Föreläsningsanteckningar

TMA976 - Matematisk analys, fortsättning F

2009

Föreläsare: Peter Kumlin
Antecknare: Karin Skoglund Keiding

KURSINNEHÅLL.

Peter Kumlin
övningsledare:
Reimond a,c
Anton b,d
Peter TM

- differentialekvationer ex. $y' = -e^x y^2$
- Taylorutveckling ex. sin x

  $$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + B(x)x^7$$

  t.ex. likt x då nära noll.
- $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (fkt av flera variabler)

  gränsvärden, kontinuitet

  ex. $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ $(x,y) \neq (0,0)$
- talföljder, referensekvationer, iteration

  ex. a_m, $m = 1,2,3\ldots$ $a_{m+2} = a_{m+1} + a_m$ $m = 1,2,\ldots$

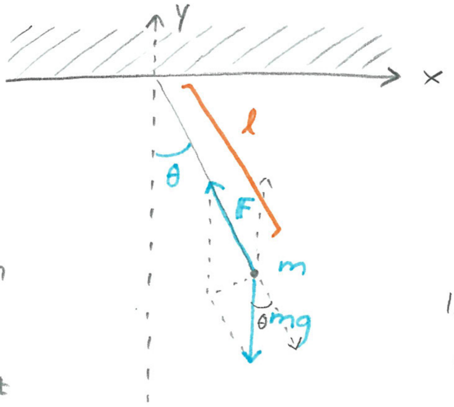
  $a_1 = a_2 = 1$
- serier ex. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ vad sker då mot oändlighet t.ex

  potensserier ex. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \cdot x^k$
- funktionsföljder/-serier $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$

  likformig konvergens

DIFFERENTIALEKVATIONER.

ex.



masspkt's position
vid tiden t :
$(x(t), y(t))$

netkraften
verkar
vinkelrät
mot snöret

längden av $|F|$ =
$mg \cdot \cos\theta$

Newton's ekvation

$$m(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = (-mg\cos\theta\sin\theta, -mg + mg\cos\theta\cos\theta)$$

från figuren

$$\begin{cases} x(t) = l\sin(\theta(t)) \\ y(t) = -l\cos(\theta(t)) \end{cases}$$

derivera m.a.p t :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = l\cos(\theta t)\cdot\theta t = l\cos\theta\cdot\theta \\ \dot{y}(t) = l\sin(\theta t)\cdot\theta t = l\sin\theta\cdot\theta \end{cases}$$

derivera igen :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -l\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 + l\cos\theta\cdot\ddot{\theta} \\ \ddot{y} = l\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 + l\sin\theta\cdot\ddot{\theta} \end{cases}$$

Insättning, Newtons ekv ger :

$$m(-l\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 + l\cos\theta\cdot\ddot{\theta}) = -mg\cos\theta\sin\theta \quad ①$$

$$m(l\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 + l\sin\theta\cdot\ddot{\theta}) = -mg + mg\cos^2\theta \quad ②$$

multiplicera ① m. $\cos\theta$ och ② m. $\sin\theta$
sen addera

vi får :

$$\ddot{\theta}(l\cos^2\theta + l\sin^2\theta) = -g\sin\theta$$

dvs :

$$\underbrace{\ddot{\theta}}_{\text{dim löst}} = -\frac{\overset{ms^{-2}}{g}}{\underset{m}{l}}\sin\theta$$

PENDELNS EKVATION

Differentialekvationer. — klassificering

Hej!

numeriska metoder för att bestämma approximativa lösningar.

existens och entydighet för lösningar

metoder för att bestämma explicita lösningar.] går ej alltid.

dvs bestäm y som fkt av x.

En n:te ordningens diffekv:

är $f(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$

där f är def. i ett område $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$

☆ $y^{(n)} = g(x, y, y' \dots y^{(n-1)})$

att lösa diffekv på ett intervall I är att bestämma en fkt som är n ggr deriverbar och som satisfierar ☆ för $x \in I$.

☆ kallas linjär diff. ekv om

$$g(x, y, y' \dots y^{(n-1)}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y^k + b(x)$$

vidare kallas ☆ homogen om $b = 0$
annars inhomogen.

☆ kallas n:te ordningens linjär diff. ekv. med konstanta koefficienter om $g(x) = a_k$ där a_k konstanter

$k = 0, 1 \dots (n-1)$

En första ordnings diff.ekv:

1. $y' = f(x)$ $\quad$ f känd, kont. fkt

$y = F(x) + C$ $\quad$ där $F(x)$ är primitiv fkt till $f(x)$

2. $*\underline{\underline{y'}} + \underline{g(x)}\,\underline{y} = \underline{f(x)}$ $\quad$ f, g kända, kont fkt.

1a ordnings linjär diff. ekv.

metod: integrerande faktor $\boxed{e^{G(x)}}$

välj en primitiv fkt $G(x)$ till $g(x)$

multiplicera $*$ med $e^{G(x)}$ $\quad$ obs: $\underline{\underline{e^{G(x)} > 0}}$

$$\underbrace{e^{G(x)}\cdot y'(x) + \underbrace{e^{G(x)}g(x)}_{\frac{d}{dx}e^{G(x)}\ \text{jue!}}y(x)}_{\frac{d}{dx}\left(e^{G(x)}\cdot y(x)\right)} = e^{G(x)}f(x)$$

ALLTSÅ:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{G(x)}\cdot y(x)\right) = e^{G(x)}f(x)$$

vi får

$$e^{G(x)}y(x) = \int e^{G(x)}f(x)\,dx + C$$

$$y(x) = e^{-G(x)}\int e^{G(x)}f(x)\,dx + Ce^{-G(x)}$$

$$\boxed{\text{obs: } \quad e^{-G(x)}\int e^{G(x)}f(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx}$$

ex. $\underline{xy'} - \underline{\underline{2y}} = \underline{x^{-}\cos x} \qquad x > 0$

vi har:

$$* \quad y' + \left(-\frac{2}{x}y\right) = x^2 \cos x \qquad x > 0$$

detta är en diff. ekv. av typ 2. där

$$g(x) = -\frac{2}{x}, \quad f(x) = x^2 \cos x$$

beräkna en integrerande faktor

$$G(x) = \int \left(-\frac{2}{x}\right) dx = -2\ln|x| \; \underbrace{+\; C}$$

behöver ej nu då
en primitiv

$$= \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad x > 0$$

multiplicera * med $e^{G(x)} = e^{\ln(\frac{1}{x^2})} = \boxed{\frac{1}{x^2}}$

vi får:

$$\underbrace{\frac{1}{x^2}y'(x) - \frac{2}{x^3}y(x)}_{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y(x)\right)} = \cos x$$

alltså:

$$\frac{1}{x^2}y(x) = \int \cos x \, dx + C = \sin x + C$$

dvs.

$$\boxed{y(x) = x^2(\sin x + C) \qquad x > 0}$$

C godtycklig
konstant.

Om $x < 0$ precis samma.

använda derivatan's def... → nåt

3. $\underline{g(y)}\,\underline{y'} = \underline{f(x)}$

(separabla diff. ekv)

f, g kända, kont fkt.

g har konstant tecken dvs $g > 0$ eller $g < 0$ alla x

välj en primitiv fkt $G(y)$ till $g(y)$

— " —— $F(x)$ till $f(x)$

sätt

$$\boxed{G(y(x)) = F(x) + C}$$

C godtycklig konstant

vi får

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

$\boxed{\text{obs:}}$ G strängt väx/avt. då g har konstant tecken.

ex.

$$y' = -e^x y^2$$

$\boxed{\text{för } y \neq 0}$ dividera m. y^2

vill ha x på en sida, y' y etc. på andra

$$\underbrace{-\frac{1}{y^2}y'}_{g(y)} = \underbrace{e^x}_{f(x)}$$

bestäm $G(y) = \frac{1}{y}$, $F(x) = e^x$

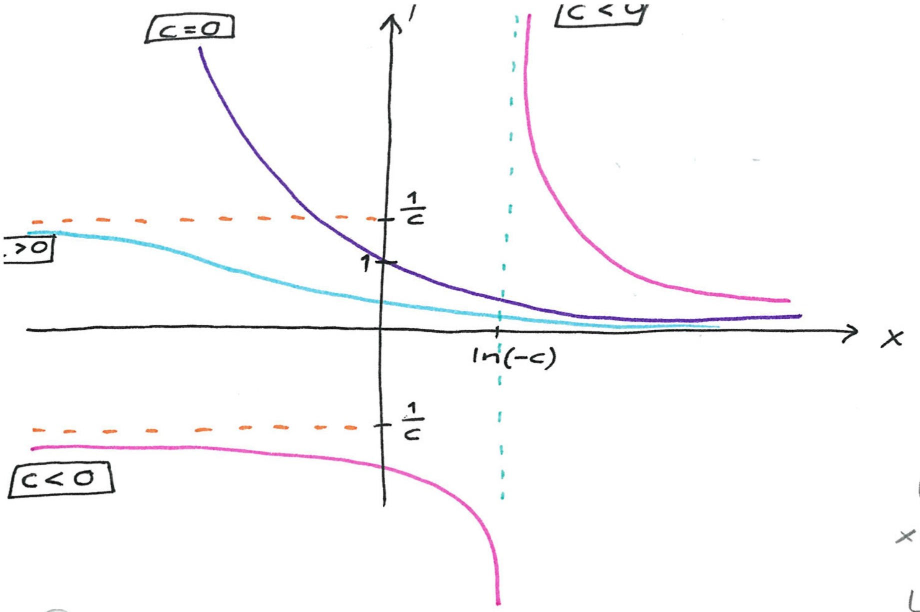
detta ger:

$$G(y)\left[\ \frac{1}{y(x)} = \underbrace{e^x}_{F(x)} + C\right.$$

dvs $y(x) = \dfrac{1}{e^x + C}$ C godtycklig konstant

vi noterar:

$y = 0$ dvs $y(x) \underbrace{= 0}_{\text{alla } x}$, är en lösning.



exakt en lösning i olika delar med de olika.

$c=0 \quad y(x) = e^{-x} \quad x \in \mathbb{R}$

$c>0 \quad y(x) = \frac{1}{e^x + C}$

mot ∞ $y(x) \to 0$

$-\infty$ $y(x) \to \frac{1}{c}$

$x \in \mathbb{R}$

$c<0 \quad y(x) = \frac{1}{e^x + C}$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln(\underbrace{-c}_{>0})$

$\lim_{x \to \ln(-c)^+} y(x) = +\infty$ asymptot

$\lim_{x \to \ln(-c)^-} y(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \frac{1}{c}$

OVNINGAR.

8.1 allmänn lösning
+ den med begynnelse $y(0) = 1$

$$y' = x^2 - e^{-x}$$

$$y = \int (x^2 - e^{-x})\,dx = \boxed{\frac{x^3}{3} + e^{-x} + C}$$

$$1 = 0 + e^0 + C \qquad C = 0$$

alltså $\boxed{y = \frac{x^3}{3} + e^{-x}}$

8.2

a) $xy' = \ln x \qquad y(1) = 2$

tror vi vill ha "bort" x

$$y' = \frac{\ln x}{x}$$

$$y = \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \boxed{\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C}$$

$$2 = \frac{1}{2}\underbrace{(\ln 1)^2}_{0} + C$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2}$$

$$2 = C$$

b) $y'' = 4e^{2x} + x^2 \qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = 1$

$$y' = \int (4e^{2x} + x^2)\,dx = 2e^{2x} + \frac{x^3}{3} + C$$

$$y' = 2e^{2x} + \frac{x^3}{3} + C$$

$$1 = 2 \cdot 1 + 0 + C \qquad \boxed{C = -1}$$

$$y' = 2e^{2x} + \frac{x^3}{3} - 1$$

$$y = \int (2e^{2x} + \frac{x^3}{3} - 1)\,dx = e^{2x} + \frac{x^4}{12} - x + C$$

$$2 = 1 + 0 + 0 + C$$

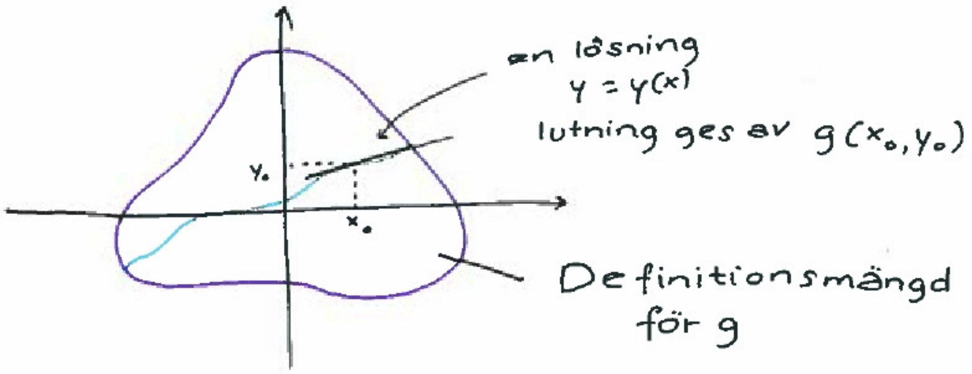
$$C = 1$$

alltså

$$\boxed{y = e^{2x} + \frac{x^4}{12} - x + 1}$$

1a ordn. differentialekvationer

$y' = g(x,y)$



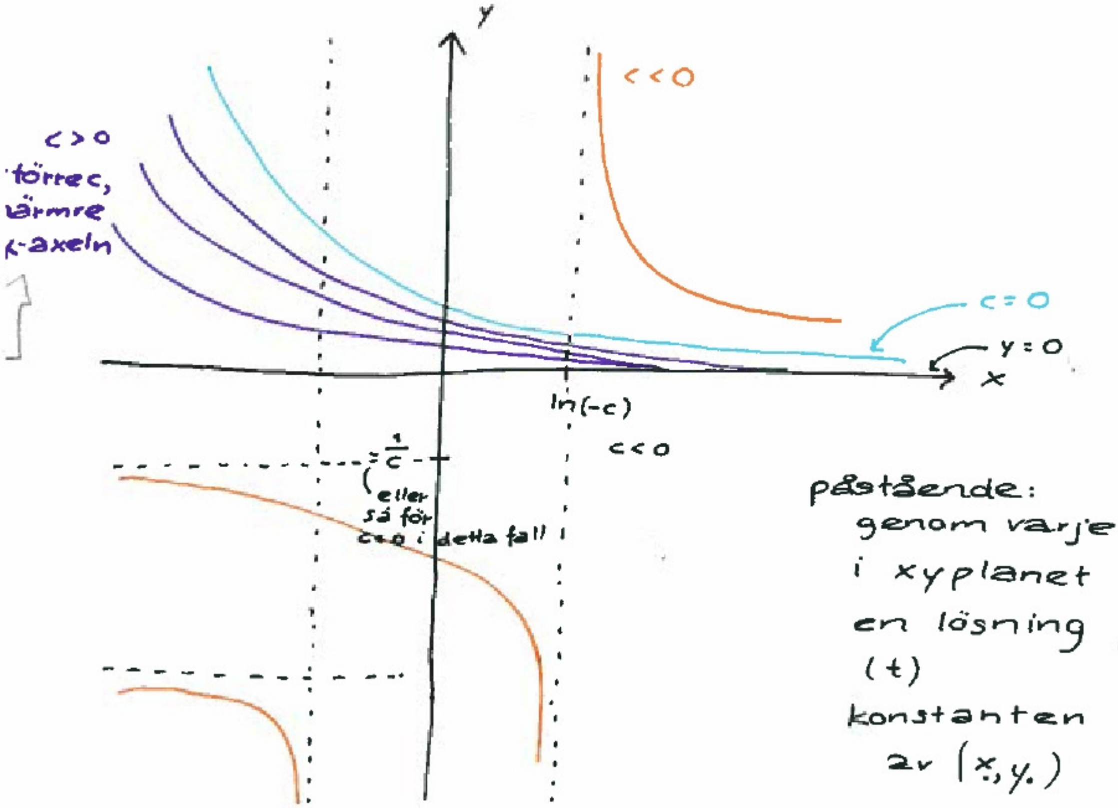
g ger ett riktningsfält

ex. $y' = -e^x y^2$

här är $g(x,y) = -e^x y^2$

vi har att

$$\begin{cases} y = 0 \quad y(x) = 0 \quad \text{alla } x \in \mathbb{R} \\ y(x) = \dfrac{1}{e^x + C} \end{cases}$$



påstående:
genom varje pkt (x_0,y_0)
i xyplanet går exakt
en lösning på formen
(+)
konstanten C bestäms
av (x_0,y_0)

$\boxed{\text{om } y_0 \neq 0}$

$$y_0 = \frac{1}{e^{x_0} + C} \qquad \text{dvs } C = -e^{x_0} + \frac{1}{y_0}$$

$\boxed{\text{om } y_0 = 0}$

lösningen $y = 0$ alltså x-axeln.

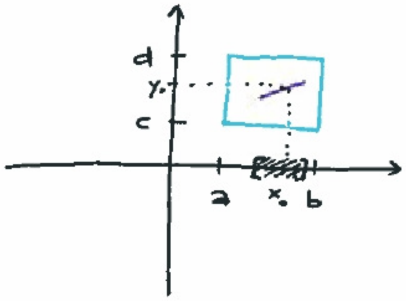
Existens/entydighetssats: (Picard)

givet reellvärd fkt $g(x,y)$ som är: kontinuerlig i en axelparallell rektangel $K = [a,b] \times [c,d]$,

Lipschitzkontinuerlig m.a.p variablen y i K

dvs. det finns $M \in \mathbb{R}$ sådant att

$$|g(x,y_1) - g(x,y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \quad \text{eller} \quad (x,y_1),(x,y_2) \in K$$



sats säger: finns interval så finns exakt 1 lösnin

då gäller att

$y' = g(x,y)$ har en entydigt bestämd lösning som går genom (x_0, y_0)

där lösningen existerar i en omgivn. av $x = x_0$, speciellt lösningen existerar för $x \in [\underbrace{x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon}_{\text{omgivning}}] \cap [a,b]$

där $0 < \varepsilon = \varepsilon(M,K) \leftarrow$ beror endast på

dessutom om $K = [a,b] \times \mathbb{R}$ så existerar lösningen för $x \in [a,b]$

ex.

$$g(x,y) = -e^x y^2$$

$$K = [-L, L] \times [-L, L]$$

för $(x, y_1)(x, y_2) \in K$ gäller

$$|g(x,y_1) - g(x,y_2)| = |-e^x y_1^2 - (-e^x y_2^2)|$$

$$= e^x |y_1^2 - y_2^2| = \underbrace{e^x}_{\leq e^L} \underbrace{|y_1 + y_2|}_{\leq 2L} |y_1 - y_2| \leq e^L 2L |y_1 - y$$

då y värden skall vara mellan $(-L, L)$

med "extremerna" L

$g(x,y)$ är Lipschitz kont. m.a.p y i K med Lipschitzkonstanten $M = e^L 2L$

ex.

$$y' = 3y^{2/3}$$

ifall $y = 0$ båda sidor noll en lösning

$$y' \cdot \frac{1}{y^{2/3}} = 3 \longrightarrow$$

alltså: finn $G(y) = 3\int \frac{1}{y^{2/3}}$

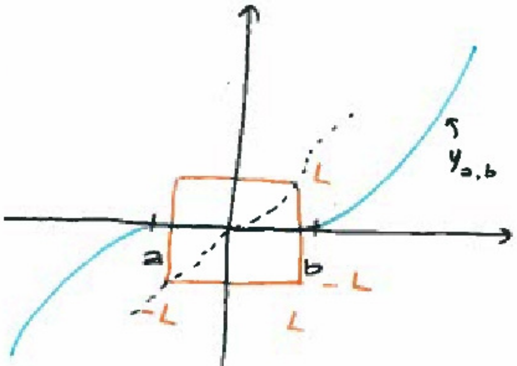
$= y^{1/3}$

har lösningar

$a < 0 < b$

varför minus

$$y_{a,b}(x) = \begin{cases} (x-b)^3 & b < x \\ 0 & a \leq x \leq b \\ (x-a)^3 & x < a \end{cases}$$



gotta check: vänsterderivatan = höger —"—

$y = 0$ är också en lösning

tänk $(b-b+h)^3$

då rot $b-b$ $= 0$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{y_{a,b}(b+h) - y_{a,b}(b)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} h^3 = \lim_{h \to 0^+} h^2 = 0 = \lim_{h \to 0^-} \frac{y_{a,b}(b+h) - y_{a,b}(b)}{h}$$

ALLTSå: y deriverbar med derivata 0 i $\boxed{x = b}$

$g(x,y) = 3y^{1/3}$

betrakta

vad sker

$$|g(y)-g(a)| = 3|y|^{2/3} = \frac{3}{|y^{1/3}|}|y-0|$$

detta kört då $y \to 0$ $\longrightarrow \infty$

alltså

g är eJ Lipschitz kont. m.a.p y i $K = [-L,L] \times [-L,L]$ för något $L > 0$

BEVISIDÉ för Picardsatsen:

problem: $\begin{cases} y' = g(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

skriv om som

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \overbrace{g(t, y(t))}^{\text{krävs att detta kont.}}\, dt$$

vår integrationsvariabel

sätt

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, y_0(t))\, dt$$

bättre approximation?

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, y_1(t))\, dt$$

fortsätt rekursivt

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, y_n(t))\, dt$$

förhoppning:

"$y_n \longrightarrow z$" $n \longrightarrow \infty$

i någon mening

nåt med likformig konvergens

y_n kommer vara kont. fkt

$z(x_0) = y_0$

YUP.

$$\underbrace{y_{n+1}(x)}_{\text{mot}} = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, y_n(t))\, dt$$

även deriverbar fkt.

mot $g(t, z(t))$

z en lösning!

LINJARA DIFF. EKV. AV ORDNING n.

$$\boxed{L[y]} = y^n + a_{n-1} x\, y^{(n-1)} + \dots\dots + a_1 x\, y' + a_0 x\, y = h(x)$$

$D = \frac{d}{dx}$ deriveringsoperatorn

$D[y] = y'$

$D^2[y] = DD[y] = D[D[y]] = y''$

$D^k[y] = y^k$

L ovan är en linjär operator

dvs. $L[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2]$

där C_1, C_2 konstanter och

y_1, y_2 n ggr deriverbara fkt.

$$L[C_1 y_1 + C_2 y_2] = \boxed{D^n[C_1 y_1 + C_2 y_2]} + a_{n-1} D^{n-1}[C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$+ \dots\dots + a_1 D[C_1 y_1 + C_2 y_2] + a_0 (C_1 y_1 + C_2 y_2)$$

samma jue!

$$= \boxed{C_1 D^n[y_1] + C_2 D^n[y_2]} + \dots\dots + a_1 (C_1 D[y_1] + C_2 D[y_2$$

osv.
typ a_0

$$= C_1 \left(D^n[y_1] + \dots\dots + a_0 y_1\right) + C_2 \left(D^n[y_2] + \dots\dots a_0 y_2\right)$$

$$= C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2]$$ ⇐ V.S.V.

vi ser att om

$$L[y_1] = 0,\; L[y_2] = 0 \Rightarrow L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = 0$$

0-funktionen

superpositionsprincipen.

SATS:

antag att y_P uppfyller $L[y_P] = f$

då gäller

$L[y] = f$ omm $L[y - y_P] = 0$

Bevis:

y_P given fix funktion

$$L[y - y_P] \underset{\text{ty } L \text{ linjär}}{=} L[y] - L[y_P]$$

$L[y - y_P] = 0$ omm $L[y] = f$

Lösa $L[y] = h$ Diff. ekv. ☺

fast f då, haha

steg ① bestäm en lösning y_P till $L[y] = f$

steg ② bestäm alla lösningar y_h till $L[y] = 0$

steg ③ sätt $y = y_P + y_h$

här är y den allmänna lösningen till $L[y] = f$

liknar Gilbert!

då kallas

y_P partikulärlösning

y_h allmän $\underbrace{\text{homogen}}_{\text{för HL är noll}}$lösning

LINJARA DIFF. EKV. MED KONSTANTA KOEFFICIENTER.

$$L[y] = y^{n} + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 y' + a_0 y$$

där $a_0, a_1 \ldots\ldots\ldots a_{n-1}$ konstanter.

OBS. $$(D+a)(D+b)[y] = (D+a)\underbrace{\big[\underbrace{(D+b)[y]}_{y'+by}\big]}_{y''+\underbrace{by'+ay'}_{(a+b)y'}+aby}$$

a, b konstanter

$$= \big(D^2 + (a+b)D + ab\big)[y]$$

$Q_1(D)$, $Q_2(D)$ linjära diff. operatorer m. konstanta koefficienter så

$$Q_1(D)Q_2(D) = (Q_1Q_2)(D)$$

$c \in \mathbb{C}$ $\qquad c = \alpha + i\beta \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$e^{cx} = e^{Re(cx)+Im(cx)} = e^{\alpha x + i\beta x}$$

$$= e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\big)$$

det gäller LINJÄRT !!!

$$\frac{d}{dx}\left(e^{cx}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}\cdot\cos(\beta x)\right) + i\frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}\cdot\sin(\beta x)\right)$$

$$= \alpha e^{\alpha x}\cdot\big(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\big)$$

$$+\Big(\underbrace{\big(\underset{\overset{\Uparrow}{i^2}}{-}\beta e^{\alpha x}\sin\beta x\big) + i\beta e^{\alpha x}}_{= i\beta e^{\alpha x}(i\sin\beta x + \cos\beta x)}\cdot\cos\beta x\Big)$$

$$= (\alpha + i\beta)e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = ce^{cx}$$

WOHOOO

BESTÄM y_h för $L[y] = 0$

$$\frac{d}{dx}e^{cx} = ce^{cx} \quad c \in \mathbb{C}$$

Förskjutningssatsen:

L som ovan (alltså $L[y] = y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots\dots$)

⇨ sätt $P(D) = L$

polynom av D

$$P(D)[e^{cx}\cdot z(x)] = e^{cx}\cdot P(D+c)[z(x)]$$

för varje n gånger deriverbar fkt.

