvidgas om $f(x,y) \to A$ då $(x,y) \to (0,0)$

Skriv med polära koordinater och låt $r \to 0$:

$$f(r,\theta) = \underbrace{r}_{\to 0}\cos\theta\, \underbrace{e^{\underbrace{-\frac{1}{r}}_{\to -\infty}}}_{\to 0} \to 0 \text{ då } r \to 0$$

Definiera nu

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} & \text{om } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{om } (x,y) = 0 \end{cases}$$

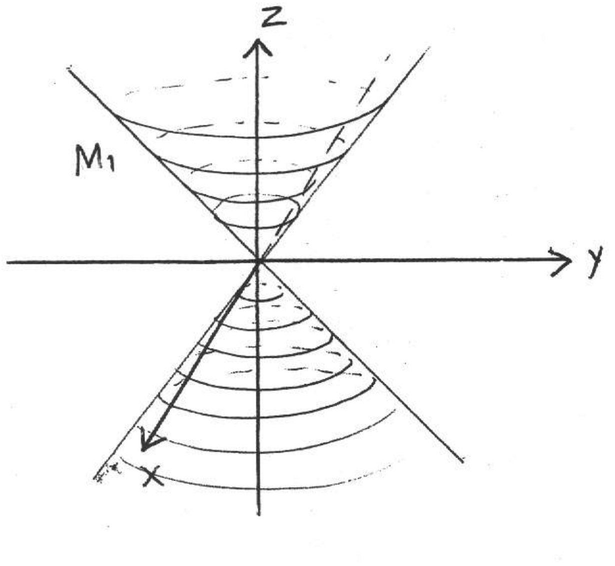
■

1.33 Rita följande mängder i $\mathbb{R}^3$:

$M_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2-z^2 \leq 0\}$

$x^2+y^2 = r^2$ och $z^2 \geq r^2$

en kon



$M_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2-z^2 \leq 1\}$

$x^2+y^2 = r^2$ och $z^2 \geq r^2-1$

<u>en hyperboloid</u>