Bevis.

$$D[e^{cx}\cdot z(x)] = e^{cx}z'(x) + ce^{cx}\cdot z(x)$$

$$= e^{cx}(z'(x) + cz(x)) = e^{cx}(D+c)[z(x)]$$ JUE!!

$$D^2[e^{cx}\cdot z(x)] = D[D[e^{cx}\cdot z(x)]]$$

$$= D[e^{cx}\cdot(D+c)[z(x)]] = e^{cx}(D+c)[D+c[z(x)]]$$

$$= e^{cx}(D+c)^2[z(x)]$$

På Samma Sätt:

$$D^k[e^{cx}z(x)] = \boxed{e^{cx}(D+c)^k[z(x)]} \quad k = 2, 3, \dots\dots n$$

$$P(D)[e^{cx}z(x)] = D^n[e^{cx}\cdot z(x)] + a_{n-1}D^{n-1}[e^{cx}\cdot z(x)] + \dots\dots a_1D[e^{cx}\cdot z(x)] + a_0e^{cx}z(x)$$

$$= e^{cx}(D+c)^n[z(x)] + \dots\dots + a_1e^{cx}(D+c)[z(x)] + a_0e^{cx}z(x)$$

$$= \boxed{e^{cx}P(D+c)[z(x)]}$$ Beautiful!!

definera

$$P(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots\dots + a_1 r + a_0$$

kallas karaktäristiska polynomet till $P(D)$

$P(r) = 0$ karaktäristiska ekvationen till $P(D)$

ALGEBRANS FUNDAMENTALSATS OCH FAKTORSATSEN GER:

$$P(r) = (r-r_1)^{m_1}(r-r_2)^{m_2}\dots\dots(r-r_k)^{m_k}$$

där $r_1, r_2 \dots\dots r_k$ är de distinkta nollställena till $P(r)$ med multipliciteterna $m_1, m_2 \dots\dots m_k$

här $m_1 + m_2 + \dots\dots m_k = n$

vi har

$$P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots\dots a_1 D + a_0$$

$$= (D-r_1)^{m_1}\dots\dots(D-r_k)^{m_k}$$

OBS. fixera $j \in \{1, 2 \dots\dots k\}$

låt $p_j(x)$ vara ett polynom av grad högst $m_j - 1$

$$P(D)\left[e^{r_j x}p_j(x)\right] = \left\{P(D) = Q_j(D)(D-r_j)^{m_j}\right\}$$

$$= Q_j(D)\left[\overset{\triangle}{(}D-r_j)^{mj}\left[e^{r_j x}\underbrace{p_j(x)}_{\text{har ju grad högst } m_j - 1}\right]\right]$$

$$\underbrace{= Q_j(D)\left[e^{rjx}\underbrace{(D-r_j+r_j)}_{=D^{mj}}{}^{mj}\left[p_j(x)\right]\right]}_{=0} \quad \text{blir ju noll kinda} \quad = 0$$

alltså

$$y_h(x) = e^{r_1 x} P_1(x) + \dots + e^{r_k x} P_k(x)$$

där $P_j(x)$ polynom av grad högst $m_j - 1$

är en lösning till $\quad j = 1, 2 \dots k$

$$P(D)[y] = 0$$

Påstående:

finns inga andra lösningar till $P(D)[y] = 0$

kan visa med induktion serru.

ÖVNINGAR:

8. c.

$$y' + y \cot x = \tan^2 x \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

lösning 1a ordn. då ej högre än y',

$$y' + g(x) y = f(x)$$

den är linjär

metod. integrerande faktor

finn $e^{G(x)}$, multiplicera med.

$$g(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$G(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| \overbrace{+ C}^{\text{men kan välja}}$$

$C = 0$ behöver endast 1.

$$= \ln(\sin x) \text{ då } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

multiplicera med

$$e^{\ln(\sin x)} = \sin x$$

$$\underbrace{\sin x \cdot y' + y \cdot \cos x}_{\frac{d}{dx}\left(\sin x \cdot y(x)\right)} = \tan^2 x \cdot \sin x$$

alltså $\quad \sin x \cdot y(x) = \int \tan^2 x \cdot \sin x \, dx$

$$= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \sin x \; dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \sin x \; dx$$

$$\begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{bmatrix} = -\int \frac{1-t^2}{t^2} \, dt = \int \left(1-\frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$$

godtycklig konstant

vi får

$$y(x) = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{C}{\sin x}$$

alltså

$$\boxed{y(x) = \cot x + \frac{2}{\sin 2x} + \frac{C}{\sin x}}$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$

9.b. lös

$$\begin{cases} (1-x^2)y' + xy = x \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$|x| < 1$

linjär diff. ekv.

lösning

$$y' + \frac{x}{(1-x^2)} y = \frac{x}{(1-x^2)}$$

integrerande faktor

$$\int \frac{x}{(1-x^2)} \, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{(1-x^2)} \; \text{dvs} = -\frac{1}{2} \ln |1-x^2|$$

$$= -\frac{1}{2} \ln (1-x^2) \quad \text{om} \quad |x| < 1$$

$$= \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

medtag 220 kr.

LINJÄRA DIFF. EKV. AV ORDNING n M. KONSTANTA KOEFFICIENTER

$P(D)[y] = y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y =$

$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)[y]$

där $a_0, a_1 \dots a_{n-1}$ konstanter.

sökes: allmänna lösningen till $P(D)[y] = 0$

dvs $y_h(x)$

OBS

$P(D)[e^{cx} \cdot z(x)] = e^{cx} P(D+c)[z(x)]$

gäller för alla $c \in \mathbb{C}$ och alla

n gånger deriverbara fkt'er $z(x)$

(Förskjutningsregeln)

$\underbrace{P(r)}$ $= 0$ kallas karaktäristiska ekv. för $P(D)$

$= r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$] denna har exakt n st. rötter räknat med multiplicitet.

rötterna $r_1, r_2 \dots r_n$ $(r_1 \neq r_j$ för $i \neq j)$

motsvarande multipliciteter $m_1, m_2 \dots m_k$

$m_1 + m_2 + \dots + m_k = m$

$P(r) = (r - r_1)^{m_1} \dots (r - r_k)^{m_k}$

det gäller

$P(D) = (D - r_1)^{m_1} \dots (D - r_k)^{m_k}$

OBS.
P(D) har konstanta koefficienter

Vi såg förra gången att

$P(D)[e^{r_1 x} p_1(x) + \dots e^{r_k x} p_k(x)] = 0$ då $p_j(x)$ polynom av grad högst $m_j - 1$ för $j = 1, 2 \dots k$

$$= \frac{1}{2}e^{x}\int_0^x \frac{e^{-t}}{e^t+1}\,dt - \frac{1}{2}e^{-x}\int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}\,dt$$

beräkna integralen hemma!

hihi.
exAMPLE

löś $y'' - 2xy' + (x^2-1)y = x$

lösning:

försök faktorisera $P(D) = D^2 - 2xD + (x^2-1)$

$$P(D) = (D - r_1(x))(D - r_2(x))$$

$$P(D)[z(x)] = (D - r_1(x))\Big[\underbrace{(D - r_2(x))[z(x)]}_{z'(x) - r_2(x)z(x)}\Big]$$

$$= z''(x) - r_2'(x)z(x) - r_2(x)z'(x) - r_1(x)z'(x) + r_1(x)r_2(x)z(x)$$

$$= z''(x) - (r_1(x) + r_2(x))z'(x) + (r_1(x)r_2(x) - r_2'(x))z(x)$$

dvs

$$D^2 - (r_1(x) + r_2(x))D + (r_1(x)r_2(x) - r_2'(x))$$

vill välja $r_1(x)$, $r_2(x)$ så att

$r_1(x) + r_2(x) = 2x$

$r_1(x) \cdot r_2(x) - r_2'(x) = x^2 - 1$ icke linjärt

kan ta

VÄRSTA

$r_1(x) = r_2(x) = x$

vi har

$(D-x)(D-x)[y] = x$

sätt $u(x) = (D-x)[y]$

gäller att

$(D-x)[u] = x$

$u'(x) - xu(x) = x$

lös m. integrerande faktor

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad D\left[e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot u(x)\right] = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot ux = \int x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \boxed{-e^{-\frac{x^2}{2}}}\boxed{+C}$$

$$u(x) = \boxed{-1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}}$$

detta ger:

$$(D-x)[y] = -1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y'(x) - xy(x) = -1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

integrerande faktor, igen: $e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot y(x)\right) = e^{-\frac{x^2}{2}} + C$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot y(x) = -\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \underline{\underline{C}}x + \underline{\underline{D}}$$ konstanter.

$$y(x) = -e^{\frac{x^2}{2}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx + (Cx + D)e^{\frac{x^2}{2}}$$

VARIABELBYTE I DIFF. EKV.

oberoende variabeln

example. Euler's diff. ekv

☆ $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0 \qquad x > 0$

variabelbyte $x = e^t \quad t = \ln x$

betrakta $y(x) = \tilde{y}(t(x))$

$$D[y(x)] = \tilde{y}'(t(x) \cdot t'(x) = \tilde{y}' \cdot \frac{1}{x}$$

$$D^2[y(x)] = \tilde{y}'' \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \tilde{y}'\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \boxed{\frac{1}{x^2}\left(\tilde{y}'' - \tilde{y}'\right)}$$

betrakta $y(x) = \tilde{y}(t(x))$

insättning i ☆

$$\tilde{y}'' - \tilde{y}' - 4\tilde{y}' + 6\tilde{y} = 0$$

det ger

$$\tilde{y}(t) = Ae^{2t} + Be^{3t}$$

$$y(t) = \tilde{y}(\ln x)$$

$$\boxed{= Ax^2 + Bx^3}$$

JOKES: allmänna lösningen till $P(D)[y] = f(x)$ eller $h(x)$ då.

$y = y_p + y_h$

där y_h allmänna homogenlösningen till $P(D)[y] = 0$

y_p EN lösning till $P(D)[y] = f(x)$ eller $h(x)$

$P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D +$

$y_p(x)$ bestäms genom lämpliga ansättningar

$f(x)$	ansättning av $y_p(x)$
$p(x)$ polynom	$q(x)\cdot x^m$ där grad p = grad q och m minsta heltal så att $a_m \neq 0$
$p(x)\cdot e^{ax}$ $p(x)$ polynom	$e^{ax}\cdot z(x)$
$p(x)\cdot e^{ax}\cdot \begin{cases}\cos(bx)\\ \sin(bx)\end{cases}$	studerar en hjälpekvation $P(D)[u(x)] = \underbrace{e^{(a+ib)x}}_{e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)}\cdot p(x)$ om $P(D)$, $p(x)$ har reella koeff. så $P(D)[\operatorname{Re} u(x)] = e^{ax}\cos(bx)\cdot q x$ $P(D)[\operatorname{Im} u(x)] = e^{ax}\sin(bx)\cdot q$
$f_1(x) + f_2(x)$	$P(D)[y_1] = f_1(x)$ $P(D)[y_2] = f_2(x)$ $P(D)[y_1 + y_2] = f_1(x) + f_2(x)$ ty linjäritet.

allmänt

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} K(x-t) f(t)\, dt$$ ☆

där $P(D)[k] = 0$ och $K(0) = K'(0) = \ldots$

$K^{(n-2)}(0) = 0\,,\ K^{n-1}(0) = 1$

det gäller $y_p(x)$ i ☆ uppfyller

$y_p(x_0) = y_p'(x_0) = \ldots\ldots = y_p^{n-1}(x_0) = 0$

exempel.

$$\begin{cases} y'' - y = \dfrac{1}{e^x + 1} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$ ☆

lösning

$P(r) = r^2 - 1 = 0 \qquad r_{1,2} = \pm 1$

$y_h(x) = Ae^x + Be^{-x}$

bestäm $K(t)$ vi har

$K(t) = Ae^t + Be^{-t} \qquad k(0) = 0 \quad k'(0) = 1$

$$\begin{cases} 0 = k(0) = A + B \\ 1 = K'(0) = A - B \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad 2A = 1 \quad A = \frac{1}{2}$$

$B = -\frac{1}{2}$

den sökta lösningen till ☆ ges av

$$\int_0^x K(x-t)\underbrace{f(t)}_{\frac{1}{e^t+1}}\, dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2}e^{x-t} - \frac{1}{2}e^{-(x-t)}\right)\frac{1}{e^t+1}\, dt$$

SATS:

med beteckningar enligt ovan gäller att varje $y(x)$ som löser $P(D)[y] = 0$ kan skrivas på formen $y(x) = e^{r_1 x} p_1(x) + \dots + e^{r_k x} p_k($

Bevis:

induktionsbevis över k

påstående $I(k)$: det gäller att för varje differentialoperator som är linjär och har konstanta koefficienter och med karaktäristisk polynom med högst k st. olika nollställen så ska den allmänna homogenlösning kunna skrivas på formen

(basen)

visa $I(1)$

antag att $P(D) = (D-r)^n$ och att $P(D)[y] = 0$

ska visa: $y(x) = e^{rx} \cdot p(x)$ där $p(x)$ polynom av grad högst $n-1$

vi har

$$0 = e^{-rx} P(D)[y] = e^{-rx} (D-r)^n [y] = D^n [e^{-rx} y(x)]$$

integrera n gånger

SOM BAKLÄNGES... TYP.

vi får

$$e^{-rx} \cdot y(x) = p(x)$$

polynom av grad högst $n-1$

alltså:

$$y(x) = e^{rx} p(x)$$

induktionssteget:

antag att $I(k-1)$ gäller.

visa att $I(k)$ gäller (dvs. visa $I(k-1) \Longrightarrow I(k)$ gäller)

antag att $P(D) = (D-r_1)^{m_1} (D-r_2)^{m_2} \dots (D-r_k)^{m_k}$

och antag att $P(D)[y] = 0$

sätt $z(x) = (D - r_k)^{m_k}[y(x)]$

alltså $(D - r_1)^{m_1} \cdots\cdots (D - r_{k-1})^{m_{k-1}}[z] = 0$

induktionsantagandet, dvs $I(k-1)$ sant, ger att

$$z(x) = e^{r_1 x} \cdot q_1(x) + \cdots\cdots + e^{r_{k-1}x} q_{k-1}(x)$$

där $q_j(x)$ polynom av grad högst $m_j - 1$

vi har:

$$(D - r_k)^{m_k}[y] = e^{r_1 x} q_1(x) + \cdots\cdots + e^{r_{k-1}x} q_{k-1}(x)$$

multiplicera med $e^{-r_k x}$

$$D^{m_k}[e^{-r_k x} y(x)] = e^{-r_k x}(D - r_k)^{m_k}[y(x)]$$

$$= e^{\boxed{(r_1 - r_k)}^{\neq 0} x} \cdot q_1(x) + \cdots + e^{\boxed{(r_{k-1} - r_k)}^{\neq 0} x} q_{k-1}(x) \quad \star$$

för $c \neq 0$ och $q(x)$ polynom gäller

$$\int e^{cx} \cdot q(x)\,dx = \frac{1}{c} e^{cx} \cdot q(x) - \int \frac{1}{c} e^{cx} q'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{c} e^{cx} \cdot q(x) - \frac{1}{c^2} e^{cx} q'(x) + \int \frac{1}{c^2} e^{cx} q''(x)\,dx$$

$$= e^{cx} \cdot \tilde{q}(x) + C$$ där $\tilde{q}(x)$ polynom med grad q = grad $\tilde{q}$

för C godtycklig konstant.

vi får efter m_k integrationer av $\star$

$$e^{-r_k x} y(x) = e^{(r_1 - r_k)x} \cdot p_1(x) + \cdots\cdots e^{(r_{k-1} - r_k)} p_{k-1}(x) + \boxed{p_k(x)}$$

där $p_j(x)$ polynom av grad högst $m_j - 1$

SLUTSATS: $I(k)$ gäller.

ind. axiomet ger att $I(k)$ sant för $k = 1, 2 \ldots$ dvs $n \in \mathbb{N}$

DIFF. EKV.

variabelsubstitution

- oberoende variabel x

ex. Euler's diff. ekv.

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

$x > 0$

metod:

byt variabel x mot t

$x = e^t$ dvs $t = \ln x$

- beroende variabel

ex. Bermoullis diff. ekv.

$y' + g(x)y = f(x) \cdot y^p$ $p \neq 0, 1$ f, g kända

för $y \neq 0$ (om $p > 0$ så är $y = 0$ en lösning)

$$\frac{1}{y^p} y' + g(x) y^{1-p} = f(x)$$

sätt $z = y^{1-p}$ derivera $z' = (1-p)\underbrace{y^{-p} \cdot y'}_{\text{har vi ju!!}}$

vi får

$$\frac{1}{\boxed{1-p}} z' + g(x) z = f(x)$$

nu har vi en 1a ordn, linjär diff. ekv.

metod: integrerande faktor.

ex: (typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$)

$y' = \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ icke-linjär ju

sätt $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ derivera $y' = xz' + z$

flytta om innan!

insättning ger:

$$\underbrace{xz' + z = \sin(z)}_{\text{plötsligt linjär}}$$

en separabel jue

$$xz' = \sin(z) - z$$

$$\frac{z'}{\sin z - z} = \frac{1}{x}$$

REDUKTION AV ORDNING.

för linjära diff. ekv.

ex.

$$y'' - \cos x\, y' + \sin x\, y = 0$$

linjär, icke konstanta koefficienter

BONUS info:

$r(x) = e^{\sin x}$ är en lösning.

sätter in där $y^{(\prime\prime\prime)}$ är

koll $r'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$

$$r''(x) = \cos^2 x \cdot e^{\sin x} + \sin x\, e^{\sin x}$$

insättning ger:

$$\cos^2 x \cdot e^{\sin x} - \sin x \cdot e^{\sin x} - \cos x \cdot \cos x\, e^{\sin x}$$

$$+ \sin x \cdot e^{\sin x} = 0$$ YUP!!

ANSÄTTNING typ.

$y(x) = \underbrace{vx}_{\text{ena roten}} \cdot z(x)$ ok då vi har linjär

deriverar

$$y'(x) = r'(x)\, z(x) + r(x)\, z'(x)$$

$$y''(x) = r''(x)\, z(x) + r'(x)\, z'(x) + r'(x)\, z'(x)$$

$$+ r(x)\, z''(x)$$

$$= r'' z + 2r'z' + rz''$$

sätt in ! i ekv.

$$v''z + 2v'z' + vz'' - \cos x(v'z + vz') + \sin x\, vz = 0$$

samla z'na :

$$vz'' + (2v' - \cos x \cdot v)z' + \underbrace{(v'' - \cos x \cdot v' + \sin x \cdot v)}_{=0}z = 0$$

det är ju vår original ekv. men med roten v ☺ den var ju noll.

detta ger:

$$vz'' + (2v' - \cos x \cdot v)z' = 0$$

vi har fått en 1a ordn. linjär diff. ekv. i z'.

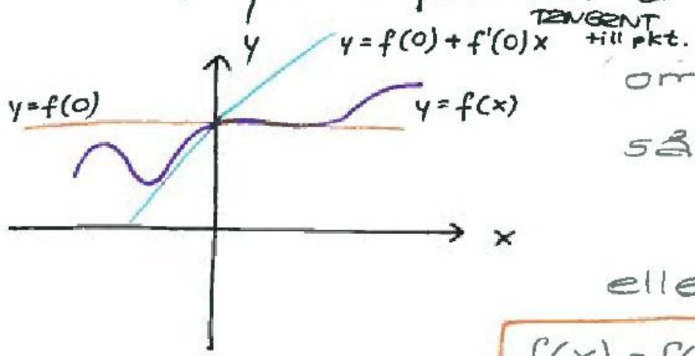
löses med integrerande faktor.

återstår att integrera z'.

LINJÄRITET

muchos viktos !!

Taylor's formel & Taylorutveckling.



om $\boxed{f \text{ är kont.}}$ i $x = 0$

så $f(x) \longrightarrow f(0)$

$x \longrightarrow 0$

eller alternativt uttryckt,

$\boxed{f(x) = f(0) + o(1)}$ då $x \longrightarrow 0$

Ordobegreppen.

① $h(x) = \overset{\text{STORA}}{O}((x-a)^n)$ då $x \longrightarrow a$

n heltal ≥ 0

$a \in \mathbb{R}$

$((x-a)^0 = 1)$

betyder att finns $\varepsilon > 0$ och ett $M > 0$ så att

$$\left|\frac{h(x)}{(x-a)^n}\right| \leq M$$

för alla $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$

② $h(x) = \overset{\text{LILLA}}{o}((x-a)^n)$ då $x \longrightarrow a$

betyder

$$\frac{h(x)}{(x-a)^n} \longrightarrow 0$$

då $x \longrightarrow a$

vi ser att

$$h(x) = o((x-a)^n) \qquad x \longrightarrow a$$

$\xRightarrow{\text{medför}}$ ej tvärtom.

$$h(x) = O((x-a)^n) \qquad x \longrightarrow a$$

om f är deriverbar i $x = 0$ så

$$\frac{f(0+x) - f(0)}{x} \longrightarrow f'(0) \qquad x \longrightarrow 0$$

dvs.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x^{(-0)}} = f'(0) + o(1) \qquad x \longrightarrow 0$$

dvs.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \underbrace{x \cdot o(1)}_{o(x)}$$

$$= \boxed{f(0) + f'(0)x + o(x)} \qquad x \longrightarrow 0$$

Vad kan sägas om f är ännu reguljärare funktion i $x = 0$?

SATS. (Maclaurins formel)

antag att $f^{(k)}$ är kont. funktion i en omgivning av $\boxed{x=0}$ för $k = 0, 1, 2 \dots \boxed{n+1}$

då gäller: (för x i en omgivn. av 0 att)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{2 \cdot 3}x^3 + \dots + \frac{f^{n}(0)}{n!}x + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{(n+1)}$$

en rest term!!

för något

$$0 \leq \theta \underbrace{(n, x)}_{\text{beror på dessa}} \leq 1$$

$$\text{vi har } f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{\text{Maclaurin polynomet av ordn. n till f, ofta betecknas } \boxed{P_n(x)}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{(n+1)}}_{\text{restterm på Lagranges form } \boxed{R_{n+1}(x)}}$$

$$= P_n(x) + R_{n+1}(x$$

Bevis:

Maclaurins form

f har n + 1 st. kont derivator

$$f(x) = f(0) + \int_0^x 1 \cdot f'(t)\,dt = [\text{p. i.}]$$

välјer fiffigt nog

$$= f(0) + \underbrace{\Big[(t - x) f'(t)\Big]_0^x}_{\text{vi tror denna sen}} - \int_0^x (t-x) f''(t)\,dt$$

välj KONSTANT

$$= f(0) + \underbrace{f'(0)x}_{\substack{\text{fiffigt elin!} \\ \text{(eller Peter 😁)}}} - \int_0^x (t-x) f''(t)\,dx$$

$$= f(0) + f'(0)x - \left[\frac{(t-x)^2}{2} f''(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)\,dt$$

$$= f(0) + f'(0)x - \frac{f''(0)x^2}{2} + \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)\,dt$$

$$= \ldots\ldots = f(0) \oplus f'(0)x \ominus \frac{f''(0)x^2}{2} \oplus \frac{f'''(0)}{3\cdot 2}x^3 \ominus \ldots\ldots$$

$$\oplus \frac{f^n(0)}{n!}x^n + (-1)\int_0^x \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

... PLUS MINUS PLUS MINUS PLUS MINUS PLUS MINUS PLUS ...

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}_{P_n(x)} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

återstår att visa

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$ för något $0 \le \theta \le 1$

antag $x > 0$:

sätt $M = \max_{t\in[0,x]} f^{(n+1)}(t)$, $m = \min_{t\in[0,x]} f^{(n+1)}(t)$

existerar ty kont f.
antar max & min.

för $t \in [0, x]$ gäller

$$m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$$

$$\frac{(x-t)^n}{n!} m \leq \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leq \frac{(x-t)^n}{n!} M$$

$+y > 0$

$x \geq t$

då $\dfrac{(x-t)^n}{n!} \geq 0$

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} m \, dt \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, dt \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} M \, dt$$

$x \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$\left[- \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} m \right]_0^x$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} m} \qquad \boxed{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} M}$$

för $x > 0$ gäller

$$m \leq \frac{1}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, dt \leq M$$

vidare,

$f^{(n+1)}$ kontinuerlig funktion på $[0, x]$

och av detta följer att det finns

$\xi \in [0, x]$ sådant att

$$f^{n+1}(\xi) = \frac{1}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{\text{JUST DENNA}} \, dt$$

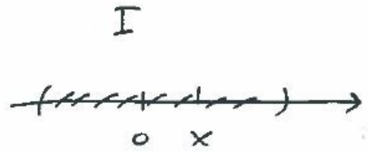
alltså

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

där $\xi = \theta x$ dvs $0 \leq \theta \leq 1$

fallet $x < 0$ analogt 

Maclaurins formel.



f def. på $I \ni 0$

$f^{(k)}$ kont fkt på I för $k = 0, 1, 2 \ldots n+1$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{n+1}(x)$$

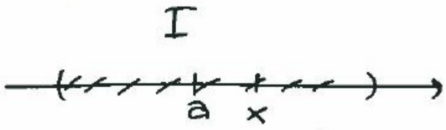
där $R_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$

för något $0 \le \theta = \theta(x,n) \le 1$

$$= \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}}_{\text{restterm på Lagrangeform}}$$

$P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ kallas Maclaurin polynomet av ordning n.

Taylors formel.



f def. på $I \ni a$

$f^{(k)}$ kont. på I, $k = 0, 1 \ldots n+1$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}\big(\overbrace{a + \theta(x-a)}^{(1-\theta)a + \theta x}\big)}{(n+1)!} (x-a)^{(n}$$

för ngt $0 \le \theta = \theta(x,n) \le 1$

hur visar man Taylors formel!

sätt $g(t) = f(a+t)$

Maclaurinutveckla $g(t)$

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \dots + \frac{g^{n}(0)\,t^{n}}{n!} + \frac{g^{n+1}(\theta t)}{(n+1)!}t^{(n+1)}$$

$$f(a+t) = f(a) + f'(a)\cdot t + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}t^{n} + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta t)}{(n+1)!}t^{(n+1)}$$

sätt

$x = a+t$, $t = x-a$

detta ger Taylors formel.

STANDARDUTVECKLINGAR:

tillämpa Maclaurins formel på $f(x) = e^{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^{\alpha}\dots$

① $f(x) = e^{x}$

$f'(x) = e^{x}$ $\quad f^{k}(x) = e^{x}$ $\quad k = 1, 2 \dots$

$f^{k}(0) = 1$ $\quad k = 1, 2 \dots$

insättning i Maclaurins

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{6} + \dots \frac{x^{n}}{n!} + \overbrace{\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{(n+1)}}^{\text{kan skrivas s}\ O(x^{n+1})}$$

för något $0 \le \theta \le 1$

② $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x \overset{\text{periodicitet.}}{=} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$

$f^{k}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad k = 1, 2 \dots$

$$f^{k}(0) = \begin{cases} 0 & k \text{ jämnt heltal.} \\ (-1)^{n} & k \text{ udda heltal} \quad k = 2n+1 \quad n \text{ heltal} \end{cases}$$

$$\sin x = f(x) = f(0) + f'(0) + \dots + \frac{f^{n}(0)}{n!}$$

$$f(x) = 0 + x + 0 - \frac{1}{3!}x^{3} + 0 + \frac{1}{5!}x^{5} - \dots\dots$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + 0$$

$$+ \frac{(-1)^{n}\cos(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

sin(x) är udda, de udda termerna kvar!!

$$= x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{(2n+1)})$$

där $0 \le \theta \le 1$

OBS:

allmänt, $f(x)$ udda fkt

$\Longrightarrow$ $f'(x)$ jämn fkt

eftersom

$f(x) = -f(-x)$ alla x då f udda

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(-f(-x)) = -f'(-x)\cdot -1$$

$$= \underline{\underline{f'(-x)}} \quad \text{alla } x$$

alltså $f'(x)$ jämn fkt.

$f(x)$ jämn fkt $\Longrightarrow$ $f'(x)$ udda fkt

allmänt:

$g(x)$ udda $\Longrightarrow$ $g(0) = -g(-0) = -g(0)$

dvs $g(0) = 0$

③ $f(x) = \cos x$

på motsvarande sätt fås

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos(\theta x)}{(2n+2)!} x^{2}$$

jämn så de jämna termerna.

$0 \leq \theta \leq 1$

jämför :

formell kalkyl

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 + ix \textcircled{-} \frac{x^2}{2} \textcircled{-} i \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)}_{\cos x} + i \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)}_{\sin x}$$

④ $f(x) = \ln(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad f'''(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3}$$

$$\dots f^k(x) = (-1)^{k+1} (k-1)! \frac{1}{(1+x)^k}$$

$$\ln(1+x) = f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \dots$$

$$+ \frac{f^n(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$= 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \dots + (-1)^{n+1}(n-1)! \cdot \frac{1}{n!} x^n$$

$$+ (-1)^{n+2} n! \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= x \ominus \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ominus \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+}}$$

för något

$0 \leq \theta \leq 1$

OBSERVATION:

$\ln(1+x) \leq x \qquad x > -1$

denna kan man se från utvecklingen

dvs. x minus nåt... typ.

$\ln(x) \leq x - 1 \qquad x > 0$

OBSERVATION:

geometrisk summa

- $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$

för detta är ju dess derivata.

- $$\underbrace{1 + (-t) + (-t)^2 + \dots + (-t)^{n-1}}_{S} = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}$$

$$S - (-t)S = 1 - (-t)^n \qquad = \frac{1}{1+t} + (-1)^{n+1}\frac{t^n}{1+t}$$

ALLTSÅ

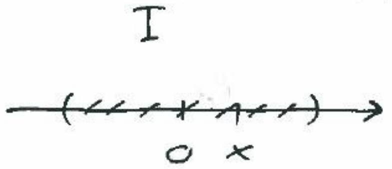
$$\ln(1+x) = \int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^{n+2}\frac{t^n}{1+t}\right) dt$$

$$= \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}\right]_0^x + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{1}{1+\tilde{\theta}x}\underbrace{\int_0^x t^n\,dt}_{\frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

2 framställningar av ln

ENTYDIGHETSSATSEN FÖR MACLAURINUTVECKLINGAR.



antag f def. på I och

$f^{(k)}(x)$ kont. fkt på I

för $k = 0, 1, 2, \dots\, n+1$

antag att

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + O(x^{n+1})$$

$$\Longrightarrow \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

se på mitt av förra utveckling...

$$(-1)^{k-1}\,\frac{x^k}{k}$$

$$(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{k} = \left(\frac{d}{dx}\right)^k \ln(1+x) \qquad x=0 \qquad \frac{1}{k!}$$

BEVISIDÉ:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + O(x^{n+1}) =$$
$$= b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + O(x^{n+1})$$

sätt $x = 0$

visar att $a_0 = b_0$ — vet så ta bort

stryk x

$$a_1\enclose{circle}{x} + \dots \quad a_nx^n$$
$$b_1\enclose{circle}{x} + \dots \quad b_nx^n$$

gränsvärdet
då $x \longrightarrow 0$
är då a_1, b_1
dvs de är lika

& fortsätt!
ALLTBEVISAT

ex. 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x(\cos x - 1)}$$ då $x \to 0$

nämnare & täljare mot 0.
studera HUR snabbt mot 0.

standard utvecklingar !!!!

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$$ nöjer oss med dessa 2 termer.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$$ se så det räcker dock komma fram till gränsvärde !!!

vi får

$$\frac{\sin x - x}{x(\cos x - 1)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5) - x}{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4) - 1\right)}$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)}{-\frac{x^3}{2} + x\,\mathcal{O}(x^4)} = \frac{-\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)}{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x^2)} \longrightarrow \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{1}{2}}$$

dominerande

$$= \frac{1}{3}$$ då $x \to 0$

LÄS om ordo i GULA boken.

$$\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$$

$$\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^m) \quad m < n$$

$$x^n\,\mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^{n+m})$$ n, m. positiva heltal

ex. 2.

$$\lim \frac{1}{x}\left(e^{x+1}-(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\frac{1}{x}\left(e^{x+1}-e^{\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(e^{x+1}-e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\right)$$

standardutveckling

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+O(x^4)$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)$$

$$e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)} = e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+O(x^4)\right)}$$

$$= e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+O(x^3)} = e^{1}\cdot e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+O(x^3)}$$

$$= e\cdot e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+O(x^3)}$$

vi får

$$\frac{1}{x}\left(e^{x+1}-e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)}\right) = \frac{e}{x}\left(e^{x}-e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+O(x^3)}\right)$$

$$= \frac{e}{x}\left(\left(1+x+O(x^2)\right)-\left(1+\left(\underbrace{-\frac{x}{2}+O(x^2)}_{\text{mindre att skriva...}}\right)+\underbrace{O(x^2)}_{\text{kan nöja oss m. det}}\right)\right)$$

$$= \frac{e}{x}\left(\frac{3}{2}x+O(x^2)\right) = \frac{3e}{2}+O(x) \longrightarrow \frac{3e}{2} \quad x\longrightarrow 0$$

hur mycket behöver man ta med? så det räcker.

får en term & en restterm

Taylors formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{n+1}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{RESTTERM}}$$

för något

$$0 \le \theta = \theta(n, x, a, f) \le 1$$

$$= P_n\underbrace{(x-a)}_{\substack{\text{eller} \\ (x) \\ \text{smaksak!}}} + R_{n+1}(x-a$$

tillämpningar:

- gränsvärdesberäkning

$$R_{n+1}(x-a) = O((x-a)^{n+1})$$

- $\int_a^b f(x)\,dx$ kanske är svårt/omöjligt att beräkna.

gör numeriskt, dvs. sätt in

$R_{n+1}(x-a)$ på Lagranges form.

- lokala extremvärdesundersökningar.

ex:

$$f(x) = \ln(1+x)\cdot\arctan(2x) - 2x^2$$

frågan:

har $f(x)$ lokalt extremvärde i $x=0$?

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\cdot\arctan(2x) + \ln(1+x)\cdot\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2 - 4x$$

$f'(0) = 0$ ser vi dvs $x = 0$ är en stationär punkt.

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}\cdot\arctan(2x) + \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2$$

$$+ \frac{1}{1+x}\cdot\frac{2}{1+(2x)^2} + \left(\ln(1+x)\cdot -\frac{1\cdot 2}{(1+(2x)^2)^2}\cdot 2\cdot 4x\right) - 4$$

$f''(0) = 4-4 = 0$ detta känns ju lite pbbigt.

kör Maclaurin utveckling av $f(x)$ I think !!

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{\text{ordo !!}}{\mathcal{O}(x^4)}$$

$\boxed{\arctan(t)}$ = hmm ? YUP för : $\boxed{t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \mathcal{O}(t^7)}$

en udda fkt.

se som :

$$\arctan t = \int_0^t \frac{1}{1+s^2}\,ds = \left\{1 + (-s)^2 + (-s)^2 + \dots + (-s^2)^{n-1} = \frac{1-(-s^2)^n}{1-(-s^2)}\right\}$$

summan av geometrisk serie

$$= \int_0^t \left(1 + (-s^2) + (-s^2)^2 + \dots + (-s)^{n-1} + \frac{(-s^2)^n}{1-(-s^2)}\right) ds$$

$$= \int_0^t (1 - s^2 + s^4 - \dots)\,ds = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \dots$$

alltså :

behöver ej ta med mer.

$$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)\right)\left(2x - \frac{(2x)^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)\right) - 2x^2$$

$$= 2x^2 - x^3 + \mathcal{O}(x^4) - 2x^2 = -x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

$$= -x^3\underbrace{(1 + \mathcal{O}(x))}_{\geq \frac{1}{2}}$$

för $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$

för $\varepsilon > 0$ tillräckligt litet.

se alltså på funktion.

vi får :

$f(x) < 0$ för $x \in (0, \varepsilon]$

$f(x) > 0$ för $x \in [-\varepsilon, 0)$

SLUTSATS

$x=0$ ej lokal extrempkt

till $f(x)$

allmänt:

om $f^{(k)}$ kont. i omgivning av $x=a$

och $f'(a) = f''(a) = \dots f^{(n-1)}(a) = 0$ $\quad f^{(m)}(a) \neq 0$

n jämnt heltal

f har lok. min i $x=a$ om $f^{(m)}(a) > 0$

f —"— max i $x=a$ om $f^{(m)}(a) < 0$

n udda heltal

f har **ej** ett lok. extremvärde i $x=0$

l'Hospitals regel

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

om $f(a) = g(a) = 0$
och f, g kont.
i omgivning av a.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

ifall
även deriverbara
i a och $g'(a) \neq 0$

$$\longrightarrow \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad x \to a$$

✓ $\neq 0$

som att vi skriver
upp en Taylorutveckl.
av $f(x)$ samt $g(x)$

ex.

$$\lim_{x \to \infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$$

$$x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \boxed{x \cdot \int_x^{\infty} 1 \cdot \frac{1}{1+t^2}} dt = x \cdot \left[\left[t \cdot \frac{1}{1+t^2} \right]_x^{\infty} - \int_x^{\infty} t \left(- \frac{1}{(1+t^2)^2} \overset{\text{inre}}{\cdot 2t} \right) dt \right]$$

$$= x \left[- \frac{x}{1+x^2} + 2 \int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^2} dt \right]$$

$$= -\frac{x^2}{1+x^2} + \boxed{2x\int_x^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dx} - 2x\int_x^{\infty}\frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$$

se att samma som i början, flytta över osv! byter ju tecken också.

$$= \underbrace{\frac{x^2}{1+x^2}}_{\longrightarrow 1 \text{ då } x\longrightarrow\infty} + \underbrace{2x\int_x^{\infty}\frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt}$$

$$|\ldots| \leq \underbrace{\frac{2|x|}{1+x^2}}_{\text{mot } 0 \text{ då } x\longrightarrow\infty} \cdot \int\frac{1}{1+t^2}\,dt \quad \text{för } x > 0$$

& andra begränsad, räcker

$\longrightarrow 0 \quad x\longrightarrow\infty$

dvs

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \boxed{1}$$

l'Hospitals regel.

antag att:

① $\underbrace{\begin{cases} f(x)\longrightarrow 0, & x\to x_0 \\ g(x)\longrightarrow 0, & x\to x_0\end{cases}}$ eller $g(x)\longrightarrow\infty, \; x\to x_0$

eller

$\underbrace{g(x)\longrightarrow -\infty, \; x\to x_0}$

② f, g är deriverbara i $(x_1,x_0)\cup(x_0,x_2)$ och $g'(x)$ har konstant tecken i (x_1,x_0) och i (x_0,x_2) för några $x_1 < x_0 < x_2$

③ $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar

säger ej nåt om just x_0

{ då gäller: }

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{existerar och} \quad = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ex.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

sätt

$f(x) = \ln x$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ i en

$g(x) = x^2 - 1$ $\qquad g'(x) = 2x$ $\qquad$ omgivning av $x = 1$

vi får:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\ln x}{x^2 - 1} = \left[\begin{matrix} x = 1 + t \\ x \to 1 \end{matrix} \iff t \to 0 \right]$$

Maclaurinutveckling

$$= \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2 - 1} = \frac{\ln(1+t)}{t(2+t)} = \frac{\overline{t + \mathcal{O}(t^2)}}{t(2+t)}$$

$$= \frac{1 + \mathcal{O}(t)}{2 + t} \longrightarrow \frac{1}{2} \qquad t \longrightarrow 0$$

ANM: l'Hospitals regel gäller även för

① $x \longrightarrow x_0 \oplus$ eller $x \longrightarrow x_0 \ominus$

om intervallen i ② ersätts med

(x_0, x_2) resp (x_1, x_0)

② $x \longrightarrow \infty$ eller $x \longrightarrow -\infty$ om intervallen

i ② ersätts m. (x_1, ∞) resp $(-\infty, x_2)$

ex. $\lim_{x \to \infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$

$$x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \equiv \frac{f(x)}{g(x)}$$

$f(x) \longrightarrow 0 \quad x \to \infty$

$g(x) \longrightarrow 0 \quad x \longrightarrow \infty$

$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

$g'(x) = \; = -\frac{1}{x^2}$

KOLLA alla förutś.
dvs
$g'(x)$ konstant
tecken, t.ex.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{1+x^2} = \boxed{1}$$

övning.

h deriverbar på $[a, b]$

$h'(a) \cdot h'(b) < 0$ ty de har olika tecken.

PÅSTÅENDE: finns $\xi \in (a, b)$ så att

$$h'(\xi) = 0$$

OBS: inget antagande om att h' är
kont på $[a, b]$

OBS

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$$

andra ggn deriverat

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$$

OBS

$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$g(x) = x$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \underset{\text{mot } 0}{x} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{begränsad}} = 0$$

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot -\frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = 1$$

$$= 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underbrace{- \cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{saknar gränsvärde då } x \to 0} \text{ problemet}$$

behörer ej betyda att $\frac{f(x)}{g(x)}$ saknar jue!

Bevis av l'Hospitals regel.

Cauchy's medelvärdessats.

antag att

① f, g kont. på $[a,b]$

② f, g deriverbar i (a,b) och $g'(x) \neq 0$ för $x \in (a,b)$

DÅ GÄLLER:

finns $\xi \in (a,b)$ så att $$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

behöver ej vara samma ξ typ.

BEVIS:

bilda

$$h(x) = (f(b)-f(a)) \cdot g(x) - (g(b)-g(a)) \cdot f(x)$$

$x \in [a,b]$

här gäller

- h kont. på $[a,b]$
- h' existerar på $]a,b[$
- $h(a) = (f(b)-f(a)) \cdot g(a) - (g(b)-g(a)) \cdot f(a)$

$$= f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$h(b) = (f(b)-f(a)) \cdot g(b) - (g(b)-g(a)) \cdot f(b)$$

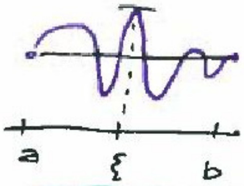
$$= -f(a)g(b) + g(a)f(b)$$

Rolles sats ger

finns $\xi \in (a,b)$ så att $h'(\xi) = 0$

alltså

$$0 = (f(b)-f(a))\,g'(\xi) - (g(b)-g(a))\,f'(\xi)$$



vi får $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

då $g'(\xi) \neq 0$ och

$g(b)-g(a) =$

$\underbrace{g'(\eta)}_{\neq 0}\underbrace{(b-a)}_{\neq 0} \neq 0$

för ngt $\eta \in (a,b)$

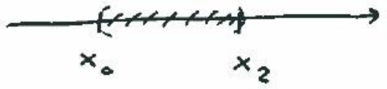
visa l'Hospitals regel för

$x \longrightarrow x_0+$ och $f(x), g(x) \longrightarrow 0$

$x \longrightarrow x_0+$:

vet:

f, g deriverbara.



sätt $f(x_0) = g(x_0) = 0$

(om nu f & g inte skulle vara def. i x_0)

medför att f, g är kontinuerliga i $\left[x_0, x_0 + \frac{x_2 - x_0}{2}\right]$

och f', g' existerar på $\left(x_0, x_0 + \frac{x_2 - x_0}{2}\right)$

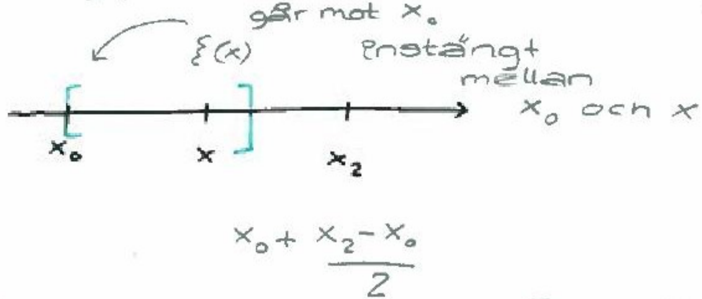
och $g'(x) \neq 0$ på $\left(x_0, x_0 + \frac{x_2 - x_0}{2}\right)$

för $x \in \left(x_0, x_0 + \frac{x_2 - x_0}{2}\right)$ gäller

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \left\{\text{Cauchy's medelvärdessats}\right\}$$

på f, g, på $[x_0, x]$

$$= \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$$ för något $\xi(x) \in (x_0, x)$



vill låta x gå mot x_0 från höger.

låt $x \rightarrow x_0+$ då $\xi(x)$ ligger mellan x, x_0

gäller $\xi(x) \longrightarrow x_0+$

MEN $\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar enligt antagande ③

alltså

$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x)}{g(x)}$ existerar och $= \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

l'Hospitals regel "$\frac{0}{0}$" "$\frac{\infty}{\infty}$"

antag att

1) $\begin{cases} f(x) \longrightarrow 0 \\ g(x) \longrightarrow 0 \quad \text{då } x \longrightarrow x_0 \end{cases}$

eller
$g(x) \longrightarrow \infty \quad x \to x_0$
eller
$g(x) \longrightarrow -\infty \quad x \longrightarrow x_0$

2) finns $x_1 < x_0 < x_2$ så att
$f'(x), g'(x)$ existerar på $(x_1, x_0) \cup (x_0, x_2)$
och $g'(x)$ har konstant tecken på de båda intervallen.

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

DÅ GÄLLER $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existerar och $= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Bevis

förra gång...

fall 1 $\quad f(x), g(x) \longrightarrow 0 \quad x \to x_0^+$

fall 2 $\quad f(x), g(x) \longrightarrow 0 \quad x \longrightarrow \infty$

byt variabel.

$x = \frac{1}{t}$ då gäller $x \longrightarrow \infty$
omm $t \longrightarrow 0^+$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}$$

förutsättning ju att existerar

$$\frac{\frac{d}{dt} f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{d}{dt} g\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \boxed{\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}} \longrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$t \longrightarrow 0^+$

l'Hospitals regel fall 1 ger

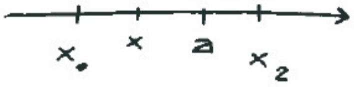
$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existerar och $= \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

<u>fall 3</u> $g(x) \longrightarrow \infty$, $x \longrightarrow x_0^+$

antag att

$g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ för alla $x \in]x_0, x_2[$

ifall det ej är,
så får vi
krympa intervallet.



använd Cauchy's medelvärdessats.

.... dvs finns $\xi \in]x, a[$ så att

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

vs. Lagrange som är

$f'(\mu)(b-a) = f(b) - f($

omskrivning

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x)} = \frac{g(x) - g(a)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}_{\substack{\text{mkt} \\ \text{nära}}} - \underbrace{\frac{g(a)}{g(x)}}_{\substack{\text{nämnare} \\ \text{mot } \infty}} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a)}{g(x)}$$

nämnare mot ∞

mellan x och a

$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

VILL $x \longrightarrow x_0^+$ kolla in vad som händer.

vi vet: $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar, kalla det A.

ska visa: $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

dvs. för varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ så att

$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon$ för alla $x \in]x_0, x_0 + \delta[\cap]x$

fixera $\varepsilon > 0$

$$☆: \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \frac{g(a)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a)}{g(x)} - A\right| \leqslant$$

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| + \left|\frac{g(a)}{g(x)}\right| \cdot \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| + \left|\frac{f(a)}{g(x)}\right|$$

$A = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ medför finns $0 < \tilde{\delta} < \underbrace{x_2 - x_0}_{\text{så ej går utanför intervallet}}$

så att

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{för} \quad x \in \left]x_0, x_0 + \tilde{\delta}\right[$$

då gäller från ☆

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{g(a)}{g(x)}\right| \cdot \overbrace{\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right|}^{< \frac{\varepsilon}{2}} + |A| + \left|\frac{f(a)}{g(x)}\right|$$

för $x \in \left]x_0, x_0 + \tilde{\delta}\right[$ för $a \in \left]x_0, x_0 + \tilde{\delta}\right[$

fixera a

men $g(x) \longrightarrow \infty$ då $x \longrightarrow x_0^+$

medför finns $0 < \hat{\delta} < \tilde{\delta}$ så att

$$\left(|g(a)| \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} + |A|\right) + |f(a)|\right) \frac{1}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

för alla $x \in \left]x_0, x_0 + \hat{\delta}\right[$

slutsats:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon \quad \text{för alla } x \in \left]x_0, x_0 + \hat{\delta}\right[$$

ex.

$$\lim_{x \to \infty} x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

$$x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt = \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\frac{e^{x^2}}{x}}$$

de är deriverbara, bara håll dig på rätt sida.

sätt

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \qquad f'(x) = e^{x^2}$$

$$g(x) = \frac{e^{x^2}}{x} \qquad g'(x) = 2e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x^2}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}(2 - \frac{1}{x^2})} = \frac{1}{2 - \frac{1}{x^2}} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}} \quad x \longrightarrow \infty$$

1, 2 och 3 i l'Hospitals regel uppfyllde

för $]x, \infty[\; = \;]1, \infty[$

det följer

$$\lim_{x \to \infty} x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt = \frac{1}{2}$$

ex.

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$g(x) = e^{\sin x} \cdot f(x)$$

då gäller

- $g(x) \longrightarrow \infty, \quad x \longrightarrow \infty$
- $f'(x) = 1 + \cos(2x) = 1 + 2\cos^2 x - 1 = 2\cos^2 x$

$$g'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot f(x) + e^{\sin x} \cdot f'(x)$$

$$= \cos x \cdot e^{\sin x} (x + \frac{1}{2} \sin 2x + 2\cos x)$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos^2 x}{\cos x \cdot e^{\sin x}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x + 2\cos x\right)}$$

$$= \frac{\overbrace{2\cos x}^{\text{begränsad}}}{\underbrace{e^{\sin x}}_{\substack{\text{varierar}\\ 1,-1}}\underbrace{\left(x + \frac{1}{2}\overbrace{\sin 2x}^{} + \overbrace{2\cos x}^{\text{begränsade}}\right)}_{\text{mot } \infty}} \xrightarrow{\text{då } x \to \infty} 0$$

MEN

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{e^{\sin x}} = e^{-\sin x} \in \left[\frac{1}{e}, e\right] \quad \text{för alla } x \geq 3$$

$]a, \infty[$ på detta intervall växlar $g'(x)$ tecken, gäller för alla $a \in \mathbb{R}$

alltså kan ej säga nåt om $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ ty uppfyller ej krav

Rummet $\mathbb{R}^n$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$ där $x_1, x_2 \dots x_n \in \mathbb{R}$

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots x_n + y_n)$

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

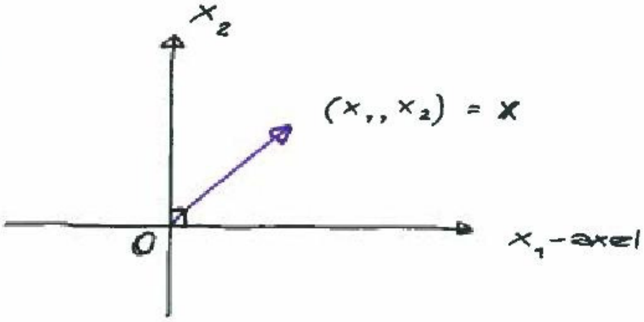
$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots \lambda x_n)$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x}\lambda \in \mathbb{R}^n$

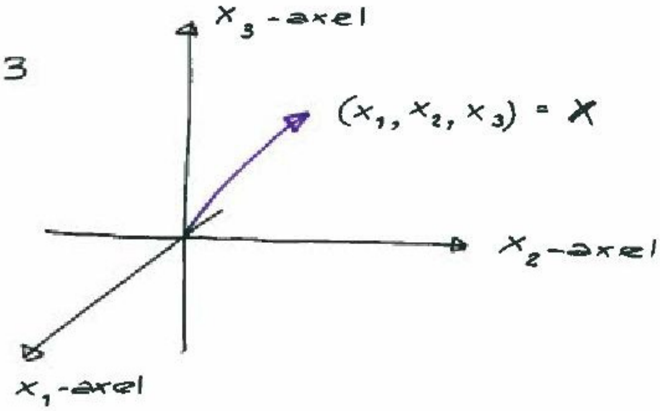
vanlig vektormultiplikation

$\mathbf{0} = (0, 0 \dots 0)$

n=2



n=3



$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$ $\quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

längden av $\mathbf{x}$ $\quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \in \mathbb{R}$

$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2}$

avståndet mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$

$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})}$

Cauchy-Schwarz olikhet

$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|$ alla $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}$

med likhet omm $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$

parallell

$$0 \leq (x+ty)\cdot(x\cdot ty) = \underbrace{x\cdot x}_{\geq 0} + 2t\,x\cdot y + \underbrace{t^2 y\cdot y}_{>0}$$

för alla t !

räkna med skalärprodukt termen

enligt antagande $y \neq 0$

minimera HL m.a.p. t GER: C-S'olikhet

---

triangelolikheten

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

eftersom

$$\leq 2|x\cdot y| \leq 2|x|\cdot|y|$$

$$\underbrace{(x+y)(x+y)}_{|x+y|^2} = \underbrace{x\cdot x}_{|x|^2} + \underbrace{2x\cdot y}_{\leq 2|x|\cdot|y|} + \underbrace{y\cdot y}_{|y|^2} \leq (|x|+|y|)^2$$

OBS :

$$|x_1 + x_2 + \dots x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$x = (x_1, x_2, \dots x_n)$$

$$|x_k| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = |x| = |(x_1, 0, \dots 0) +$$

New LINE

$$(0, x_2, 0 \dots 0) + \dots + (0, 0 \dots x_n)| \leq$$

$$|(x_1, 0 \dots)| + |(0, x_2, 0 \dots 0)| + \dots + |(0, 0 \dots x_n)|$$

$$= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$$

$\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, x_2 \dots x_n) \qquad x_k \in \mathbb{R} \qquad k = 1, 2 \dots n$

$x + y, \lambda x \in \mathbb{R}^n \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

$|x| = \sqrt{x \cdot x}$ skalärprodukt, rot ur..

$$|\lambda x| = \sqrt{(\lambda x)\cdot(\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 \cdot x \cdot x} = |\lambda||x|$$

$$|x - y| = \sqrt{(x-y)\cdot(x-y)}$$

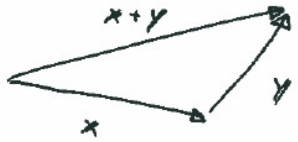
Cauchy-Schwartz olikhet :

$$|x \cdot y| \leqslant |x| \cdot |y|$$

Δ-olikhet :

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

likhet endast om de är parallella.



konsekvens av Δ-olikheten

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_k| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |x_i|$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\max_{i=1,\dots,n} |x_i| \leqslant |x| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

ALLTSå

$$\pm (|x| - |y|) \leqslant |x - y|$$

dvs.

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

USE : Δ-olikheten

eftersom

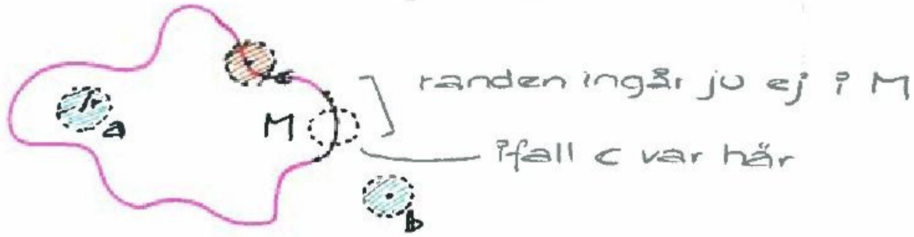
$$|x| = |(x - y) + y| \leqslant |x - y| + |y|$$

dvs. $|x| - |y| \leqslant |x - y|$

$|-1| \cdot |x - y|$

$= |x - y|$

Mängder i $\mathbb{R}^n$ $\quad M \subset \mathbb{R}^n$



öppet klot kring $a \in \mathbb{R}^n$:

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| < r\}$$

med radie $r > 0$

U är en omgivning till a om $B(a,r) \subset U$ för ngt $r > 0$.

DEF. M delmängd av $\mathbb{R}^n$ då kallas

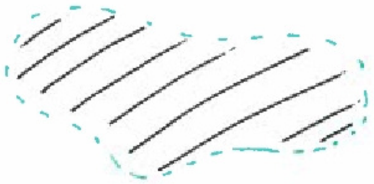
- a inre punkt i M om det finns $r > 0$ så att $B(a,r) \subset M$
- b yttre punkt till M om det finns $r > 0$ så att $B(b,r) \subset M^c = \{x \in \mathbb{R}^n, x \notin M\}$
- c randpunkt till M om $B(c,r) \cap M \neq \emptyset$, $B(c,r) \cap M^c \neq \emptyset$, alla $r > 0$

NOTERA: c randpunkt till M. det säger dock inget om huruvida $c \in M$ eller ej.

∂M = mängden av alla randpunkter till M.

M kallas

öppen mängd om varje $x \in M$ är en inre pkt i M



radien för öppet klot kommer minska då nära randpunkt!

sluten mängd om M^c är öppen mängd.

m's komplement.

$\boxed{CM = M^c}$

$\mathbb{R}^n$ är en öppen mängd och en sluten mängd.

komplement är $\emptyset$ TOMM MÄNGD

samma egenskaper.

Vektorvårda fkt av flera variabler.

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^p$ där $D \subset \mathbb{R}^n$

bilden i $\mathbb{R}^p$

ψ

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Ofta $p = 1$

$n = 2$

STANDARD, typ.

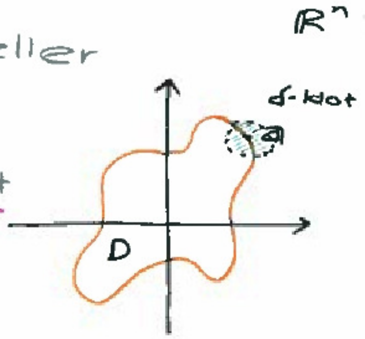
$\mathbb{R}^p \ni y = f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) = (f_1(x_1, x_2 \dots x_n), \dots, f_p(x_1 \dots x_n$

Gränsvärdesdefinitionen.

givet $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^n$

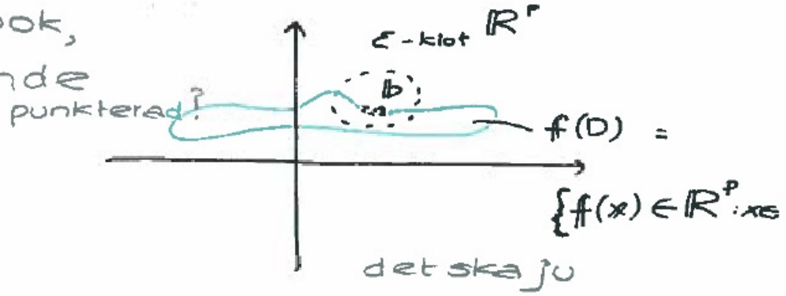
antag att a inre pkt i D eller randpkt till D

vi säger att f har gränsvärdet $b \in \mathbb{R}^p$ då x går mot a om för varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att

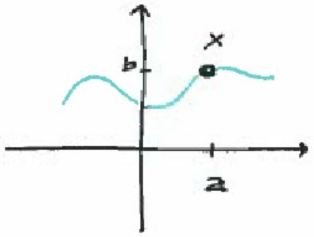


$$\begin{cases} |x - a| < \delta \\ x \in D \end{cases} \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

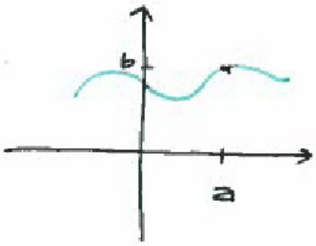
beror lite på vilken bok,
kan använda roterande
och då > 0 också.
bort pkt a.



det ska ju
hamna i ε-klotet.



har inget
gränsvärde i
den pkt'en.



$n = p = 1$

dvs. för varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$
så att

$$f(B(a, \delta) \cap D) \subset B(b, \varepsilon)$$

(kan vara inre pkt med,
behöver ej vara randpkt.

OBSERVERA:

detta betecknas

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{eller} \quad f(x) \longrightarrow b \text{ då } x \longrightarrow a$$

OBSERVERA MERA:

för $f(x) = (f_1(x), \dots f_p(x))$, $b = (b_1, \dots b_p)$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{omm} \quad \lim_{x \to a} f_i(x) = b_i \quad \text{för } i = 1, \dots, p$$

eftersom

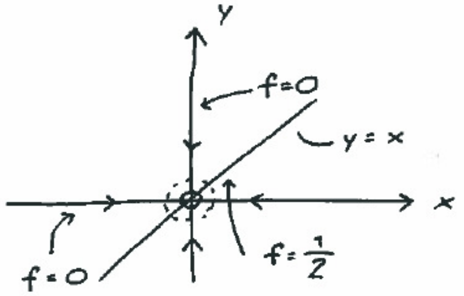
$$|f_i(x) - b_i| \leq |f(x) - b| \leq \sum_{j=1}^{p} |f_j(x) - b_j|$$

$i, j = 1, \dots p$

ex. reellvärd fkt av 2 variabler

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$$

fråga: existerar gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?.



vanligtvis från vänster eller höger just.

iom detta

$$x \neq 0 : f(x,0) = \frac{x \cdot 0}{x^2+0^2} = 0$$

$$y \neq 0 : f(0,y) = 0$$

om gränsvärdet existerar så måste det = 0.

$$x \neq 0 : f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

SLUTSATS:

f(x,y) saknar gränsvärde i (0,0)

bildmängd kommer innehålla 0 och $\frac{1}{2}$

den kommer hamna utanför

ε - klotet.

---

ex.

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$$

existerar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

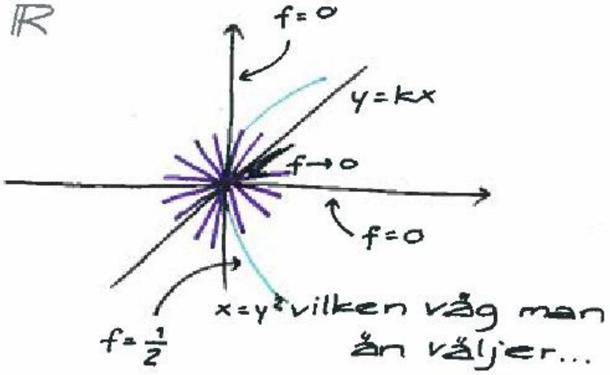
$$x \neq 0 \quad f(x,0) = \frac{x \cdot 0}{x^2+0^4} = 0$$

$$y \neq 0 \quad f(0,y) = \frac{y^2 \cdot 0}{0^2+y^4} = 0$$

om gränsvärdet existerar så måste det = 0

$x \neq 0 \quad f(x, kx) = \frac{x(kx)^2}{x^2+(kx)^4} = \frac{x^3k^2}{x^2(1+k^4x^2)}$

$k \in \mathbb{R}$



$$= \underbrace{x}_{\substack{\to 0 \\ x \to 0}} \underbrace{\frac{k^2}{1+k^4x^2}}_{\substack{\to k^2 \\ x \to 0}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

gäller för
varje $k \in \mathbb{R}$!!

välj $x = y^2$

$y \neq 0 \quad f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$

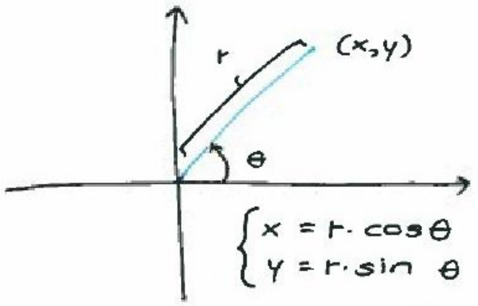
SLUTSATS:

$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ existerar EJ

testar
enkla vägar
först dvs.
$x = 0$
$y = 0$.

polära koordinater

vill visa att
existerar.
inför polära
koordinater.



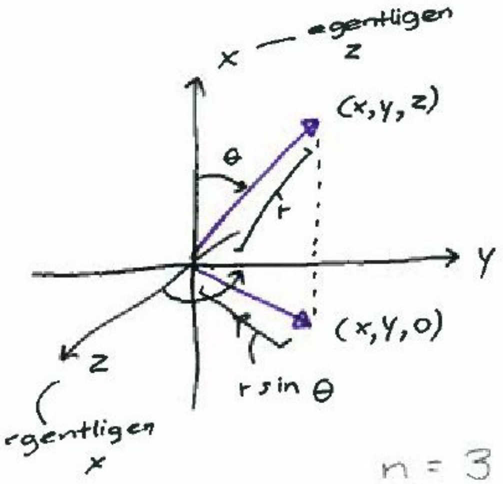
$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

$r \geq 0, \ \theta \in [0, 2\pi[$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

vill visa att
då $r \longrightarrow 0$
går fkt mot visst
värde. (här 0)

då $n = 2$



$x = r\sin\theta \cdot \cos\varphi$

$y = r\sin\theta \cdot \sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

$r \geq 0 \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\theta \in [0, \pi]$

$\varphi \in [0, 2\pi[$

$n = 3$

GRÄNSVÄRDEN FÖR FKT AV FLERA VARIABLER.

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^p$ $\qquad D \subset \mathbb{R}^n$

a inre pkt i D / randpkt till D

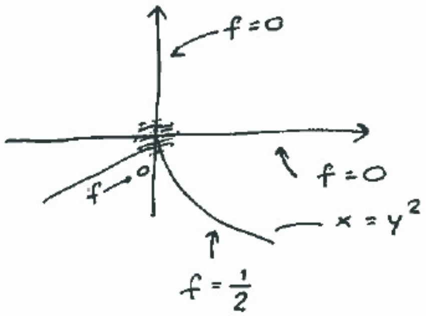
$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \left(f(x) \longrightarrow b \text{ då } x \longrightarrow a \right)$

om $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \qquad f(B(a,\delta) \cap D) \subset B(b,\varepsilon)$

ex.

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \qquad D = \{(x,y) \in R^2, (x,y) \neq (0,0)\}$$

vi såg : saknar gränsvärde i (0,0)



ex. $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \neq (0,0)\}$

$x \neq 0 \quad f(x,0) = x0\dfrac{x^2-0^2}{x^2+0^2} = 0$

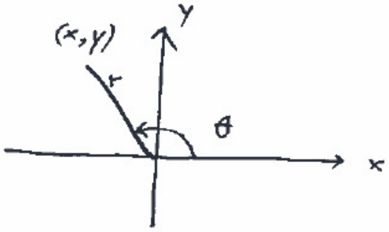
kolla vad som sker då mot (0,0) från olika

$y \neq 0 \quad f(0,y) = 0y\dfrac{0^2-y^2}{0^2+y^2} = 0$

om G.V existerar för f(x, y) existerar då (x,y) ⟶ (0,0) så måste det vara = 0

inför polära koordinater kring (0,0)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



$r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[$

betrakta

$$|f(x,y) - 0| = |f(r\cos\theta, r\sin\theta)|$$

$$= \left| r\cos\theta \cdot r\sin\theta \frac{(r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} \right|$$

oberoende av θ!!

$$= r^2 |\underbrace{\cos\theta}_{\leq 1} \underbrace{\sin\theta}_{\leq 1} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)| \leq r^2 \longrightarrow 0$$

uppskatta då $r \longrightarrow 0$
uppifån m. fkt OBER. av θ

här är r^2 en växande funktion för $r \geq 0$

det gäller att om $0 < \delta^2 < \varepsilon$ gäller

$$|(x,y) - (0,0)| < \delta \implies |f(x,y) - 0| < \varepsilon$$

i 9 fall av 10: inför polära koordinater.

ex.

$$f(x,y) = \frac{\ln(1 + xy)}{xy + (xy)^2}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; 1 + xy > 0 \; x \neq 0, \; y \neq 0\}$$

$$\supset B((0,0), 1) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; x \neq 0, \; y \neq 0\}$$

vi ser att $(0,0)$ är en randpkt till D.

längst med koordinataxlar, inte ok!

$x \neq 0$: $f(x,x) = \dfrac{\ln(1 + x^2)}{x^2 + x^4}$ Maclaurinutveckling

$$\ln(1+t) = t + \mathcal{O}(t^2), \; t \to 0$$

$$= \frac{x^2 + \mathcal{O}(x^4)}{x^2 + x^4} = \frac{1 + \mathcal{O}(x^2)}{1 + x^2} \longrightarrow 1 \text{ då } x \longrightarrow 0$$

om $f(x,y)$ har gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$
så måste det vara 1.

inför polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

använda Maclaurin utveckling

betrakta

$$|f(x,y) - 1| = \left| \frac{\ln(1 + r^2\cos\theta\sin\theta)}{r^2\cos\theta\sin\theta + r^4\cos^2\theta\sin^2\theta} - 1 \right|$$

$$= \left| \frac{\cancel{r^2\cos\theta\sin\theta} + \mathcal{O}((r^2\cos\theta\sin\theta)^2)}{r^2\cos\theta\sin\theta + r^4\underbrace{\cos^2\theta\sin^2\theta}_{\text{ju nåt } \geq 0}} - \cancel{r^2\cos\theta\sin\theta} - r^4\cos^2\theta\sin^2\theta \right|$$

$$\leq Mr^2 \longrightarrow 0 \quad \text{då } r \longrightarrow 0$$

för r nära 0 för något reellt tal $M > 0$

ex.

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1$$

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

kasta EJ om gränsövergångar lättsinnigt!

GRÄNSVÄRDESREGLER.

$$f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}^p, \qquad D \subset \mathbb{R}^n$$

1) $\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \lim_{x \to a} g(x) = c$

samma bevis som för reella!

$$\Longrightarrow \lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c$$

2) $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n$

$$\lim_{x \to a} (\lambda f(x)) = \lambda b$$

$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \lim_{x \to a} g(x) = c$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x)g(x) = bc$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \text{ om } c \neq 0$$

3) $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$

$x \in B(a, r)$ $r > 0$

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) \Longrightarrow \lim_{x \to a} g(x)$ existear och $= \lim_{x \to a} f(x)$

4) sammansättning av fkt'er

$f : D \longrightarrow E$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$f(x) \longrightarrow b$, $x \longrightarrow a$

$g(x) \longrightarrow c$, $y \longrightarrow b$

$\Longrightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) \longrightarrow c$ då $x \longrightarrow a$

KONTINUITET.

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^n$

vi säger att

- f är kontinuerlig i $a \in \mathbb{R}^n$ om $a \in D$ och $\lim_{x \to a} f(x)$ existerar (och $= f(a)$)
- f är kont. om f är kont. för varje $a \in D$.

vi har att f är kont om $f(x) \longrightarrow f(a)$ då $x \longrightarrow a$ för varje $a \in D$.

ex.

$\pi_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ där $\pi_k(x) = \pi_k(x_1, x_2 \dots x_n)$

$= x_k$ $k \in \{1, 2 \dots n\}$

π_k är en kont. fkt

eftersom för $a = (a_1, a_2 \dots a_n)$

$|\pi_k(x) - \pi_k(a)| = |x_k - a_k| \leqslant |x - a| \longrightarrow 0$ då $x \longrightarrow a$

ex.

$f(x,y) = x^{xy}$ $\quad D = \{(x,y) : x > 0\}$

$$\left.\begin{array}{l}(x,y) \longmapsto x\\(x,y) \longmapsto y\end{array}\right]\text{KONT.} \quad (x,y) \longmapsto xy \text{ kont.} \quad x^{xy} = \underset{\text{kont}}{e}^{\overbrace{\overset{\text{kont}}{xy}\,\overset{\text{kont}}{\ln x}}^{\text{kont}}}$$

kont. fkt på D

Satser om kont. fkt.

Sats A:

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

1) f är kont.

2) D kompakt (= sluten, begr.) mängd

⟹ f antar sitt största och minsta värde på D.

dvs. det finns $x_0, x_1 \in D$, så att

$$\underset{\text{MINDRE}}{f(x_0)} \le f(x) \le \underset{\text{STÖRRE}}{f(x_1)} \quad \text{alla } x \in D$$

Sats B:

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

1) f är kont.] fkt kont.

2) D är $\underbrace{\text{bågvis sammanhängande}}_{}$

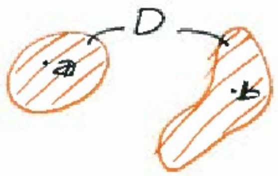
mängd i $\mathbb{R}^n$

talar ej om mängd som "kont".

⟹ f antar varje värde mellan f(a) och f(b) för varje par av $a, b \in D$.

nån stans i om fkt kont så anta D t.ex 1/2

kan hitta en kurva HELT i D som förbinder dem.



ej bågvis sammanhängande

Sats C:

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^p, \quad D \subset \mathbb{R}^n \qquad p \geq 1$

1) f är kontinuerlig
2) D är kompakt mängd

$\Longrightarrow$ f är likformigt kont, dvs.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in D :$

$$\begin{cases} |x - y| < \delta \\ x, y \in D \end{cases} \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

se skillnad!

f kont. dvs $\underset{\text{låser } x}{\forall x \in D} \ \underset{\substack{\text{låser} \\ \varepsilon > 0}}{\forall \varepsilon > 0} \ \underset{\substack{\text{sen} \\ \text{hitta} \\ \delta}}{\exists \delta > 0} \ \forall y \in D$

$$\begin{cases} |x - y| < \delta \\ y \in D \end{cases} \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

ex.

$f(x) = x^2 \qquad n = p = 1$

$D = [0, 1]$

är f(x) likformigt kont. på D ?

fixera $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = \underset{\substack{\text{Ligger i intervall} \\ [0,1]}}{|x + y|} \cdot |x - y| \leq \underset{< \varepsilon}{2 \cdot |x - y|}$$

$$\text{om } |x - y| < \delta = \frac{1}{2} \varepsilon = \delta(\varepsilon)$$

på $D = [0, 1]$!! VIKTIGT JU

ex. $f(x) = \sqrt{x}$ $D = [0, 1]$

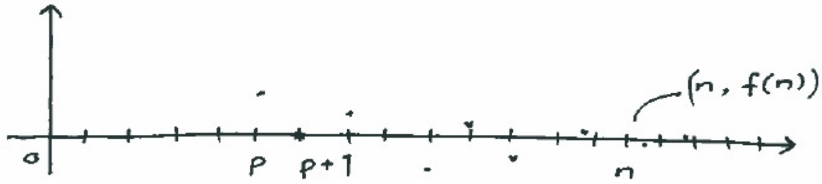
motsvarande kalkyl

TALFÖLJDER.

en talföljd är en reellvärd fkt f

där $D = \{p, p+1, p+2, \dots\}$ för ngt heltal p

ofta $p = 0$ eller 1.



beteckning

$f(n) = a_n$ $n = p, p+1, \dots$

$(a_n)_{n=p}^{\infty}$

ex.

Fibonaccitalen.

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $n = 0, 1, 2 \dots$

$a_0 = 0$ $a_1 = 1$ 0 1 1 2 3 5 8 ....

LIKFORMIG KONTINUITET

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ kontinuerlig om $\forall x \in D \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$

$$\begin{cases} |x-y| < \delta \\ y \in D \end{cases} \Longrightarrow \boxed{|f(x)-f(y)| < \varepsilon}$$

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ likformigt kontinuerlig

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in D$$

$$|x-y| < \delta \Longrightarrow \boxed{|f(x)-f(y)| < \varepsilon}$$

NOTERA:

f likformigt kont. på D $\Longrightarrow$ f kont. på D

$\not\Longrightarrow$ f likformigt kont. på D

exempel.

$f(x) = x^2 \quad D = [0, 1]$

f likformigt kont. på $[0, 1]$

Sats C:

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ där

① f kont på D

② D kompakt dvs D sluten & begränsad.

$\Longrightarrow$ f likformigt kont på D

exempel.

$f(x) = x^2 \quad D: [1, \infty[$ obegränsad, sluten

f kontinuerlig på D

påstående:

f är ej likformigt kont. på D

fixera $\varepsilon = 1$

finns inget $\delta > 0$ så att för varje $x, y \geq 1$ med $|x - y| < \delta$ gäller $|f(x) - f(y)| < 1$

skillnad mindre än 1 vill vi ha.

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 + y^2| = (x+y)|x-y|$$

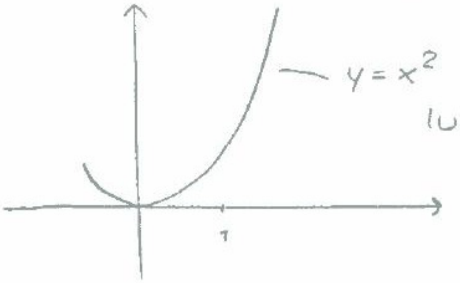
: $y = x + \frac{\delta}{2}$ dvs mindre än delta ju.] SÄKERHETS SKULL!

$$|f(x) - f(y)| = \left(2x + \frac{\delta}{2}\right)\underbrace{\frac{\delta}{2}}_{>0} \longrightarrow +\infty \text{ då } x \longrightarrow +\infty$$

ALTERNATIVT:

$$|f(x) - f(y)| = \underbrace{|f'(\xi)|}\cdot|x - y|$$ något ξ mellan x och y

dvs. Lagranges MVS



lutning växer obegränsat då $x \longrightarrow \infty$

exempel.

$f(x) = \frac{1}{x}$ $D =]0, 1]$ D begränsad, ej sluten...

f kont fkt på D.

påstående:

f ej likformigt kont. på D

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x-y}{xy}\right| \qquad x, y \in D.$$

fixera $\varepsilon = 1$

finns inget $\delta > 0$ så att för varje par $x, y \in D$ med $|x - y| < \delta$ gäller $|f(x) - f(y)| < 1$

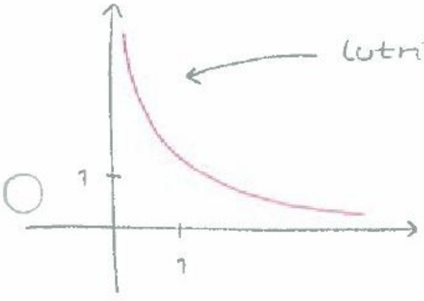
sätt $0 < x < y = \underbrace{x + \frac{\delta}{2}}_{} \leq 1$

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{\frac{\delta}{2}}{x(x+\frac{\delta}{2})} \right| \longrightarrow +\infty$$

då $x \longrightarrow 0^+$ ju.

eller behövs väl ej

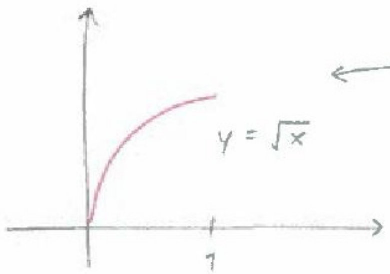
och det gäller för varje $\delta > 0$ så NOPE, ej gött.



lutning växer obegränsat då $x \longrightarrow 0^+$

EXEMPEL.

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad D =]0,1]$ — eller $[0,1]$ en kompakt mängd



lutningen växer obegränsat då $x \longrightarrow 0^+$

är en likformigt kont. fkt

Sats C ger att f likformigt kont. på $D = [0,1]$

NOTERA:

det gäller även att

f likformigt kont. på $\tilde{D}$, för varje $\tilde{D} \subset D$

fixera $x, y \in D = [0,1]$

med $|x - y| = \delta$ BUS!! antag $y = x + \delta$

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\delta}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\delta}}$$

av detta

$$\max_{x \in [0,1]} \frac{\delta}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\delta}} = \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \boxed{\sqrt{\delta}}$$ då blir'n störst !!

alltså $x, y \in D$, $|x - y| = \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \sqrt{\delta}$

och

$x,y \in D \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \sqrt{\delta}$

vi har

$x,y \in D \quad |x-y| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon^2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

för varje $\varepsilon > 0$

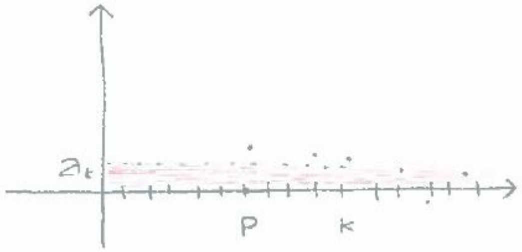
ALLTSÅ:

trots att lutning växer obegränsad då $x \to 0^+$ så gäller Sats C och kika på ε och δ, dvs är likformigt kont!

TALFÖLJDER:

$(a_n)_{n=p}^{\infty}$ $\quad a_p, a_{p+1}, a_{p+2} \ldots\ldots$

p heltal $\quad a_k \in \mathbb{R}$



gränsvärden för talföljder:

vi säger att $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ har gränsvärdet $a \in \mathbb{R}$

om $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

beteckning:

$\lim_{n \to \infty} a_n = a$ $\quad$ alt. $a_n \to a$ då $n \to \infty$

vi säger att $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ konvergerar om den har ett gränsvärde

ex. $a_n = k^n \quad p = 1 \quad k \in \mathbb{R}$

konvergerar $(a_n)_{n=1}^{\infty}$?

om $|k| < 1$ så konvergerar $(k^n)_{n=1}^{\infty}$

gränsvärdet = 0

om $k=1$ så $(1^n)_{n=1}^{\infty} = (1)_{n=1}^{\infty}$ dvs en KONSTANT FKT.

konvergerar,

med gränsvärdet $= 1$.

om $k=-1$ så $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$

svarar mot talföljden $-1, 1, -1, 1, -1$

talföljden divergerar.

om $k > 1$ så divergerar $(k^n)_{n=1}^{\infty}$

vi säger talföljden divergerar mot ∞.

om $k < -1$ så divergerar $(k^n)_{n=1}^{\infty}$ TOKDIVERGERAR!! dvs både mot ∞ och $-\infty$ ju.

OBSERVATION:

för $|k| < 1$ och p heltal gäller

$$n^p \cdot k^n \longrightarrow 0 \ , \quad n \longrightarrow \infty$$

alltså:

$$P(n) k^n \longrightarrow 0 \ , \quad n \longrightarrow \infty$$

för varje polynom P och $|k| < 1$.

DIFFERENSEKVATIONER.

exempel.

$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

$y_0 = a \ , \ y_1 = b \qquad a, b \in \mathbb{R}$

dvs har y_0, y_1 då y_2 entydigt bestämt.

ALLMÄNT:

☆ $y_{n+p} + a_{p-1} y_{n+p-1} + \ldots\ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = d_n$

där p positivt heltal $\qquad n = 0, 1, 2 \ldots\ldots$

$a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots\ldots a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

denna kallas linjär differensekvation av ordning p med konstanta koefficienter.

om $d_n = 0$ alla n så kallas differensekvation homogen.. ANNARS: inhomogen.

EXEMPEL.

$p = 1$

$$\begin{cases} y_{n+1} + a y_n = d_n, & n = 0, 1, 2, \dots \\ y_0 = C & a \neq 0 \end{cases}$$

vi har:

$$y_0 = C$$

$$y_1 = -a y_0 + d_0 = -aC + d_0$$

$$y_2 = -a y_1 + d_1 = -a(-aC + d_0) + d_1$$

$$= a^2 C + (-a) d_0 + d_1$$

$$y_3 = -a y_2 + d_2 = (-a)^3 C + (-a)^2 d_0 + (-a) d_1 + d_2$$

HÅLLER PÅ TILLS... SER SYSTEM I DET!

$$y_n = (-a)^n C + (-a)^{n-1} d_0 + (-a)^{n-2} d_1 + \dots + d_{n-1}$$

$$= (-a)^n C + \sum_{k=0}^{n-1} (-a)^{n-1-k} d_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

betrakta ☆ , sätt

$$L\left[(y_n)_{n=0}^{\infty}\right](n) = y_{n+p} + a_{p-1}y_{n+p-1} + \dots\dots + a_0 y_n$$

antag att $(y_n^{(1)})_{n=0}^{\infty}$, $(y_n^{(2)})_{n=0}^{\infty}$ uppfyller

$$L\left[(y_n^{(i)})_{n=0}^{\infty}\right](n) = 0 \qquad n = 0,1,2\dots$$

för $\boxed{i = 1,2.}$

2 ST. TALFÖLJDER... båda löser den HOMOGENA differensekvationen!

då gäller

$$L\left[\underbrace{\lambda_1 (y_n^{(1)})_{n=0}^{\infty} + \lambda_2 (y_n^{(2)})_{n=0}^{\infty}}_{\left(\lambda_1 y_n^{(1)} + \lambda_2 y_n^{(2)}\right)_{n=0}^{\infty}}\right](n) = 0$$

dvs. en linjär kombo av 2 st. som båda löser den homogena... blir ju också 0. dvs. löser också den.

ALLMÄNNA LÖSNINGAR:

$y_n + y_p$ som tidigare

DIFFERENSEKVATIONER

betrakta

$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = d_n$ ☆ $n = 0, 1, 2, \ldots$

där $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ om $d_n = 0$ alla n

kallas **HOMOGEN**, annars **INHOMOGEN**

OBSERVATION:

den allmänna lösningen fås av

$y_n = y_n^{(p)} + y_n^{(h)}$, där $y_n^{(h)}$ är den allmänna lösningen till motsvarande homogena diff. ekv dvs

$$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = 0 \quad , n = 0, 1, 2 \ldots$$

och $y_n^{(p)}$ är en lösning till ☆

hur bestämma

$\boxed{y_n^{(h)}}$? karakteristiska ekvationen för VL i ☆

$$\underbrace{r^2 + ar + b}_{(r - r_1)(r - r_2)} = 0$$

r_1, r_2 rötterna till

$r_1 \neq r_2 \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}$: $y_n^{(h)} = A r_1^{(n)} + B r_2^{(n)} \quad n = 0, 1, 2 \ldots$

där $A, B \in \mathbb{R}$

sätt in

$y_n = r_1^n \quad n = 0, 1, \ldots$ i ☆

iom att r_1 är en ROT

$$\underbrace{r_1^{n+2}}_{y_{n+2}} + \underbrace{a r_1^{n+1}}_{y_{n+1}} + \underbrace{b r_1^n}_{y_n} = r_1^{(n)} \underbrace{(r_1^2 + a r_1 + b)}_{=0} = 0$$

$n = 0, 1, 2 \ldots$

eftersom diff. ekv. linjär så är

$y_n^{(h)} = Ar_1^{(n)} + Br_2^{(n)}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ en homogenlösning.

$r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$: $y_n^{(h)} = (A + Bn)r_1^n$ $n = 0, 1, 2 \ldots$

där $A, B \in \mathbb{R}$

sätt $y_n = nr_1^n$ $n = 0, 1, \ldots$ i ☆

$$(n+2)r_1^{n+2} + a(n+1)r_1^{n+1} + bnr_1^n =$$

$$r_1^n\left(n\underbrace{(r_1^2 + a_1 r_1 + b)}_{=0} + (2r_1 + a)r_1\right)$$

ty r_1 är ju rot!

men

$$\cancel{r^2} + ar + b = (r - r_1)^2 = \cancel{r^2} - 2r_1 r + r_1^2$$

$$(2r_1 + a)r + b - r_1^2 = 0 \qquad \text{alla } r \in \mathbb{R}$$

flyttat till samma sida alla $r \in \mathbb{R}$

detta ger $2r_1 + a = 0$ (och $b - r_1^2 = 0$)

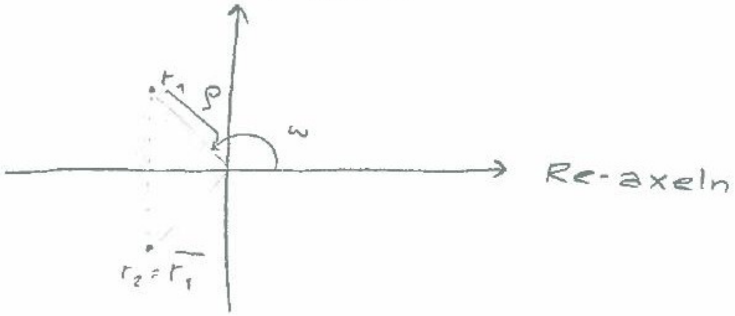
alltså

$y_n = nr_1^n$ $n = 0, 1, 2 \ldots$ är en lösning till ☆ med $d_n = 0$ $n = 0, 1, 2 \ldots$

differensekvation är linjär så $y_n^{(h)} = (A + Bn)r_1^n$ $n = 0, 1, 2 \ldots$

$r_2 = \overline{r_1} \notin \mathbb{R}$: dvs komplext. om komplex rot, även dess konjugat.

skriv rötterna på polär form



$r_{1,2} = \rho e^{\pm w}$

där $\rho > 0$

och

$0 < w < \pi$

vi har $y_n^{(h)} = A\rho^n \cdot \cos(n\omega) + B\rho^n \cdot \sin(n\omega)$

$n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

$A, B \in \mathbb{R}$

$\boxed{y_n^{(p)}}$ välj lämpliga ansatser till $y_n^{(p)}$ beroende på formen på d_n $n = 0, 1, 2 \ldots$

- $d_n = b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \ldots\ldots + b_1 n + b_0$

  ansätt $y_n^{(p)} = (\overbrace{a_q n^q + a_{q-1} n^{q-1} + \ldots + a_1 n + a_0}^{\text{polynom av grad } q})\, n^l$

  där l = antalet rötter till karakteristiska ekv. som är lika med 1. (dvs kan vara 0, 1, 2)

  $(r-1)^2 = 0$ här: $l = 2$

- $d_n = (b_q n^q + \ldots + b_0) \cdot k^n$

  ansätt $y_n^{(p)} = (a_q n^q + \ldots + a_0) \cdot k^n \cdot n^l$

  där l … samma som innan!

- $d_n = (b_q n^q + \ldots + b_0)\, k^n \cdot \begin{cases} \cos(n\lambda) \\ \sin(n\lambda) \end{cases}$

  $k, \lambda \in \mathbb{R}$

NOTERA $\cos(n\lambda) = \mathrm{Re}\left(e^{n(i\lambda)}\right)$

$\sin(n\lambda) = \mathrm{Im}\left(e^{n(i\lambda)}\right)$

$(k \cdot e^{i\lambda})^n = k^n e^{n(i\lambda)}$

$= k^n \cos(n\lambda) + i k^n \sin(n\lambda)$

betrakta hjälpdifferensekvationen

$\tilde{y}_{n+2} + a\tilde{y}_{n+1} + b\tilde{y}_n = \underset{\text{som ju är}}{\tilde{d}_n} = (b_q n^q + \ldots + b_0)(k e^{i\lambda})^n$

räknar som i fall b)

∘ $d_n = d_n^{(1)} + d_n^{(2)}$. och $y_n^{(p,i)}$ lösning till ☆

med $d_n = d_n^{(i)}$ $i = 1, 2$

$$\Longrightarrow \quad y_n^{(p)} = y_n^{(p,1)} + y_n^{(p,2)}$$

exempel.

lös:

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 3n^2 + 5 \, , \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

lösning:

bestäm $y_{(n)}^{h}$ $n = 0, 1, 2 \ldots$

karakteristiska ekvationen

$$0 = r^2 - 4r + 3 = (r-2)^2 - 1^2 = (r-3)(r-1)$$

rötter $r_1 = 3$ $r_2 = 1$

alltså $y_n^{(h)} = A3^n + B1^n = A3^n + B$ $n = 0, 1, 2 \ldots$

bestäm $y_n^{(p)}$

ansats $y_n^{(p)} = (a_2 n^2 + a_1 n + a_0)n^1$ — ℓ dvs 1's rot-multiplicitet

$$= a_2 n^3 + a_1 n^2 + a_0 n \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

bestäm koeff. a_1, a_2, a_0

insättning i differensekvation ger:

$$\underbrace{a_2(n+2)^3 + a_1(n+2)^2 + a_0(n+2)}_{y_{n+2}^{(p)}}$$

$$-4\Big(\underbrace{a_2(n+1)^3 + a_1(n+1)^2 + a_0(n+1)}_{y_{n+1}^{(p)}}\Big)$$

$$+3\big(\underbrace{a_2 n^3 + a_1 n^2 + a_0 n}_{y_n^{(p)}}\big) = \overbrace{3n^2 + 5}^{\text{HL jue}}$$

$n = 0, 1, 2 \ldots$

$$= a_2(n^3+6n^2+12n+8) + a_1(n^2+4n+4)$$
$$+ a_0(n+2) - 4(a_2(n^3+3n^2+3n+1) + a_1(n^2+2n+1)$$
$$+ a_0(n+1)) + 3(a_2n^3+a_1n^2+a_0n) = 3n^2+5$$

$$n^3: \quad a_2 - 4a_2 + 3a_2 = 0$$
$$n^0: \quad 8a_2 + 4a_1 + 2a_0 - 4a_2 + a_1 + a_0 = 5$$

$$(a_2-4a_2+3a_2)n^3 + (6a_2 + \cancel{a_1} - 12a_2 - \cancel{4a_1} + \cancel{3a_1} - 3)n^2$$
$$+ (12a_2 + 4a_1 + a_0 - 12a_2 - 8a_1 - 4a_0 + 3a_0)n$$
$$+ (8a_2 + 4a_1 + 2a_0 - 4a_2 - 4a_1 - 4a_0 - 5) = 0$$

vi får ett linjärt ekvationssystem med 3 ekv och 3 obekanta som är inhomogent.

$$\begin{cases} -6a_2 = 3 \\ -4a_1 = 0 \\ 4a_2 - 2a_0 = 5 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{2} \\ a_1 = 0 \\ a_0 = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

den allmänna lösningen ges av

$$y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = A3^n + B - \frac{1}{2}n^3 - \frac{7}{2}n$$

$n = 0, 1, 2$

om vi har begynnelsevillkor t.ex. $y_0 = 1 \quad y_1 = 0$

så kan vi bestämma A och B

ITERATION & NEWTON - RAPHSONS METOD.

exempel.

$ax + b = 0$

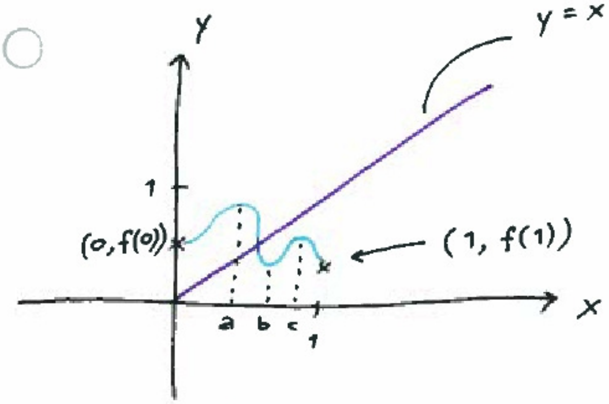
$ax^2 + bx + c = 0$ kvadratkomplettera

studera $f(x) = x$

om $f(x)$ är kontinuerlig fkt på $[0,1]$

och $f(x) \in [0,1]$ för alla $x \in [0,1]$

så



dvs kan ej ta sig från ena pkt till andra utan att korsa

$f(a) = a$
$f(b) = b$
$f(c) = c$

a, b, c rötter till $f(x) = x$

ALLMÄNT : sätt $g(x) = f(x) - x$ $\quad x \in [0,1]$

här är $g(x)$ kont. fkt på $[0,1]$

med $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$ och

$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$

sats om m. v. ger att det finns $\xi \in [0,1]$ sådant att $g(\xi) = 0$

då har vi $f(\xi) = \xi$

SATS: (fixpunktssats)

antag att

① f är en (kontinuerlig) funktion på $[a,b]$

där $f: [a,b] \longrightarrow [a,b]$

② finns $0 \leq k < 1$ sådant att

$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ alla $x,y \in [a,b]$

denna ger att kont.

(f är Lipschitzkont. på $[a,b]$ med Lipschitzkonstant k)

får ej ha lutning 1 eller större

då gäller:

① det finns ett entydigt bestämt $\xi \in [a,b]$ sådant att $f(\xi) = \xi$

② för varje $x_0 \in [a,b]$ sätt

$x_{n+1} = f(x_n)$ $n = 0, 1, 2 \ldots$

vi får en följd som hoppar runt i $[a,b]$ intervallet.

det gäller att följden

$(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent med gränsvärde $= \xi$

Bevis

① existensen visas som i exemplet ovan dvs. $[0,1]$ mot $[a,b]$ ha $g(x)$ osv. på samma sätt.

entydigheten.

antag att $\xi_1 = f(\xi_1)$, $\xi_2 = f(\xi_2)$

$$\xi_1 \neq \xi_2$$

$$\overbrace{|\xi_1 - \xi_2|}^{>0} = |f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq \underbrace{k}_{<1} |\xi_1 - \xi_k|$$

de är ju fixpkt'r

MOTSÄGELSE: finns endast

② fixera $x_0 \in [a,b]$ och $x_{n+1} = f(x_n)$ $n = 0,1,2\ldots.$

från ① vet vi att det finns ett entydigt bestämt $\xi \in [a,b]$ så att $f(\xi) = \xi$

$$|x_n - \xi| = |f(x_{n-1}) - f(\xi)| \leq k|x_{n-1} - \xi| \leq \ldots..$$

$$\leq k^n |x_0 - \xi| \quad n = 1,2,\ldots..$$

men $0 \leq k < 1$ så $k^n \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$

alltså

$$x_n \longrightarrow \xi \,, \quad n \longrightarrow \infty$$

konvergerar mot den entydigt bestämda fixpunkten.

ANMÄRKNING:

① vi har $|x_n - \xi| = |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - \xi)|$

med Δ-olikhet $\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - \xi|$

som är samma.

$$= |x_n - x_{n+1}| + \underbrace{|f(x_n) - f(\xi)|}_{\leq k|x_n - \xi|} \leq |x_n - x_{n+1}| + k|x_n - \xi|$$

$$|x_n - \xi| \leq \frac{1}{1-k}|x_n - x_{n+1}| \leq \frac{k}{1-k}|x_{n-1} - x_n|$$

$$\leq \ldots \leq \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1|$$

$x_0 = 1$

antag $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

har $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ något gränsvärde?

sätt $f(x) = \sqrt{3 + x}$

välj $[a, b] = [0, 3]$ $\quad$ så att fkt verkligen avbildas

då gäller $f : [0,3] \longrightarrow [0,3]$ $\quad$ i INTERVALLET!!

derivera f

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3 + x}} \qquad x \in [0,3]$$

vi får

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

med $k = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}$ gäller

$$|f(x) - f(y)| = \{\text{medelvärdessatsen}\}$$

$$= |f'(\eta)||x - y| \leq k|x - y|$$

för något $\eta \in [0,3]$

alla $x, y \in [0,3]$

och $0 \leq k < 1$

satsen ger att

$(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergerar mot ξ

där ξ är den entydigt bestämda fixpkt'n till f.

ξ bestäms av

$$\xi = \sqrt{3 + \xi}$$

iom

$$f(x) = \sqrt{3 + x}$$

$$f(\xi) = \xi$$

dvs $\xi^2 - \xi - 3 = 0$ och $\xi > 0$

vi får $\xi = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

1.27. c)

$$\lim_{x^2+y^2 \longrightarrow \infty} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2 + x^2y^2}$$

lösning:

sätt $f(x,y) = \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2 + x^2y^2}$ med $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

DEFINITIONEN.

$\lim_{x^2+y^2 \longrightarrow \infty} f(x,y) = A$ om $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R \in \mathbb{R}$:

$|(x,y)| \geq R$ och $(x,y) \in D$

$\Longrightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon$

$|(x,y)| \longrightarrow \infty$

dvs

avstånd

emellan.

polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$ där $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$

insättning i $f(x,y)$

$r^3(\cos^2\theta \sin\theta)$

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \left| \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^4 + r^4\cos^2\theta\sin^2\theta} \right| \leq \frac{1}{r} \xrightarrow[r \longrightarrow \infty]{} 0$$

ty $r^4\underbrace{(1 + \cos^2\theta\sin^2\theta)}_{\geq 0}$

OBEROENDE av θ

SLUTSATS:

$$\lim_{x^2+y^2 \longrightarrow \infty} f(x,y) = 0$$

2a ordn. differensekvation, linjär och homogen.

kar. ekv.

$$0 = r^2 - \frac{1}{p} r + \frac{1-p}{p} = \left(r - \frac{1}{2p}\right)^2 - \frac{1}{4p^2} + \frac{1}{p} - 1$$

$$= \left(r - \frac{1}{2p}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2p}\right)^2 = \left(r - \frac{1}{2p} + 1 - \frac{1}{2p}\right)$$

$$\left(r - \frac{1}{2p} - 1 + \frac{1}{2p}\right)$$

$$= (r - 1)\left(r + 1 - \frac{1}{p}\right)$$

$$= (r - 1)\left(r - \frac{q}{p}\right)$$

$\ell = 1$ minst!!
kan ju $\frac{q}{p}$ även vara 1.

detta ger:

$$y_n = A\left(\frac{q}{p}\right)^n + B\, 1^n = A\left(\frac{q}{p}\right)^n + B \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

om $p \neq q$

$$A + nB \qquad n = 0, 1, 2 \dots \qquad \text{om } p = q$$

FALL $p = q = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} 1 = P_0 = A \\ 0 = P_a = A + aB \end{cases} \qquad \text{ger } A = 1, \quad B = -\frac{1}{a}$$

dvs $P_n = 1 - \frac{n}{a}$ $\quad n = 0, 1, \dots, a$
(y_n)

$p = \frac{1}{2} + t$
$q = \frac{1}{2} - t$
låta
de gå
mot $\frac{1}{2}$

FALL $p \neq q$

$$\begin{cases} 1 = P_0 = A + B \\ 0 = P_a = A\left(\frac{q}{p}\right)^a + B \end{cases} \qquad \text{ger} \quad A = 1 - B$$

$$A = -\frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^a + 1}$$

dvs

$$P_n = \frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^n + \left(\frac{q}{p}\right)^a}{\left(\frac{q}{p}\right)^a + 1} \qquad B = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a}{\left(\frac{q}{p}\right)^a + 1}$$

041123

ITERATIONER

SATS.

givet

① $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ $\quad a,b \in \mathbb{R}$

② finns $k \in [0,1[$ så att

$|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x-y|$ alla $x,y \in [a,b]$

då gäller:

a) finns ett entydigt bestämt $\xi \in [a,b]$ så att $f(\xi) = \xi$

b) för varje $x_0 \in [a,b]$ så gäller

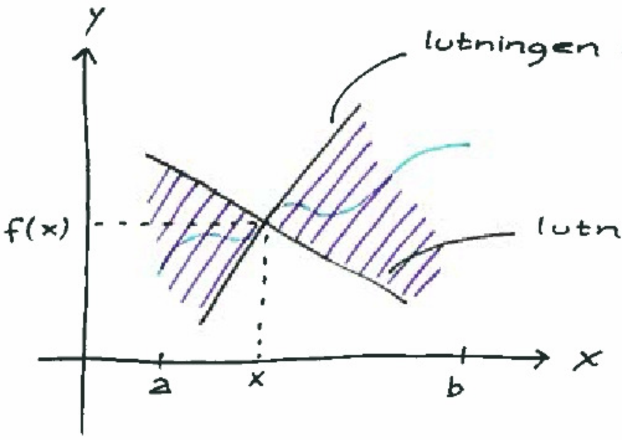
$x_n \longrightarrow \xi \quad , \quad n \longrightarrow \infty$

där $x_{n+1} = f(x_n) \quad , n = 0, 1, 2 \ldots$

ANM:

② liktydigt med att f är Lipschitz-kontinuerlig på $[a,b]$ med en Lipschitzkonstant $k < 1$

en sådan fkt kallas för en kontraktion



de skall hålla sig inom där !!

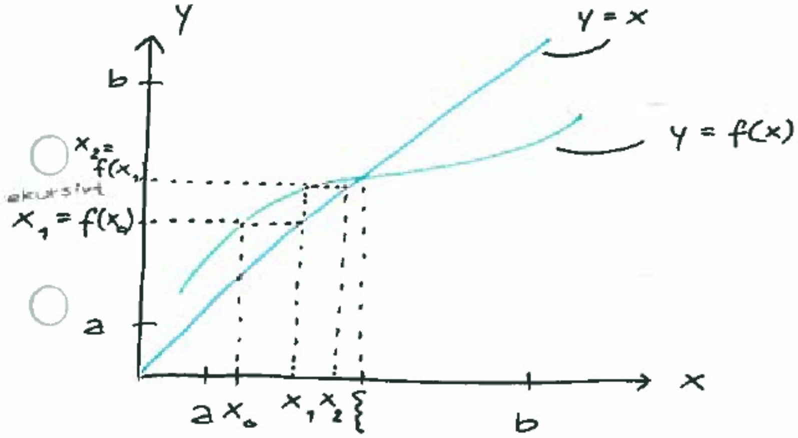
OBSERVERA att om f är deriverbar

$|f(x)-f(y)| = |f'(\eta)|\cdot|x-y|$ för något $\eta = \eta(x,y)$ som ligger mellan x och y

Lagranges medelvärdessats.

Lipschitz kont $\xrightarrow{\text{medför}}$ kont

ANM:

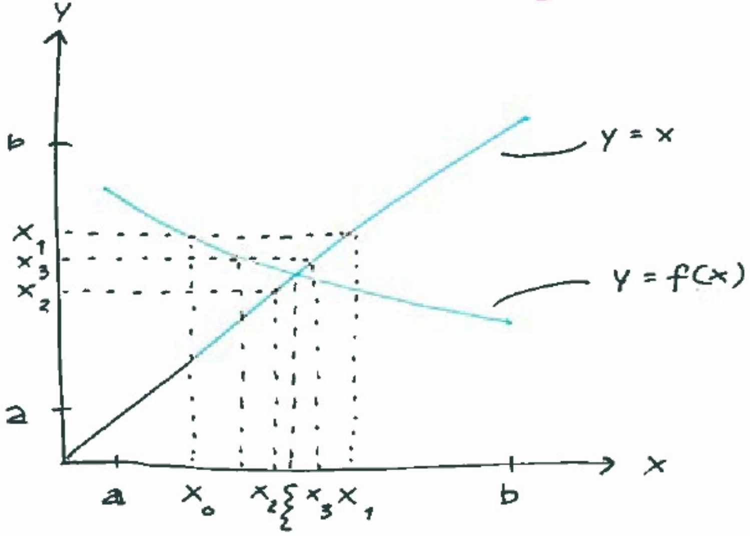


monoton konvergens

$f'(x) \geq 0$
den är ju växande.

vi får en följd av pkt'r som kommer närmare ξ

samma ifall vi startar till höger om ξ



alternerande konvergens

UPPSKATTNINGEN.

① $$|x_n - \xi| = |f(x_{n-1}) - \underset{= \xi}{f(\xi)}| \leq k|x_{n-1} - \xi| \leq \dots \leq k^n|x_0 - \xi|$$

② $$|x_n - \xi| = |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - \xi|$$

$$\leq |x_n - x_{n+1}| + |\underbrace{x_{n+1}}_{f(x_n)} - \underbrace{\xi}_{f(\xi)}|$$

flytta dit oss

$$\leq |x_n - x_{n+1}| + k|x_n - \xi|$$

detta ger

$$|x_n - \xi| \leq \frac{1}{1-k}|x_n - x_{n+1}|$$

OBSERVERA

① $|x_{n+1} - \xi| \leq k|x_n - \xi|$ " linjär konvergens "

② följden $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergerar för varje val av x_0.

exempel.

bestäm de reella rötterna till $x^3 - x - 1 = 0$

det finns exakt en reell rot (själv verksamhet)

vill formulera $x^3 - x - 1 = 0$

som $f(x) = x$

a) $x = \sqrt[3]{x+1} = f_1(x)$

b) $x = x^3 - 1 = f_2(x)$

c) $x = \dfrac{1}{x^2 - 1} = f_3(x)$

olika sätt att få x ensamt. alla ej lika bra.

a) $f_1 : [1,2] \longrightarrow [1,2]$

dvs sätt in $x = 1$

$x = \sqrt[3]{1+1}$

$x = \sqrt[3]{2+1}$

$x^3 - x - 1$ $x = 1$

$-1 < 0$

$x^3 - x - 1$ $x = 2$

$5 > 0$

alltså ligger roten här

är f_1 Lipschitz kont.?

f_1 deriverbar på $[1,2]$

$|f_1'(x)| = \left| \frac{1}{3} \frac{1}{(x+1)^{2/3}} \right| \leq \frac{1}{3}$ alla $x \in [1,2]$

SVAR:

jajjamensan, Lipschitzkonstant $k = \frac{1}{3}$

SATSEN ovan ger att f_1 har en entydigt bestämd fixpkt $\xi \in [1,2]$

$\xi = f_1(\xi)$

för varje val av $x_0 \in [1,2]$ gäller

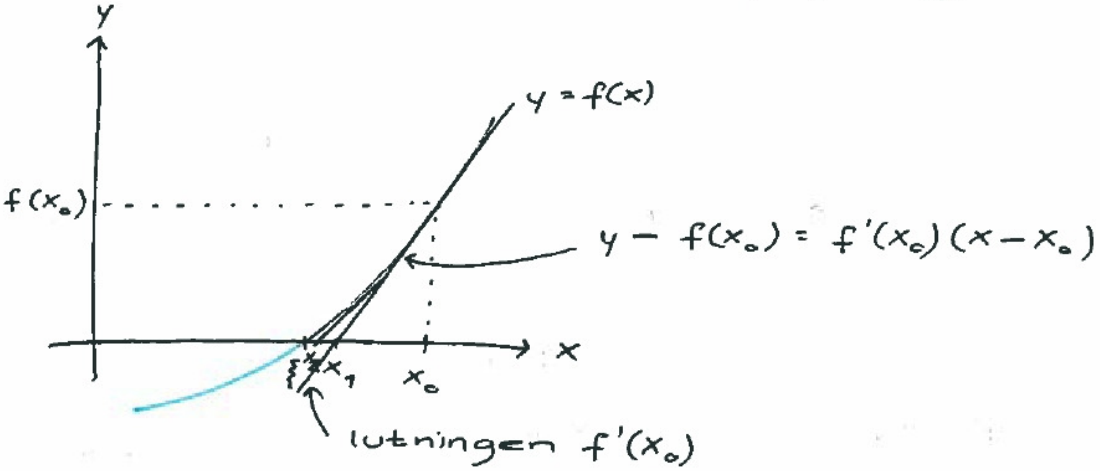
$x_n = f(x_{n+1}) \longrightarrow \xi, \quad n \longrightarrow \infty$

om $f'(x) > 1$ t.ex.

kan kolla på den inversa fkt!

Newton-Raphsons metod.

vi vill hitta rötter till $f(x) = 0$



alltså

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \equiv g(x_0)$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

betrakta följden $(x_n)_{n=0}^{\infty}$

där $x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $n = 0, 1, 2 \ldots$

exempel. (forts)

$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$

algoritmen : välj x_0

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

i vårt exempel

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 - 1} \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

vi vet

$f(x) = 0$ har exakt 1 reellt nollställe ξ

och detta ligger $1 < \xi < 2$

KONVERGENSEN för $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ för $f \in C^2$ dvs 2 ggr deriverbar.

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2} f''(\eta_n)(\xi - x_n)^2 \quad (1)$$

för något η_n mellan x_n och ξ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (2)$$

(1) och (2) ger

$$\left|x_{n+1} - \xi\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\eta_n)}{f'(x_n)}\right| \cdot |x_n - \xi|^2$$

vi får följande resultat:

antag att f, f' och f'' kontinuerliga fkt på intervall I. antag att x_n, x_{n+1} och $\xi \in I$.

antag att $|f''(x)| \leq K$, $x \in I$

och

$0 < L \leq |f'(x)|$ alla $x \in I$

då gäller

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{K}{2L} |x_n - \xi|^2$$

kvadratisk konvergens

antag vidare att $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ligger i intervallet I och $0 < L \leq |f'(x)| \leq M$ alla $x \in I$.

då gäller:

$$|x_n - \xi| \leq \frac{M}{L} |x_{n+1} - x_n|$$

eftersom

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| = \frac{1}{|f'(x_n)|} |f(x_n) - f(\xi)|$$

$$\overset{\substack{\text{MVS} \\ \Downarrow}}{=} \frac{1}{|f'(x_n)} |f'(\mu_n)| |x_n - \xi|$$

alltså

$$|x_n - \xi| = \frac{|f'(x_n)|}{|f'(\mu_n)|} |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{M}{L} |x_{n+1} - x_n|$$

för $n = 0, 1, 2 \ldots$

anm:

antag att man vill hitta rötter till $g(x) = h(x)$

sätt $f(x) = g(x) - h(x)$ alt. $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} - 1$

NUMERISKA SERIER $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $\quad a_k \in \mathbb{R}$

$k = 1, 2, \ldots$

betrakta partialsummorna

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad n = 1, 2 \ldots$$

vi får en talföljd $(S_n)_{n=1}^{\infty}$

Def.

vi säger att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar och har summan s om talföljden $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar och har gränsvärdet s.

annars säger vi att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar

exempel.

partialbråks uppdelning yo.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \qquad \text{vi ser } \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

detta ger

$$\boxed{S_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) \cancel{+} \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) \cancel{+} \ldots \cancel{+} \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+}\right.$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1, \quad n \longrightarrow \infty$$

slutsats:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergerar m. summan 1

EXEMPEL.

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ detta ger:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = -1+1-1+1-1+1+\ldots+(-1)^n$$

dvs $= \begin{cases} 0 & n \text{ jämnt} \\ -1 & n \text{ udda} \end{cases}$

slutsats:

serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ divergerar

SATS: ($\boxed{\text{nödvändigt}}$ men ej tillräckligt villkor för konvergens)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerar} \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

ty $a_k = S_k - S_{k-1}$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (S_k - S_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = 0$$

⇧

$\lim_{n\to\infty} S_n$ existerar

EXEMPEL.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

⇩

GROV UPPSKATTNING

091124. **NUMERISKA SERIER.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \qquad a_k \in \mathbb{R}, \text{ alla } k$$

serien konvergerar om talföljden $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar då $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ $n = 1, 2, 3 \dots$

om serien konvergerar

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n \quad \text{kallas seriens summa.}$$

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

SATS (nödvändigt villkor för konvergens)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerar } \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} a_k \longrightarrow 0, \; k \longrightarrow \infty$$

ex,

harmoniska serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad \text{här är } a_k = \frac{1}{k} \underset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$?

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \frac{1}{9} + \dots$$

dvs
större än
minsta ggr 2

$$\dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \dots + \frac{1}{2^k + 2^k}\right)}_{> \frac{1}{2^{k+1}} \cdot 2^k = \frac{1}{2}}$$

vi får $s_n \longrightarrow \infty$
då $n \longrightarrow \infty$

alltså

divergerar

ANM:

om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar så

konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ och $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k)$

$\lambda \in \mathbb{R}$

ÅTERFÖR konvergens på partialsummor!

sätt $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ och $w_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$

$n = 1, 2, \ldots\ldots$

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = s_n + \sigma_n$$

associativ lag.

men $s_n \xrightarrow[n \to \infty]{} s$ och $\sigma_n \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} \sigma$

eftersom de 2 båda konvergerar, alltså

$w_n \longrightarrow s + \sigma$, $n \longrightarrow \infty$

summan = summan av a_k + summan av b_k

ANM:

givet serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och ett positivt heltal

p, då gäller

$$\sum_{k=\underbrace{p}_{\text{EN BIT FRAM}}}^{\infty} a_k \text{ konvergerar} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerar}$$

DET ÄR SVANSEN SOM GÖR'T!

TALFÖLJDER

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbb{R}$ alla n

vi säger att

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ växande om $x_n \leq x_{n+1}$ för $n = 1, 2, \dots$

strängt väx. $x_n < x_{n+1}$

avtagande $x_n \geq x_{n+1}$

strängt avt. $x_n > x_{n+1}$

monoton om växande/avtagande

strängt mon. strängt väx/avt.

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uppåt begränsad om finns $M \in \mathbb{R}$ så $x_n \leq M$ alla n

nedåt beg. $x_n \geq M$ alla n.

begränsad ⇨ både uppåt & nedåt.

SATS.

antag $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton

då gäller:

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar OMM $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ är begränsad.

OBS.

antag $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ växande

$X = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$

visa $\Longrightarrow$

antag att $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar

ska visa: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ begränsad

alltså:

finns $x \in \mathbb{R}$ så att för varje $\varepsilon > 0$

finns N positivt heltal så

$n \geq N \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$

välj $\varepsilon = 1$ då finns N ⇨

så att $n \geq N \Longrightarrow |x_n| = |(x_n - x) + x| \leq |x_n - x| + |x|$

alltså $\leq 1 + |x|$

$|x_n| \leq \max(|x_1|, |x_2|, \dots |x_{N-1}|, 1 + |x|) \in \mathbb{R}$

alla $n = 1, 2, \dots$

alltså

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ begränsad

visa $\Longleftarrow$

antag att $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ begränsad följd

visa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar

medför att $\mathbb{X}$ uppåt begränsad

då är $\underbrace{\sup \mathbb{X}}_{\text{den minsta majoranten}} \in \mathbb{R}$

övre begränsningen till $\mathbb{X}$

exempel.

$A = \{x \in \mathbb{R} ; x < 1\}$

$\sup A = 1$

$B = \{x \in \mathbb{R} ; x \leq 1\}$

$\sup B = 1 = \max x \ (\in B)$

sätt $x = \sup \mathbb{X}$

påstående: $x_n \longrightarrow x, \ n \longrightarrow \infty$

ex. 10 (sid 62)

$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ def. av

$a_0 = b$ ngt $b > 0$

$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ konvergerar ?

se bok. dvs om begränsad osv.

STIRLINGS FORMEL

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1+\varepsilon_n) \qquad \text{där } \varepsilon_n \longrightarrow 0\,,\ n \longrightarrow \infty$$

Lemma:

$$\sqrt[n]{a} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad \text{där } a>0 \text{ eftersom}$$

$$\sqrt[n]{a} = e^{\underbrace{\frac{1}{n}\ln a}_{\text{exponent går mot } 0}} \longrightarrow e^0 = 1\,,\ n \longrightarrow \infty$$

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1\,,\ n \longrightarrow \infty \quad \text{eftersom } \frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\frac{a^n}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{där } a \in \mathbb{R} \quad \text{eftersom } \frac{a^n}{n!} = \underbrace{\left(\frac{a}{1}\,\frac{a}{2}\,\frac{a}{3}\cdots\frac{a}{p}\right)}\cdot\frac{a}{p+1}\cdots\frac{a}{n}$$

där p är det första heltal sådant att $|a| \le p$

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| \le \frac{|a|^p}{p!}\cdot\frac{|a|}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{då } n \longrightarrow \infty$$

POSITIVA SERIER.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{där } a_k \ge 0 \text{ alla } k$$

speciellt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n+1} a_k = S_{n+1} \qquad n = 1, 2, \dots$$

dvs $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ bildar en växande talföljd

satsen (för monoton talföljd gäller talföljd konvergerar OMM talföljd begränsad)

medför

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar OMM $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ begränsad

exempel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

vi observerar:

$$0 < \frac{1}{k^2} < \boxed{\frac{1}{k(k-1)}} \qquad k = 2, 3, 4 \ldots$$

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

alltså:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots \cancel{+} \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2 \qquad \text{alla } n$$

dvs partialsummorna till $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ bildar en begränsad talföljd **DVS. konvergerar.**

benöver ej räkna ut g.v. här ju

INGE... nej

INTEGRALKRITERIET FÖR POSITIVA SERIER.

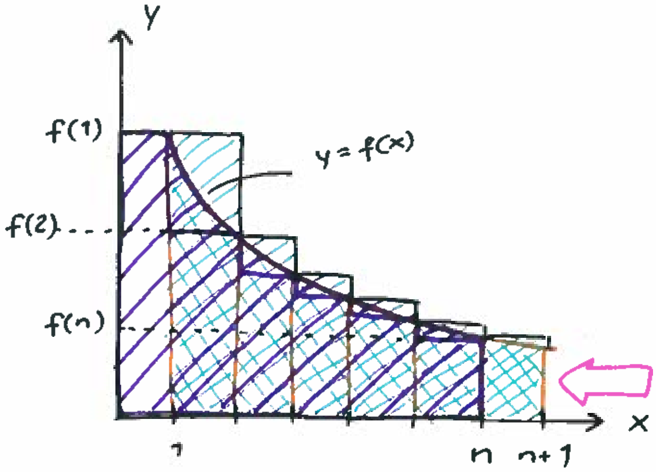
antag att $f : [1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ är en avtagande fkt.

då gäller

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ är konvergent OMM

$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergent.

BEVIS:



fixera positivt heltal n

▨ $= \sum_{k=1}^{n} f(k)$ identifiera med en area!

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx$$ ▨

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \underbrace{f(1) + \int_{1}^{n} f(x)\,dx}_{\text{DVS skjutit åt vänster}}$$ ▨

alltså

1 högre än

vad man summerar i serien.

$$\underbrace{\int_{1}^{n+1} f(x)dx}_{\text{konvergerar då } n \longrightarrow \infty} \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_{1}^{n} f(x)dx$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

alltså $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ konvergerar OMM $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergerar.

ex. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p}}$

fkt associerar m. serien

$f(x) = \frac{1}{x^{p}}$ $x \geq 1$

$\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ konvergent om $p > 1$

NUMERISKA SERIER

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad a_k \in \mathbb{R}, \text{ alla } k$$

Positiva serier $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad a_k \geq 0 \text{ alla } k.$

ifall partialsumman konvergerar.

HUVUDSATS FÖR POS. SERIER.

antag $a_k \geq$ alla k

då gäller

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar OMM talföljden $(s_n)_{n=1}^{\infty}$

där $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ är begränsad

INTEGRALKRITERIET.

antag $f : [1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ avtagande

då gäller $(x \geq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergerar OMM

$\displaystyle\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerar

Dessutom

KOLLA IN GRAFEN.

$$\int_{1}^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_{1}^{n} f(x)\,dx + f(1)$$

arean under

skjut vänster

$n = 1, 2, \ldots$

exempel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

klart att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ divergerar då $p \leq 0$

då $\dfrac{1}{k^p} = k^{-p} \not\longrightarrow 0, \; k \longrightarrow \infty$

(nödvändigt villkor konvergens)

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är att $a_k \longrightarrow 0, \; k \longrightarrow \infty$

antag $p > 0$ sätt $f(x) = \frac{1}{x^p}$ $x \geq 1$

f då positivt och avtagande för $x \geq 1$

och $f(k) = \frac{1}{k^p}$. konvergerar $\int_1^{\infty} f(x)dx$?

BETRAKTA

för $R > 1$

$$\int_1^R f(x)dx = \int_1^R x^{-p}dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p}\right]_1^R & p \neq 1 \\ \left[\ln|x|\right]_1^R & p = 1 \end{cases}$$

GER: $= \begin{cases} \frac{1}{1-p}\left(R^{1-p} - 1\right) & p \neq 1 \\ \ln R & p = 1 \end{cases}$ alltså vill: att R ska vara "nere". $\longrightarrow \infty$

konvergens för $\int^{\infty} f(x)dx$ för $p > 1$

Andra kriterier för konvergens för positiv serier.

Jämförelsekriteriet.

som för integraler alltså, fast summor! JUST pos. serier I guess!

$0 \leq a_k \leq b_k$ alla k

då gäller

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergerar ty ; sätt $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k = \sigma_n \quad n = 1,2,3$

antag

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar.

huvudsatsen för POSITIVA SERIER ger

att $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ begränsad.

men då är $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ också begränsad

→ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar

REFERENSSERIER.

① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergens OMM $p > 1$

② $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^q}$ konvergens OMM $q > 1$

③ $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ konvergens OMM $|r| < 1$
(geometrisk serie)

exempel.

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)$ konvergens?

TÄNK
Mclaur? yo. — dvs blir ju

$\frac{1}{k} + \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^2}{2}$

(tar ut.

Jämförelsekriteriet på gränsvärdeform.

antag $0 \leq a_k \leq b_k \neq 0$ alla k.

antag vidare ist. $0 \leq a_k, b_k > 0$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = A > 0$$

då gäller att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ antingen

KONVERGERAR / DIVERGERAR båda två !!!

ty:

eftersom $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = A > 0$

finns positivt heltal N så att

$$\left| \frac{a_k}{b_k} - A \right| < \frac{1}{2}A \quad \text{för } k \geq N$$

dvs.

$$-\frac{1}{2}A < \frac{a_k}{b_k} - A < \frac{1}{2}A \quad \text{för } k \geq N$$

$$\boxed{\frac{1}{2}A < \boxed{\frac{a_k}{b_k}} < \frac{3}{2}A}$$

$b_k > 0$ alla k.

$$\frac{1}{2}Ab_k < a_k < \frac{3}{2}Ab_k \quad \text{alla } k \geq N$$

om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar så $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{2}Ab_k\right)_{n=1}^{\infty}$

begränsad. då är $\left(\sum_{k=1} a_k\right)_{n=1}^{\infty}$ begränsad

alltså $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar

OCH TVÄRTOM

ex.
konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$?

sätt $a_k = \frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ $k=1,2,\ldots$

vi har

$$a_k = \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{k^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right) \qquad k=1,2,3\ldots$$

sätt $b_k = \frac{1}{k^2}$ $\qquad k=1,2\ldots$

då gäller

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{k^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)}{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) \xrightarrow[k \longrightarrow \infty]{} \frac{1}{2}$$

vidare

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ konvergerar

JMFKRIT PÅ G.V. FORM ger att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar.

ex. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt[k]{k}-1\right)$

sätt

$a_k = \sqrt[k]{k} - 1 \longrightarrow 0$ då $k \longrightarrow \infty$

DO IT!!

vi har $a_k = e^{\ln(\sqrt[k]{k})} - 1 = e^{\frac{1}{k}\ln k} - 1$

$$= \left\{ e^t \underset{t\to 0}{=} 1 + t + \mathcal{O}(t^2) \right\} = \frac{1}{2}\ln k + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\ln k}{k}\right)^2\right)$$

BETRAKTA $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ där $b_k = \frac{\ln k}{k}$

vi har $\frac{a_k}{b_k} = \dfrac{\frac{\ln k}{k} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\ln k}{k}\right)^2\right)}{\frac{\ln k}{k}} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln k}{k}\right) \longrightarrow 1,$

$k \longrightarrow \infty$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ divergerar.

se på REFERENS!

$q = -1$

ALLTSÅ:

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k} - 1\right)$ divergerar enligt jmf. kriteriet på g.v. form.

ROT / KVOTKRITERIERNA:

givet $a_k \geq 0$ alla k.

① antag att $\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} = A$

då gäller:

$A < 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar

$A > 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar

($A = 1$ ger ej info om konvergens)

② antag att $\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = B$

då gäller:

$B < 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar

$B > 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar

$B = 1$ same.

ex.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

p = 1 div.

p = 2 konv.

$$p = 1 \quad \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \longrightarrow \underset{\substack{\text{dvs} \\ A=1}}{\boxed{1}} \quad k \longrightarrow \infty$$

eJ INFO NOG.

$$p = 2 \quad \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^2} \longrightarrow 1, \quad k \longrightarrow \infty$$

Bevis av Rotkriteriet.

antag att $\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} = A$

$\boxed{\text{antag } A < 1}$. fixera $r \in]A, 1[$

då finns N positivt heltal så att

$$\sqrt[k]{a_k} < r < 1 \qquad \text{alla } k \geq N$$

$$\text{dvs} \quad a_k \textcircled{<} r^k \qquad \text{alla } k \geq N$$

men $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ konvergerar då $r \in]0, 1[$

alltså $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar enligt jmf. kriterium

$\boxed{\text{antag } A > 1}$ fixera $\tilde{r} \in]1, A[$

då finns N pos. heltal så att

$$\sqrt[k]{a_k} > \tilde{r} \qquad \text{alla } k \geq N$$

$$\text{dvs.} \quad a_k > \tilde{r}^k \qquad \text{alla } k \geq N$$

serien $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{r}^k$ divergerar då $\tilde{r} > 1$

$\Longrightarrow$ serien $\sum^{\infty} a_k$ div. jmf. krit.

SERIER MED TERMER MED GODTYCKLIGT TECKEN.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $a_k \in \mathbb{R}$, alla k.

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar $\Longrightarrow$ $a_k \to 0$, $k \to \infty$

- $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergerar}}_{\text{absolutkonvergent i.s.f.}}$ $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverge

ex. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ är ej absolutkonvergent

eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^{k+1} \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergerar

konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$?

Leibniz konvergenskriterium

(för alternerande serier)

antag att

1) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \dots$

2) $a_k \to 0$, $k \to \infty$

då gäller

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \underbrace{a_k}_{\geq 0}$ konvergerar

DVS. ej abs. konvergent MEN konvergent!

SERIE $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ som är konvergent ej absolutkonvergent kallas betingat konvergent

ANM:

givet en betingat konvergent serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

en omordning σ av $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ges av en permutation av

$(1, 2, \ldots\ldots k, \ldots\ldots)$ dvs. $\sigma : \{1, 2 \ldots, k, \ldots\} \longrightarrow \{1, 2 \ldots, k, \ldots\}$

sådan att

① $\sigma(k) = \sigma(l) \Longrightarrow k = l$

② för varje positivt heltal l finns positivt heltal k så att $l = \sigma(k)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(k)} = b_{\sigma(1)} + b_{\sigma(2)} + \ldots\ldots + b_{\sigma(k)} + \ldots\ldots$$

det gäller att för varje $A \in \mathbb{R}$ finns en omordning σ så att

$\sum_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(k)}$ konvergerar med samma A.

Även, det finns omordningar σ sådan att $\sum_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(k)}$ divergerar

ANM:

givet en abs. konv. serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

gäller att $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ konvergent

för varje σ och $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$

har samma summa.

SERIER MED GODTYCKLIGT TECKEN.

SATS: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abs. konv. (dvs $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konv.)

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.}$$

Bevis:

$$a_k = (|a_k| + a_k) - |a_k| \quad k = 1, 2 \ldots$$

alltså konv.

gäller $0 \leq |a_k| + a_k \leq \underbrace{2|a_k|}_{\text{konv.}}$

eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konv. så konv. $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + a_k)$

medför

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \Big((|a_k| + a_k) - |a_k| \Big) \text{ konv.}$$

SATS: (Leibniz konv. krit) —— use when: varannan ⊕ ⊖ typ.

antag

① $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \ldots$

② $a_k \longrightarrow 0, \; k \longrightarrow \infty$

då gäller

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k \text{ konv.}$$

Bevis: för $n = 1, 2, \ldots$

$$S_{2n} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_5 - a_6)}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\geq 0}$$

$$= S_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} \geq S_{2n-2}$$

så $(S_{2n})_{n=1}^{\infty}$ en växande följd

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n}$$

$$= a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\geq 0} - a_{2n} \leq a_1$$

ALLTSÅ $(S_{2n})_{n=1}^{\infty}$ uppåt begränsad ⇒ dvs. sats om monoton talföljd.. konv!

vi har $S_{2n} \longrightarrow S, \; n \longrightarrow \infty$

dessutom

$$S_{2n+1} = \underbrace{S_{2n}}_{\substack{\longrightarrow S,\\ n\longrightarrow\infty}} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\substack{\longrightarrow 0,\\ n\longrightarrow\infty}} \longrightarrow S, \; n \longrightarrow \infty$$

alltså:

$S_n \longrightarrow S, \; n \longrightarrow \infty$

dvs.

serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ konv.

exempel.

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2}$ serien är absolutkonvergent ty $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\text{abs.beloppet ju.}}$ konv.

exempel.

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ ej abs.konv då $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ div.

försök Leibniz krit. vi har $a_k = \frac{1}{k}$

det gäller $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \dots$ $k = 1, 2, \dots$

och $a_k \longrightarrow 0, \; k \longrightarrow \infty$

serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ konv. enligt Leibniz krit.

exempel.

$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k+(-1)^k}$ här är $a_k = \frac{1}{k+(-1)^k}$ $k = 2, \dots$

vi har $0 < a_k \longrightarrow 0, \; k \longrightarrow \infty$

men $a_{2n} = \frac{1}{2n+(-1)^{2n}} = \frac{1}{2n+1}$

$a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1+(-1)^{2n+1}} = \frac{1}{2n} > a_{2n}$

alltså $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ ej avt. kan ej använda Leibniz betrakta

$$(-1)^{2n-1} a_{2n} + (-1)^{2n} a_{2n+1} = -\underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{} + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{} = \frac{1}{2n(2n+1)}$$

RÄKNADE UT NYSS, YO.

$n = 1, 2, 3, \dots$

ALLTSÅ:

$$-S_{2n} = \sum_{k=2}^{2n+3} (-1)^{k-1} a_k = \underbrace{a_2 - a_3}_{\frac{1}{2\cdot1(2\cdot1+1)}} + \underbrace{a_4 - a_5}_{\frac{1}{2\cdot2(2\cdot2+1)}} + \dots\dots + \underbrace{a_{2n+2} - a_{2n+}}_{\frac{1}{2(n+1)(2(n+1)+1)}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k(2k+1)} \quad \underset{n \longrightarrow \infty}{\text{konvergerar}} \quad \text{ty} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \ \text{konv.}$$

alltså $S_{2n} \longrightarrow S$, $n \longrightarrow \infty$ för ngt $S \in \mathbb{R}$

följer att $S_n \longrightarrow S$, $n \longrightarrow \infty$

se FÖRRA..... då $a_n \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$

POTENSSERIER.

specialfall av s.k. fkt. serier

$f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ $x \in I$ intervall

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad x \in I$$

FRÅGOR:

① konv. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ för $x \in I$?

② $\underbrace{f_k \in C(I)}_{}$ $k = 1, 2, \dots$ $\overset{?}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \in C(I)$

f_k kont. fkt på I

③ f_k deriverbar på I, $k = 1, 2, \dots$

$$\underset{?}{\Longrightarrow} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$$

④ $f_k \in C(I)$ $k = 1, 2, \dots$

$$\underset{?}{\Longrightarrow} \int_I \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I f_k(x)\,dx$$

KASTAT OM !!

Taylorserier.

exempel.

$f(x) = e^x$

Maclaurins formel. $$e^x = \overbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}^{\text{partialsummorna } S_{n+1}} + R_{n+1}(x)$$

där $$R_{n+1}(x) = \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \underbrace{e^{\theta x}}_{\text{begr. för varje fixt } x}}_{} \qquad 0 \leq \theta \leq 1$$

$\longrightarrow 0 , n \longrightarrow \infty$

för varje fixt $x \in \mathbb{R}$

betrakta

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$ konvergerar för varje $x \in \mathbb{R}$

exempel.

$f(x) = \ln(1+x)$ $\qquad x > -1$

Maclaurin's

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x)$$

där $$R_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^n}$$

$0 \leq \theta \leq 1$

för $x \in]-1, 1[$

konv.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

betrakta

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$ divergerar för $x = -1$

konv. för $x = 1$ enligt Leibniz.

en **POTENSSERIE** är en serie på formen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $\left(\text{eller} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k\right)$

där $a_k \in \mathbb{R}$, $k=0,1,2,\dots$ $x \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

SATS: (potensseriens konvergens)
för en potenserie gäller exakt 1 av följande 3 fall:

① potensserien konvergerar endast för $x=0$

② — " — absolut konvergent för alla $x \in \mathbb{R}$

③ finns $R>0$ sådant att potentserien är abs. konv. för alla $x \in \mathbb{R}$ så att $|x|<R$ och potensserien div. för alla $x \in \mathbb{R}$ så $|x|>R$.

---

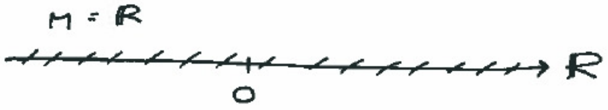
sätt $M = \left\{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ konv.}\right\}$

vi har $0 \in M$ för varje potensserie

fall 1

typ $R=0$

fall 2



"$R = \infty$"

fall 3

$M = [-R,R]$ eller $]-R,R[$ eller $[-R,R[$ eller $]-R,R]$

hur beräkna R? KVOTKRITERIET MED ROTKRITERIET $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$

betrakta $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ antag att $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existera

då gäller $R = \frac{1}{H}$ där kalla: H

$R = \infty$ om $H=0$

och $R=0$ om "$H=\infty$"

del av antagan

exempel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k\cdot 2^k} \qquad \text{dvs} \quad a_k = \frac{1}{k\cdot 2^k}$$

bestäm konvergens intervall H

bestäm R = konvergensradien.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \left(\frac{1}{k\cdot 2^k}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{k}}}\cdot\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad k \longrightarrow \infty$$

alltså $H = \frac{1}{2}$ $\qquad R = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \boxed{2}$

fall $x = 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k\cdot 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \quad \text{divergerar}$$

fall $x = -2$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^k}{k\cdot(-2)^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{k}$

konv. enligt Leibniz konv. krit.

VILL
JU
KOLLA
OM
ÖPPET
/STÄNGT!

SLUTSATS: $M = [-2, 2[$

OMM $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k=1}^{\infty}$ ej konvergerar då $k \longrightarrow \infty$

så byt ut $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ med

$$\lim_{k\to\infty} \boxed{\sup} \sqrt[k]{|a_k|}$$

där $\lim\limits_{k\to\infty} \boxed{\sup}\left\{\sqrt[l]{|a_l|} : l = k, k+1, k+2 \dots\right\}$

091201 !!!!

POTENSSERIER

dvs för potensseries konvergens

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

3 fall:

x=0, abs. konv hela ℝ, visst R > 0 där

R=0 "R=∞" konv. $|x| < R$

div $|x| > R$

dvs $[-R,R]$ eller $]-R,R[$ eller $]-R,R]$ eller $[-R,R[$

R konv. radie

$$M = \left\{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ konv.}\right\}$$ konv. område / intervall

Bevis:

hjälpsats:

antag $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ konv.

då gäller

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ abs. konv. för alla $x \in \mathbb{R}$ där $|x| < |x_0|$

eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ konv. gäller (nödvändigt villkor)

$$|a_k x_0^k| \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty$$

speciellt finns pos. heltal N så

$|a_k x_0^k| < 1$ för $k \geq N$

fixera $x \in \mathbb{R}$ med $|x| < |x_0|$

$$|a_k x^k| = \underbrace{|a_k x_0^k|}_{\substack{\text{då } k \geq N \\ \text{är ju } < 1}} \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \leq \left|\frac{x}{x_0}\right|^k$$

Då konv. $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ enligt jmf. krit dvs ABS. KONV.

vi vet $\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^k$ konv. då $\underbrace{\left|\frac{x}{x_0}\right|}_{\text{större än}} < 1$

(geometrisk serie)

M def. ovan

vi har $0 \in M$

- om M obegränsad :

fixera $x \in \mathbb{R}$

M obegränsad medför att finns $x_0 \in M$

så att $|x| < |x_0|$

hjälpsats ger $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ abs. konv.

vi har fall ② dvs $M = \mathbb{R}$

- om M begränsad :

sätt $R = \sup M$

då $0 \in M$ gäller $R \geq 0$

antag $R = 0$: antag $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_{\textcircled{1}}^{k}$ (kan hitta nåt x_1 då den är) konv. ngt $x_1 \neq 0$

då gäller $\frac{|x_1|}{2} \in M$ enligt hjälpsats

alltså : $M = \{0\}$ MOTSÄGELSE.

då $R = 0$

antag $R > 0$:

fixera $x_1 \in \mathbb{R}$ med $|x_1| < R$

finns $x_0 \in M$ där $|x_1| < x_0$

hjälpsats ger $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k$ abs. konv.

ALLTSÅ: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_2^k$ div.

fixera $x_2 \in \mathbb{R}$ med $|x_2| \underline{\underline{>}} R$

antag $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_2^k$ konv.

vill ha ett tal mellan $|x_2|$ och R

hjälpsats ger $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{|x_2| + R}{2}\right)^k$ konv.

alltså $R < \frac{|x_2| + R}{2} \in M$ MOTSÄGELSE. dvs större än R...

ROTFORMELN FÖR ATT BERÄKNA R

givet $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ antag att

$$\sqrt[k]{|a_k|} \longrightarrow H, \quad k \longrightarrow \infty$$

gäller $R = \frac{1}{H}$ där $R = 0$ om $H = \infty$

$R = \infty$ om $H = 0$

$$\sqrt[k]{|a_k x^k|} \longrightarrow H|x|$$

> 1 k stort

dvs $a_k x^k \not\longrightarrow 0$, $k \longrightarrow \infty$

Bevis av ROTKRIT. för R.

vi har att

$$\sqrt[k]{|a_k|} \longrightarrow \underbrace{H}_{\text{kan vara } 0,\ \infty,\ \text{eller } R}, \quad k \longrightarrow \infty$$

antag att $0 \neq H \in \mathbb{R}$

betrakta pos. serien $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$

det gäller

$$\sqrt[k]{|a_k x^k|} = \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x| \longrightarrow H|x| \quad \text{för } x \in \mathbb{R}$$

ROT. KRIT. ger $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ konv om $H|x| < 1$

dvs $|x| < \frac{1}{H}$

div om $H|x| > 1$ dvs $|x| > \frac{1}{H}$

men...

om $H|x| > 1$ finns ett pos. heltal N så att

$$\sqrt[k]{|a_k x^k|} > 1 \quad \text{för alla } k \geq N$$

DVS. $|a_k x^k| > 1$ för alla $k \geq N$, medför

$a\ x^k \not\longrightarrow 0$

alltså, om $H|x| > 1$ dvs $|x| > \frac{\ }{H}$ div.

detta ger $R = \frac{1}{H}$ $\qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

enligt sats om potensseriers konvergens.

ANTAG $H = 0$ $\qquad R = \infty$

dvs. konv.

ANTAG $H = \infty$ $\qquad R = 0$

exempel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{5^k \cdot k} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot x^l \qquad a_k = \frac{(-1)^k}{5^k \cdot k}$$

där $a_k = \begin{cases} 0 & l = 2n-1, \quad n = 1, 2, \ldots \\ (-1)^n \frac{1}{5^n \cdot n} & l = 2n, \quad n = 1, 2, \ldots \\ 0 & l = 0 \end{cases}$

här gäller

$$\sqrt[k]{|a_k|} \not\longrightarrow \ldots \qquad k \longrightarrow \infty$$

KNEP: sätt $t = x^2$

potensserie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{5^k \cdot k} t^k$ i variabeln t

beräknar konvergensområdet för

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{5^k \cdot k} \cdot t^k}$$

sätt
$b_k = (-1)^k \frac{1}{5^k \cdot k}$

$$\sqrt[k]{|b_k|} = \sqrt[k]{\left|(-1)^k \cdot \frac{1}{5^k \cdot k}\right|} = \frac{1}{5} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[k]{k}}}_{\to 1,\ k \to \infty} \longrightarrow \frac{1}{5} \qquad k \longrightarrow \infty$$

UPP TILL VISS PKT KANSKE KONV....

SLUTSATS:

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{5^k \cdot k} t^k$ abs. konv. för $|t| < \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$

div $|t| > 5$

dvs ser på intervall"

NU: se på oppet/stangt.

$t=5$ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ konv. enligt Leibniz

$t=-5$ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{5^k \cdot k} (-5)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ div.

alltså konv. området $M = \{ t \in \mathbb{R} : -5 < t \leq 5 \}$

dvs $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{5^k \cdot k} t^k$ konv. OMM $\boxed{-5 < t \leq 5}$

DVS. byt tillbaka...

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{5^k \cdot k} x^{2k}$ konv. OMM $\boxed{-5 < x^2 \leq 5}$

som vill $x^2 > 0$ yo.

alltså $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$

ALLMÄNT:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ betrakta

$$\lim_{k \to \infty} \sup \left\{ \sqrt[\ell]{|a_\ell|} : \ell \geq k \right\}$$

kalla detta gränsvärde $\tilde{H}$ (dvs $\tilde{H}$ kan vara $= \infty$)

då gäller:

$R = \frac{1}{\tilde{H}}$ där R konvergensradien för $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

ex. bestäm konv.området M för $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

där $a_k = \begin{cases} 3^p & k = 2p-1 \quad p = 1, 2, 3 \ldots \\ (-4)^p & k = 2p \quad p = 0, 1, \ldots \end{cases}$

bestäm konvergensradie R

vi vet OM $\sqrt[k]{|a_k|} \longrightarrow H$, $k \longrightarrow \infty$

så $R = \frac{1}{H}$

om ej hur göra då?

det gäller

$$\underbrace{\limsup_{k \longrightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}_{\text{existerar ALLTID.}} = \tilde{H} \qquad \text{medför } R = \frac{1}{\tilde{H}}$$

allmänt $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ talföljd (reella tal)

$$\limsup_{k \longrightarrow \infty} t_k = \lim_{k \longrightarrow \infty} \sup_{n \geq k} t_n$$

OBS. $\sup_{n \geq k} t_m$ avtagande i k.

OBS kan inträffa att

$$\sup_{n \geq k} t_n = \infty \quad \text{alla } n$$

$\limsup_{k \longrightarrow \infty} t_k$ existerar alltid

och kan vara $-\infty$, reellt tal eller $+\infty$

t.ex

$t_k = k$ $\quad t_k = -k$ $\quad t_k = (-1)^k$

sup ∞ $\quad$ sup -1 %? $\quad$ sup 1 iom hoppar 1, −1

ex.

olika då jämn /udda

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sup\left\{ \sqrt[l]{|a_l|} : l \geq k \right\}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sup \left(\left\{ \sqrt[2p]{|a_{2p}|} : 2p \geq k \right\} \cup \left\{ \sqrt[2p-1]{|a_{2p-1}|} : 2p-1 \geq k \right\} \right)$$

$$\sqrt[2p]{|a_{2p}|} = \sqrt[2p]{|(-4)^p|} = \sqrt[2p]{2^{2p}} = 2$$

iom abs. belopp

$$\sqrt[2p-1]{|a_{2p-1}|} = \sqrt[2p-1]{3^p} = 3^{\frac{p}{2p-1}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4p-2}} \longrightarrow \sqrt{3}$$

då $p \to \infty$

$$= \lim_{k\to\infty} \sup \left(\{2\} \cup \left\{ 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4p-2}} : 2p-1 \geq k \right\} \right) = 2$$

iom 2 större än $\sqrt{3}$

alltså $\boxed{R = \frac{1}{2}}$

dela upp serien: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ i 2 serier

nämligen $\sum_{p=0}^{\infty} a_{2p} x^{2p}$ JÄMN. och $\sum_{p=1}^{\infty} a_{2p-1} x^{2p-1}$ UDDA.

bestäm konv. radien för

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{2p} x^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty} (-4)^p x^{2p}$$

sätt $x^2 = t$

potensserie i t $\sum_{p=0}^{\infty} (-4)^p t^p$

denna serie konv. radie

$$\frac{1}{\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{|(-4)^p|}} = \frac{1}{4}$$

vi har $\sum_{p=0}^{\infty} (-4)^p t^p$ abs. konv. för $|t| < \frac{1}{4}$

div för $|t| > \frac{1}{4}$

vi har $\sum_{p=0}^{\infty} (-4)^p x^{2p}$ abs. konv. för $|x| < \frac{1}{2}$

div för $|x| > \frac{1}{2}$

alltså

$\sum_{k=0}^{\infty} (-4)^p x^{2p}$ konv. radie $\frac{1}{2}$

bestäm konv. radie för

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{2p-1} x^{2p-1} = \sum_{p=1}^{\infty} 3^p x^{2p-1} = x \sum_{p=1}^{\infty} 3^p x^{2(p-1)}$$

dvs ett x
kommer
alltid vara

ifall $\boxed{q = p-1}$

$$= x \sum_{\underline{\underline{q=0}}}^{\infty} 3^{\underline{\underline{q+1}}} x^{\underline{\underline{2q}}}$$

sätt $\boxed{t = x^2}$

potensserie i t

$$\sum_{q=0}^{\infty} 3^{q+1} t^q$$

denna serie konv. radien

$$\frac{1}{\lim\limits_{q \to \infty} \sqrt[q]{3^{q+1}}} = \frac{1}{\lim\limits_{q \to \infty} 3^{\frac{q+1}{q}}} = \frac{1}{3}$$

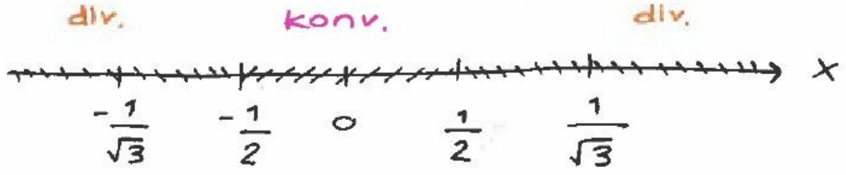
$\sum_{q=0}^{\infty} 3^{q+1} t^q$ är abs. konv. $|t| < \frac{1}{3}$

div. $|t| > \frac{1}{3}$

alltså $\sum_{q=0}^{\infty} 3^{q+1} t^{2q}$

abs. konv $|x^2| < \frac{1}{3}$ dvs $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

div $|x^2| > \frac{1}{3}$ dvs $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$



BÅDA de 2 serierna måste ju konv.!!

alltså $-\frac{1}{2}$ till $\frac{1}{2}$

ej automatisk 2 div serier = div

ex. 1, 1, 1 ...

-1, -1, -1 ... = 0 konv.

MEN detta är ju en potensserie, VET hur det är dvs just 1 intervall.

LÖSNING AV DIFFERENTIALEKV. M. POTENSSERIER.

ex. $\begin{cases} (4-x^2)y'' + y = 0 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0 \end{cases}$ s. 96

ansätt lösning som potensserie

$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ bestämma a_k för små k'n.

SATS om termvis derivering och integrering av potensserier.

antag att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ① har konv. radie $R > 0$

för $x \in]-R, R[$ kalla summan för $f(x)$

gäller: för $x \in]-R, R[$

① $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1}$ ②

② $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ ③

Bevis ... kommer nästa vecka.

antag potensserien har konv.radie $R > 0$.

för $|x| < R$ gäller

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

ANM: gäller att ① ② ③ samma konv. radie !!

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

$$= \{ l = k-2 \} = \sum_{l=0}^{\infty} (l+2)(l+1) a_{l+2} x^{l}$$

detta ger

$$x^2 y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{\boxed{k}}$$

om ggr x^2 tog bort.

$$4y''(x) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^{k}$$

NU kan vi använda denna!!

alltså $(4-x^2)y''(x) + y(x) = 0$

har för $|x| < R$ formen

$$4 \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^{k} - \sum_{\boxed{k=2}}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k} = 0$$

se på
k = 0
k = 1
båda blir ju NOLL !!
gött !!

$$4 \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^{k} - \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[4(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k + a_k\right]x^k = 0$$

detta medför

$$4(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k + a_k = 0$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

NOTERA

$$1 = y(0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \Big|_{x=0} = \underline{\underline{a_0}}$$

sätt in... typ...

$$0 = y'(0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \Big|_{x=0} = \underline{\underline{a_1}}$$

dvs $4(k+2)(k+1)a_{k+2} = 0$

$k = 1$

vi får

$a_k = 0$ för alla $k = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$

då man sätter in a_1 får $a_3 = 0$ osv.

$$a_{k+2} = \frac{k(k-1) - 1}{4(k+2)(k+1)} a_k$$

detta bestämmer a_k för $k = 2n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

får potensserie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$$

de andra udda termerna = 0

vi har

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{k(k-1) - 1}{4(k+2)(k+1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}}{1 + \frac{3}{k} + \frac{2}{k^2}} \xrightarrow[k \to \infty]{} \boxed{\frac{1}{4}}$$

alltså har potensserien $(t = x^2)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$$ ☆ där $b_k = a_k$ $k = 0, 1, 2, \dots$

konv. radien 4

☆ abs. konv. för $|t| < 4$

div. för $|t| > 4$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$ abs. konv. $|x^2| < 4$ dvs $|x| < 2$

div $|x| > 2$ VET: OM ser som

pot. serie fkt, inom $|x| < 2$

vet finns lösning

för pot. serie

ALLTSÅ: R ovan $= 2$

1902. c.

bestäm konv. området för

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k$$

lösning : $a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}$

steg 1.

bestäm konv. radie

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k} = e^{\ln\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]}$$

$$= e^{k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} = \left\{ \ln(1+t) \underset{t \to 0}{=} t + O(t^2) \right\}$$

$$= e^{k\left(\frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)} = e^{1 + O\left(\frac{1}{k}\right)} = e, \ k \longrightarrow \infty$$

alltså $\boxed{R = \frac{1}{e}}$

steg 2.

kolla då $x = \frac{1}{e}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k \Bigg|_{x = \frac{1}{e}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} \left(\frac{1}{e}\right)^k$$

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} \left(\frac{1}{e}\right)^k = e^{k^2 \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - k}$$

$$= \left\{ \ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3), \ t \to 0 \right\}$$

försök med Leibniz konv. krit.

sätt $b_k = \frac{k^k}{k!}\left(\frac{1}{e}\right)^k \quad k = 1, 2 \ldots$

vi får ovan att $b_k \longrightarrow 0, k \longrightarrow \infty$

återstår, undersöka om $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ avtagande.

kika på: skillnad / kvot b_k, b_{k+1}

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(k+1)^{k+\cancel{1}}}{\cancel{(k+1)!}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{\cancel{e}^{k+1}} \frac{\cancel{e^k}}{k^k} = \frac{1}{e}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$

$$= \frac{1}{e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}_{\text{växande följd i } k\text{, går mot } e} = e^{k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - 1}$$

$$= e^{k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) - 1} = e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)}$$

$$= e^{\underbrace{-\frac{1}{2k}\left(1+\underset{\longrightarrow 0}{\boxed{\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)}}\right)}_{\text{blir negativ}}} < 1 \quad \text{för } k \text{ stort.}$$

alltså $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ avtagande fr.o.m ngt k_0

villkor för Leibniz konv. krit uppfyller serien konv.

konv. området $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$

FKTFÖLJDER & FKTSERIER

$S_n(x)$ reellvärda fkt på intervall I

$n = 1, 2, \ldots$

$(S_n(x))_{n=1}^{\infty}$ fkt. följd

$f_k(x)$ reellvärd fkt på intervall I

$k = 1, 2, \ldots$

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ fkt. serie $\quad f_k(x) = a_k x^k$

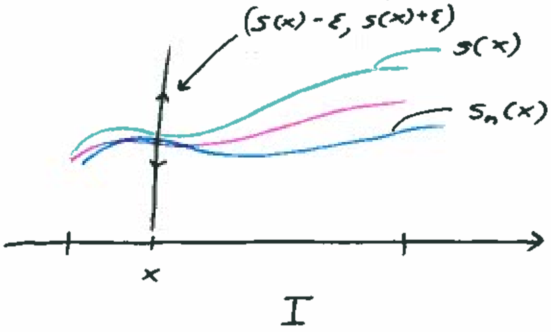
$k = 1, 2, \ldots$

ger potensserie

Konvergensbegrepp för fkt. följd.

vi säger $(S_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar pktvis mot $s(x)$ på I om $\forall x \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(x, \varepsilon)$

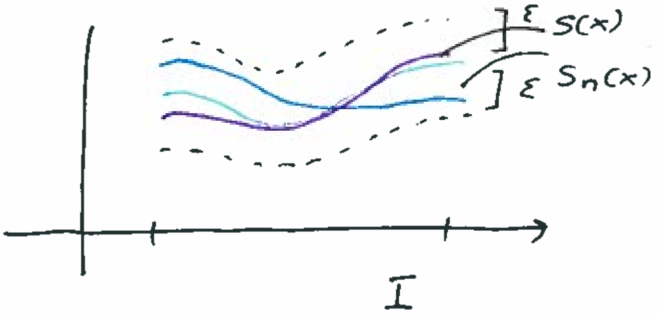
$$n \geq N \Longrightarrow |S_n(x) - s(x)| < \varepsilon$$



dvs de andras grafer går igenom "grind".

vi säger $(S_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt mot $s(x)$ på I om $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \forall x \in I$

$$n \geq N \Longrightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$



så länge som $n \geq N$ så ligger grafer inom "band"

alt. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$ $\quad n \geq N \Longrightarrow \sup_{x \in I} |S_n(x) - S($ $< \varepsilon$

ANM: $S_n \longrightarrow S$

likformigt på $I \Longrightarrow S_n \longrightarrow S$

$\not\Longleftarrow$ punktvis på I

DVS. omvändning gäller ej...

ex. $S_n(x) = \dfrac{n^3 x}{n^4 x^2 + 1}$ $x \in [0,1] = I$

$n = 1, 2, \ldots.$

Vi ser att $S_n(0) = 0 \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$

för $0 < x \leq 1$ $S_n(x) = \dfrac{n^3 x}{n^4 x^2 + 1} \longrightarrow 0, \; n \longrightarrow \infty$

sätt $\boxed{S(x) = 0}$

alltså $S_n \longrightarrow S$ punktvis på $[0,1]$

bestäm $\max\limits_{x \in [0,1]} S_n(x)$

derivera $S_n(x)$

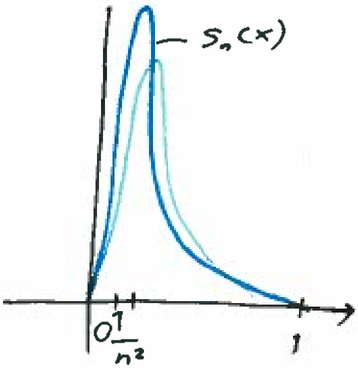
$$S_n'(x) = \frac{1}{(n^4x^2+1)^2}\left[n^3(n^4x^2+1) - n^3x(n^4 2x)\right]$$

$$= \frac{1}{(n^4x^2+1)^2}\left[n^3 - x^2(2n^7 - n^7)\right]$$

JUST!! $S_n(x)$!!

$$= \frac{n^3}{(n^4x^2+1)^2}\left[1 - x^2 n^4\right]$$

$$S_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n^3 \frac{1}{n^2}}{n^4 \cdot \frac{1}{n^4} + 1} = \frac{n}{2}$$



DVS: $S_n \not\longrightarrow S$ likformigt på $[0,1]$

ex. $s_n(x) = e^{-nx}$ $\quad x \in [0,1]$

$$s(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \in]0,1] \end{cases}$$

i fall
likf. konv.
hade
fkt. bevarat....!

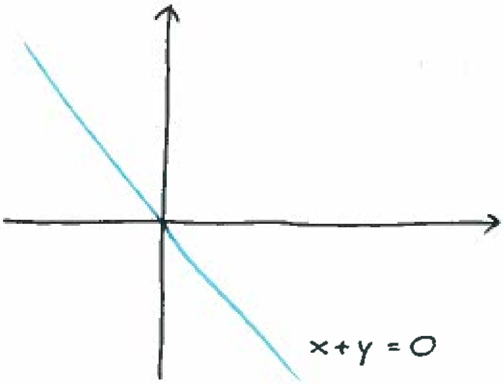
091207 FKTFÖLJDER & FKTSERIER

"Att kasta om gränsövergånger =
farlig verksamhet"

- Peter Kumlin
7 Dec 2009

ex.

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \qquad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x+y=0\}$$



$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) = 1$$

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y) = -1$$

DVS ej gränsvärde
i origo.

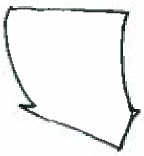
exempel på GRÄNSÖVERGÅNGAR.

DERIVERING gränsövergång i differenskvoten

INTEGRERING — " — Riemannsummor

fktsföljd $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in I \subset \mathbb{R}$

fkts serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ $\quad x \in I$



kopplingen fktsserie / fktsföljd

givet fktsserie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$

$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad n = 1, 2, \ldots$

vi har fktsföljd $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$

givet fktsföljd $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$

sätt $f_1(x) = s_1(x)$, $f_k(x) = s_k(x) - s_{k-1}(x)$

vi har en fktsserie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ med partial summan $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$

DEFINITION:

vi säger att

- fktsföljden $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar pktvis på I mot $s(x)$ om för varje $x \in I$ och varje $\varepsilon > 0$ finns $N = N(\underline{\underline{x, \varepsilon}})$ så att $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$ för $n \geq N$
- fktsföljden $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på I mot $s(x)$ om för varje $\varepsilon > 0$ finns $N = N(\underline{\underline{\varepsilon}})$ så att $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$ för $n \geq N$ och alla $x \in I$.

vi har att

$s_n \longrightarrow s$ pktvis på I om $s_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} s(x)$, för alla $x \in I$

eller $|s_n(x) - s(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{}$ alla $x \in I$

$s_n \longrightarrow s$ likformigt på I om

$$\sup_{x \in I} |s_n(x) - s(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

ex.

$$S_n(x) = \frac{n^3 x}{n^4 x^2 + 1} \qquad x \in [0,1] \qquad n = 1, 2, \ldots$$

här gäller $S_n \longrightarrow S$ pktvis på $[0,1[$

där $S(x) = 0, \quad x \in [0,1]$

$S_n \not\longrightarrow S$ likformigt på $[0,1]$

OBS:

detta växer ju... HELA TI'N.

$$S_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n}{2} \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

ANM:

$S_n \longrightarrow S$ likf. på $I \implies S_n \longrightarrow S$ pktvis på I

dock EJ omvändning

OBSERVATIONER:

① $S_n(x) = x^n \quad x \in [0,1] \quad n = 1, 2, \ldots$

vi har

$S_n \longrightarrow S$ pktvis på $[0,1]$

där
$$S(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

observera här

$S_n(x)$ kontinuerlig på $[0,1]$

$S(x)$ EJ kontinuerlig på $[0,1]$

dvs ärver ej nödvändigtvis egenskap att vara konvergent

② $s_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

vi har

$s_n \longrightarrow s$ likformigt på $[0, 1]$

där $s(x) = 0$, $x \in [0, 1]$

FRÅGA: $\lim_{n \to \infty} \frac{d}{dx} s_n(x) \overset{?}{=} \frac{d}{dx}\left(\lim_{n \to \infty} s_n(x)\right)$

NEJ!! i allmänhet

OBSERVERA

$$\begin{cases} s_n'(x) = \cos(nx) \\ s'(x) = 0 \end{cases}$$

speciellt $s_n'(0) = 1$

$s'(0) = 0$

derivatan växer ej...

③ $s_n(x) = n^2 x e^{-nx}$, $x \in [0, 1]$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

avtar mot noll mkt snabbt

vi har $s_n \longrightarrow s$ pktvis på $[0, 1]$

där $s(x) = 0$, $x \in [0, 1]$

$$\int_0^1 s(x)\, dx = 0$$

$$\int_0^1 s_n(x)\, dx = \int_0^1 n^2 x e^{-nx}\, dx = \left[-nxe^{-nx}\right]_0^1 + \int_0^1 n e^{-nx}\, dx$$

$$= -ne^{-n} + \left[-e^{-nx}\right]_0^1 = 1 - (n+1)e^{-n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1,$$

FRÅGA:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 s_n(x)\, dx \overset{?}{=} \int_0^1 \overbrace{\lim s_n(x)}^{s(x)}\, dx$$

NEJ!! i allmänhet.

U413.

antag

$s_n(x)$ kontinuerlig på I

$s_n \xrightarrow{\qquad} s$ likformigt på I

DÅ GÄLLER

$s(x)$ kont. på I

Bevis:

fixera $x_0 \in I$

ska visa: för varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ så att $x \in I$ & $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow$

$$|s(x) - s(x_0)| < \varepsilon$$

fixera $\varepsilon > 0$

eftersom $s_n \xrightarrow{\qquad} s$ likformigt på I

finns N så att $|s_N(x) - s(x) < \frac{\varepsilon}{3}$ alla $x \in I$

vi har

$$|s(x) - s(x_0)| = |(s(x) - s_N(x)) + (s_N(x) - s_N(x_0)) + (s_N(x_0) - s(x_0))|$$

$$\leq \underbrace{|s(x) - s_N(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + |s_N(x) - s_N(x_0)| + \underbrace{|s_N(x_0) - s(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}}$$

iom x_0 ligger i I intervallet

$$< \frac{2}{3}\varepsilon + |s_N(x) - s_N(x_0)|$$

är kontinuerlig!!

MEN $s_N(x)$ kont. fkt på I

alltså finns $\delta > 0$ så $x \in I$ & $|x - x_0| < \delta$

$$\Longrightarrow |s_N(x) - s_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ALLTSA

$x \in I$ & $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |s(x) - s(x_0)| < \varepsilon$

DEFINITION

vi säger att

- fktserien konvergerar $\begin{cases}\text{likformigt} \\ \text{pktvis}\end{cases}$ på I mot $s(x)$

om $s_n(x)$ konvergerar $\begin{cases}\text{likformigt} \\ \text{pktvis}\end{cases}$ på I mot $s(x)$ där $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

SATS.

antag att

$f_k(x)$ kontinuerliga på I $k = 1, 2, \ldots$

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konv. likformigt mot $s(x)$ på I

DÅ GÄLLER

$s(x)$ kont. på I

har 2 kont fkt... summera $\Rightarrow$ NY kont. fkt!!

HUR AVGÖRA $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ÄR LIKF. KONV. PÅ I ?

SATS Weierstrass majorantsats

antag   antag att det finns såna a_k

- $|f_k(x)| \leq a_k$ för alla $x \in I$ och alla k.
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar

DÅ GÄLLER

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konv. likf. på I

ex. $f_k(x) = xe^{-k^2x}$, $x \in [0, \infty[$, $k = 1, 2, \ldots$

konv. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ likformigt på $[0, \infty[$?

studera $f_k(x)$:

$f_k'(x) = e^{-k^2x}\left[1 - k^2x\right]$ $\quad x \in [0, \infty[$

är ju på $[0, \infty[$

$f_k(x) \geq 0 = f_k(0)$ $\quad$ ty $\quad 0 = 1 - k^2x$

$1 = k^2x$

$\boxed{x = \frac{1}{k^2}}$

TECKENTABELL

x	0	$\frac{1}{k^2}$	
$f_k'(x)$	$+$	0	$-$
$f_k(x)$	↗		↘

HÄR ser vi att begränsad. som har ett max

alltså $\sup_{x \in [0, \infty[} |f_k(x)| = f_k\left(\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{k^2}e^{-1}$

välj $a_k = \frac{1}{k^2 e}$ $\quad k = 1, 2, \ldots$

och HÄR att a_k serien konv.

vidare

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 e}$ konvergerar da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konv.

svar: JA enligt Weierstrass majorant sats.

091208.

ex. $s_n(x) = x^n$ $\quad x \in [0,1] = I$

PÅST: $s_n \longrightarrow s$ pktvis på I, $n \longrightarrow \infty$

där $s(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$

PÅST: $s_n \not\longrightarrow s$ likformigt på I, $n \longrightarrow \infty$

inses t.ex via

1) definitionen $\sup_{x \in I} |s_n(x) - s(x)| =$

ifall mot noll: likformig konv.
ifall EJ... EJ likf. konv.

HÄR gränsfkt EJ kont.

$$\sup_{x \in [0,1[} |s_n(x) - s(x)|$$

$$= \sup_{x \in [0,1[} |x^n - 0|$$

$$= \sup_{x \in [0,1[} x^n = 1 \not\longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty$$

då $x = 1$
$|s_n(x) - s(x)|$
$= 0$
men då bara i den pkt'n.
inte på hela ju!

DVS: $s_n \not\longrightarrow s$ likf. på $[0,1]$

2) SATS. ("$\frac{\varepsilon}{3}$ -bevissatsen")

$s_n(x)$ kontinuerlig på $[0,1]$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

$s_n \longrightarrow s$ likformigt på ↑

DÅ:

$s(x)$ kontinuerlig på $[0,1]$

vårt exempel: $s_n(x) = x^n$ kont.

dock $s(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$ EJ kont på $[0,1]$

ex. $s_n(x) = x^n$ $\quad x \in [0, a] \quad a \in]0,1[$

PÅST: $s_n \longrightarrow s$ likformigt på $[0,a]$ $\quad n \longrightarrow \infty$

$s(x) = 0, \quad x \in [0,a]$

då

$$\sup_{x \in [0,a]} |s_n(x) - s(x)| = \sup_{x \in [0,a]} |x^n| = a^n \longrightarrow 0, \; n \longrightarrow \infty$$

2) ger inget ty kan ju ha $s_n(x)$, $s(x)$ kont. men EJ likf. kont ändå.

ex. $s_n(x) = \dfrac{n^3 x}{n^4 x^2 + 1} \quad x \in [0,1]$

pktvis gränsfkt $s(x) = 0 \quad x \in [0,1]$

MEN $s_n \not\longrightarrow s$ likformigt på $[0,1]$

då $s_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n}{2} \not\longrightarrow 0, \; n \longrightarrow \infty$

$$|s_n(x) - \underbrace{s(x)}_{0}|$$

OBS: $s_n(x)$, $n = 1, 2, ..$ $s(x)$ kont på $[0,1]$

Weierstrass M-sats

antag $|f_k(x)| \leq a_k$ för alla $x \in I$ och $k = 1, 2, \dots$

antag vidare $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar

då gäller

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt på I

fktserie konvergerar likformigt på I
mot summa $s(x)$ om

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \longrightarrow s(x) \text{ likformigt på } I$$

Bevis: fixera $x_0 \in I$

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ abs. konv. enligt jämförelse krit.
då $|f_k(x_0)| \leq a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.

då $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ konvergent då varje abs. konv serie konvergerar.

sätt $s(x_0)$ lika med summan av $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$
detta ger $s(x)$ för alla $x \in I$.

ska visa:

$$\sup_{x \in I} |s_n(x) - s(x)| \longrightarrow 0, \; n \longrightarrow \infty$$ där $$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad x \in I$$

dvs för varje $\varepsilon > 0$
finns $N = N(\varepsilon)$ så

$$\sup_{x \in I} |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon \quad \text{för alla } n \geq N$$

fixera $\varepsilon > 0$
finns N sådant att $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$

MEN

$$|s_n(x) - s(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right| = \left|-\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right|$$

$$= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq ☆ \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

alltså

$$\sup_{x \in I} |s_n(x) - s(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon \quad \text{för alla } n \geq N$$

ANM:

antag $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ abs. konv.

alltså

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant \{\text{Δ olikhet}\} \leqslant \sum_{k=1}^{n} |b_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \equiv A$$

men $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv. så $\sum_{k=1}^{n} b_k \longrightarrow B$, $n \longrightarrow \infty$

alltså $|B| \leqslant A$

ex. $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx \overset{?}{=} \int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx$$

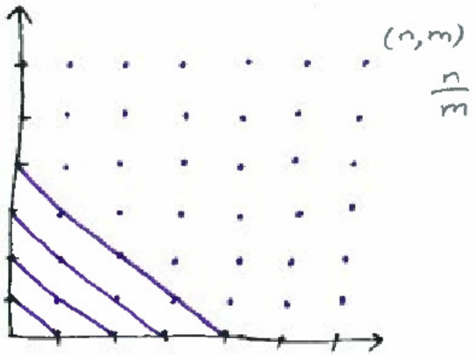
$$= \int_0^1 1\,dx = 1 \qquad \longrightarrow 1 \quad \underbrace{\text{då } 0<x<1}_{\text{väljer detta}}$$

eftersom $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = \begin{cases} 1 & x \in [0,1[\\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 0 & x \in]1,\infty[\end{cases}$$

ex.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n,m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0 \right\} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$$

eftersom $\mathbb{Q}$ oändlig mängd som är uppräknelig



sätt

rationella

$$s_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{r_1, r_2, \dots\} \\ 0 & 0 \text{ för övrigt} \end{cases}$$

irrationellt reella

dvs
def. överallt
ej kont !!

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \int_0^1 s_n(x)\,dx}_{\substack{=0 \\ \text{alla } n}}$$

"nu slår arcustangens-
mannen till"

- Peter Kumlin
08 Dec, 2009.

$$s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$$

alla n
alla x

$$\underbrace{\int_0^1 \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,dx}$$

$$= \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$ ej rationella.

gränsfkt ej Riemannintegrerbar.

SATS 1:

antag att

- $s_n(x)$ kont. på $[a,b]$ $n = 1, 2, \ldots$

  där $a, b \in \mathbb{R}$ ([a,b] begränsat intervall)

och att

- $s_n \longrightarrow s$ likformigt på $[a,b]$

DÅ:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b s(x)\,dx$$

ex.

$$s_n(x) = \frac{n}{n^2 + x^2} \qquad x \in \mathbb{R}, \; n = 1, 2, \ldots$$

DVS. oavsett
x går mot 0
$s(x) = 0$

$s_n \longrightarrow s$ likformigt på $\mathbb{R}$

där $s(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} s(x)\,dx = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} s_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{n^2 + x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2}\,dx$$

$$= \left[\arctan \frac{x}{n}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \quad \text{alla } n.$$

alltså

$$\int_{\mathbb{R}} s_n(x)\,dx \not\longrightarrow \int_{\mathbb{R}} s(x)\,dx \quad \text{då } n \longrightarrow \infty$$

trots att $s_n \longrightarrow s$ likf. på $\mathbb{R}$.

SATS 2:

antag att I är ett begränsat eller obegränsat intervall och att

- $\int_I s_n(x)\,dx$ existerar för varje $n = 1, 2, \ldots$
- $s_n \longrightarrow s$ pktvis på på I
- $\int_I s(x)$ existerar

OCH

det finns en majorerande funktion $g(x)$, $x \in I$ dvs.

1) $|s_n(x)| \leq g(x)$ alla $x \in I$ och alla $n = 1, 2, \ldots$

2) $\int_I g(x)\,dx$ existerar

DÅ:

$$\lim_{n \to \infty} \int_I s_n(x)\,dx = \int_I s(x)\,dx$$

ex. (forts)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,dx$$ här är $s_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$ $x \in [0,\infty[$

och $s_n(x) \longrightarrow s(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1[\\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 0 & x \in]1,\infty[\end{cases}$

pktvis på $[0,\infty[$

kan ta $g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ \frac{1}{x^2+1} & x \in]1,\infty[\end{cases}$

alltså:

$\overset{?}{=}$ är $\overset{!}{=}$

UIKIU

ingick ej direkt i sats L.

SATS 1.5: (gränsövergång under $\int$-tecknet)

1) $s_n(x)$ kontinuerliga på $[0,\infty)$ $n=1,2,\dots$

2) $s_n \longrightarrow s$ likformigt på varje intervall $[0,a]$ $a>0$

VS. pkt vis sats 2.

3) finns en $\boxed{\text{majorerande fkt}}$ $g(x)$ på $[0,\infty)$

dvs a) $|s_n(x)| \leq g(x)$ alla $x \in [0,\infty[$

b) $\int_0^\infty g(x)\,dx$ existerar

DÅ GÄLLER

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty s_n(x)\,dx = \int_0^\infty s(x)\,dx$$

Bevis:

notera att $s(x)$ kontinuerlig på $[0,\infty[$ eftersom för varje fixt $a>0$ gäller

- s_n kont på $[0,a]$
- $s_n \longrightarrow s$ likf. på

ALLTSÅ:

s kont. på $[0,a]$, a godtyckligt positivt reellt tal

vi har $\int_0^\infty g(x)\,dx$ existerar och

$|s(x)| \leq g(x)$ och $s(x)$ kont på $[0,\infty[$

så $\int_0^\infty s(x)\,dx$ existerar (enl. jmf sats generaliserade integraler)

SKA NU VISA:

för varje $\varepsilon > 0$ finns N så att

$$\left|\int_0^\infty s_n(x)dx - \int_0^\infty s(x)dx\right| < \varepsilon \quad \text{för varje } n \geq N$$

$$\left[\text{dvs. att } \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty s_n(x)dx = \int_0^\infty s(x)dx\right]$$

fixera $\varepsilon > 0$

eftersom $\int_0^\infty g(x)dx$ existerar $(g(x) \geq 0)$

finns $L > 0$ så att $\int_L^\infty g(x)dx < \frac{\varepsilon}{4}$

vi har

$$\left|\int_0^\infty s_n(x)dx - \int_0^\infty s(x)dx\right| = \left|\int_0^L (s_n(x) - s(x))dx + \int_L^\infty (s_n(x) - s(x))dx\right|$$

$$\leq \left|\int_0^L (s_n(x) - s(x))dx\right| + \left|\int_L^\infty (s_n(x) - s(x))dx\right|$$

$$\leq \int_0^L |s_n(x) - s(x)|dx + \int_L^\infty \overbrace{|s_n(x) - s(x)|}^{\leq |s_n(x)| + |s(x)| \leq 2g(x)} dx$$

de är ju BÅDA mindre än $g(x)$

$$\leq \int_0^L |s_n(x) - s(x)|dx + \underbrace{2\int_L^\infty g(x)dx}_{< \frac{\varepsilon}{4}\cdot 2} < \int_0^L |s_n(x) - s(x)|dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

KLOCKRENT att $s_n \longrightarrow s$ likf. på $[0, L]$

ALLTSÅ finns N så att

$|s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2L}$ för alla $n \geq N$ & alla $x \in [0, L]$

ALLTSA:

$$\int_0^L \underbrace{|s_n(x) - s(x)}_{< \frac{\varepsilon}{2L}} dx < L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \frac{\varepsilon}{2}$$

SLUTSATS: $\left|\int_0^\infty s_n(x)\,dx - \int_0^\infty s(x)\,dx\right| < \varepsilon$ alla $n \geq N$

ex.

$s_n(x) = \dfrac{n}{n^2 + x^2}$ $n = 1, 2, \ldots\ldots$ $x \in [0, \infty)$

$$\sup_{x \geq 0} |s_n(x) - 0| = \sup_{x \geq 0} \frac{n}{n^2 + x^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\int_0^\infty s_n(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{n}{n^2+x^2}\,dx = \left[\arctan \frac{x}{n}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2} \neq 0 = \int_0^\infty \underbrace{s(x)}_{0} dx$$

se på t.ex $\dfrac{n}{n^2+n^2}$: $\dfrac{1}{2n} \sim \dfrac{1}{2x}$ dess integral $\xrightarrow[\text{vill vi ej.}]{} \infty$

$\int g(x)$?

kan ej plocka bort villkor med $g(x)$ majorerande fkt

SATS. (derivata av gränsfkt)

antag att

$\dfrac{d}{dx} s_n(x) \longrightarrow \dfrac{d}{dx} s(x)$ FARLIGT!!

1) $s_n(x)$ kontinuerligt deriverbara på I, $n = 1, 2, \ldots\ldots$

2) $s_n \longrightarrow s$ pkvis på I räcker ju faktiskt 1 pkt.

3) $s_n' \longrightarrow h$ likformigt på I

DÅ GÄLLER

s kont. deriverbar på I och $s' = h$ på I

Bevis:

fixera $a \in I$

vi har h kont. på I då s_n' kontinuerliga och $s_n' \longrightarrow h$ likformigt på I

för $x \in I$ $$\boxed{\int_a^x h(t)\,dt} = \int_a^x \lim_{n\to\infty} s_n'(t)\,dt$$

$$= \left\{ \text{sats 1:} \right\} = \lim_{n\to\infty} \int_a^x s_n'(t)\,dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\Big[s_n(t) \Big]_a^x \right) = \lim_{n\to\infty} \left(s_n(x) - s_n(a) \right)$$

ALLTSÅ:

$$= \boxed{s(x) - s(a)}$$

$$s(x) = \underset{\substack{\text{en} \\ \text{konstant} \\ \text{"bara"}}}{s(a)} + \int_a^x h(t)\,dt \quad \text{för } x \in I$$

dvs s är deriverbar fkt på I

med $s'(x) = h(x)$ $x \in I$

vi har att s är kont. deriverbar på I

KONVERGENSBEGREPP FÖR FKTSSERIER.

① $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ pktvis konv. på I

② $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ likf. konv. på I

③ $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ abs. konv. på I

$$\begin{tikzcd}
① \arrow[rr, Rightarrow, shift left, "/" marking] \arrow[dr, Rightarrow, shift right, "/" marking] & & ② \arrow[ll, Rightarrow, shift left] \arrow[dl, Rightarrow, shift left, "/" marking, "(\star\star)"] \\
& ③ \arrow[ul, Rightarrow, shift right] \arrow[ur, Rightarrow, shift left, "/" marking, "(\star)"] &
\end{tikzcd}$$

OHH... BURN!

☆ ex:

$$f_k(x) = x^k \qquad x \in (0,1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ abs. konv på } (0,1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ ej likf. konv på } (0,1)$$

☆☆ ex:

$$f_k(x) = (-1)^k \frac{1}{k} \qquad x \in I \neq \emptyset$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ ej abs. konv. på } I$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ likf. konv. på } I$$

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \boxed{x \cdot \frac{1-x^n}{1-x}} \overset{\text{summa geo} \to k:1 \to n}{=} S_n(x)$$

$$x \in (0,1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \boxed{\frac{x}{1-x}} \overset{\text{summa geo} \to k=1 \to \infty}{=} S(x)$$

betrakta

$$\sup_{x \in (0,1)} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x \in (0,1)} \left| x \cdot \frac{1-x^n}{1-x} - x \frac{1}{1-x} \right|$$

$$= \sup_{x \in (0,1)} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right|$$

betrakta

$$g(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

kolla: VART SOM STÖRST?

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\left[(n+1)x^n(1-x) + x^{n+1}\right]$$

⇨

$$= \frac{x^n}{(1-x)^2}\left[(n+1) - nx\right]$$

TECKENSTUDIUM

x	0		1
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	

här $g(x) \geq 0$ för $x \in (0,1)$ och växande

$$\sup |g(x)| = \lim_{x \to 1-} g(x)$$

$$g(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$ n är fixt!

$$\longrightarrow +\infty, \ x \longrightarrow 1-$$

ALLTSÅ

$$\sup_{x \in (0,1)} |S_n(x) - S(x)| \underset{n \to \infty}{\not\longrightarrow} 0$$

dvs $S_n \not\longrightarrow S$ likformigt på $(0,1)$

alltså $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ konv. EJ likf. på $(0,1)$

$\boxed{1929.}$

visa att $\sum_{n=1}^{\infty} x e^{-n^2 x}$ likf. konvergent på $[0,\infty)$

använd Weierstrass M-sats

sätt $f(x) = x e^{-n^2 x}$ ser $f_n(x) \geq 0$

bestäm a_n så att $\sup_{x \in [0,\infty)} |f_n(x)| \leq a_n$

(& serien ska vara konv.