FREDRIK: *Förvisso*

1 Reell matematisk analys del A — Veckoblad v 44 — Sam Polesie

Differentialekvationer

<u>Ex.</u> Radioaktivt sönderfall

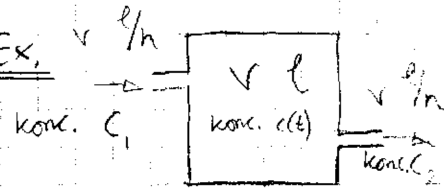
$y(t)$ är mängden av ett radioaktivt ämne vid tiden t. Sönderfallshastigheten är

$-y'(t) = ky(t)$ där k är en konstant

Detta är ett exempel på en <u>differentialekvation</u> för $y(t)$

Ekvationen kompletteras med ett <u>begynnelsevillkor</u>: $y(0)=m$

<u>Ex.</u>



En behållare med volymen V l är en saltlösning med koncentrationen $C(t)$ g/l

$t=0$ $C(0) = C_0$

Tillförs v l/h av saltlösningen med konc. c_1 g/l samtidigt avtappas v l/h av den välblandade lösningen med konc $c(t)$. Om $y(t)$ är mängden salt i gram så gäller att $y(t) = V\cdot c(t)$

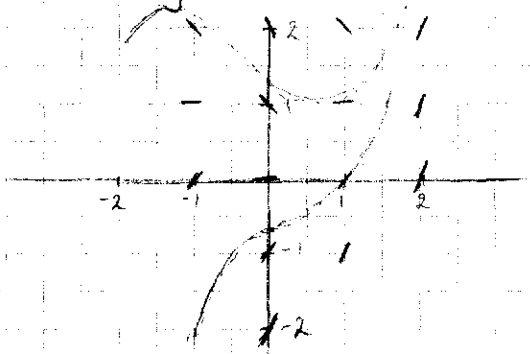
$$\underline{y'(t)} = vc_1 - vc(t) = \underline{vc_1 - \frac{v}{V}y(t)}$$

$y(0) = Vc_0$ (begynnelsevillkoret)

En (ordinär) <u>diff. ekv</u> av 1:a <u>ordningen</u> är:

$y' = f(x,y)$ En <u>lösning</u> är en funktion $y=y(x)$ som är deriverbar på ett intervall $a<x<b$ och satisfierar $y'(x) = f(x, y(x))$ för $a<x<b$

<u>Riktningsfält</u> Ex. $y' = x^2 - y$



Riktningsfält ger en "grov" bild av hur lösningskurvan går

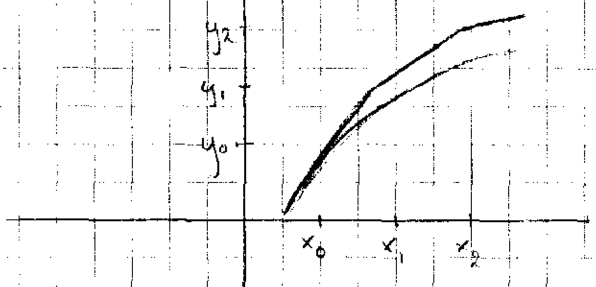
Eulers (framåt) metod:

$x_n = x_0 + nh$, h "litet" $n = 0, 1, \ldots$

$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$ y_n en approximation till $y(x_n)$

$$y'(x_{n-1}) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

$$\boxed{y_n = y_{n-1} + h f(x_{n-1}, y_{n-1})}$$ (Rekursionsformel)



Linjära diff. ekv. av 1:a ordningen

$y' + g(x)y = h(x)$

Löses på följande sätt: Sätt $G(x) = \int g(x)\,dx$ så att $G'(x) = g(x)$ och multiplicera ekv. med $e^{G(x)}$:

$$e^{G(x)} y' + y g(x) e^{G(x)} = h(x) e^{G(x)}$$

Vänsterledet är derivatan av en produkt:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{G(x)} \cdot y\right] = h(x) e^{G(x)}$$

$$e^{G(x)} y = \int h(x) e^{G(x)}\,dx + C \quad \Big| : e^{G(x)}$$

$$y = e^{-G(x)} \int h(x) e^{G(x)}\,dx + C e^{-G(x)}$$

$e^{G(x)}$ kallas för integrerande faktor

fallet $h(x) = 0$ kan läggas på minnet

$$y' = -g(x)y \implies y = C \cdot e^{-\int g(x)\,dx}$$

3

Ex. $y' = x^2 - y$

$y' + y = x^2 \quad g(x) = 1, \quad G(x) = x$

Integrerande faktor e^x

$e^x y' + e^x y = x^2 e^x, \quad \frac{d}{dx}\left[e^x y\right] = x^2 e^x$

$e^x y = \int x^2 e^x \, dx \overset{p.i.}{=} x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx \overset{p.i.}{=} x^2 - 2x e^x + \int 2 e^x \, dx =$

$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$

$$\underline{\underline{y = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x}}}$$

Ex. $y' = -ky$ (radioaktivt sönderfall)

$y(t) = Ce^{-kt} \quad y(0) = m \quad C = m$

$\Rightarrow y(t) = me^{-kt}$

När har mängden gått till hälften?

Vid tiden $t = T$ är $y(T) = \frac{m}{2}$

$\frac{m}{2} = me^{-kt}, \quad e^{kt} = 2 \quad T = \frac{\ln 2}{k}$

<u>Separabla diff. ekv.</u>

$g(y)\, y' = h(x)$

Låt $G(y) = \int g(y)\, dy$ (y integrationsvariabel)

$H(x) = \int h(x)\, dx$

Då är $G'(y) = g(y)$ och $H'(x) = h(x)$

$g(y(x))\, y'(x) = h(x) \overset{\text{kedjeregeln}}{\Longleftrightarrow} \frac{d}{dx} G(y(x)) = \frac{d}{dx} H(x)$

$G(y(x)) = H(x) + C$

Diff. ekv. kan skrivas på <u>differentialform</u>

$\underline{g(y)\, dy = h(x)\, dx}$

Då blir helt enkelt lösningen

$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx$$

Ex. $y' = \frac{dy}{dx} = 2xy^2$ $\qquad y \equiv 0$ är en lösning

för $y \neq 0$ får vi

$$\frac{dy}{y^2} = 2x\,dx \qquad \int \frac{dy}{y^2} = \int 2x\,dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = x^2 + C, \quad \boxed{y = -\frac{1}{x^2+C}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \qquad \boxed{dy = y'\,dx}$$

Linjära differentialekvationer (första ordningen) Räkneräkning

$y' + a(x)y = b(x)$

$A(x)$ = en primitiv till $a(x)$

Integrerande faktor: $e^{A(x)}$

$$\left(e^{A(x)} \cdot y\right)' = e^{A(x)}\left(y' + a(x)y\right) = e^{A(x)}b(x)$$

---

kap 8.

8 c) $y' + y\cot x = \tan^2 x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad \left(\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)\right)$

$a(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ $\qquad A(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln(\underbrace{\sin x}_{>0})$

Integrerande faktor: $e^{\ln \sin x} = \sin x$

$$(\sin x)\,y' + \cancel{(\sin x)} \cdot y\,\frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} = \sin x \cdot \tan^2 x$$

$$\left((\sin x) \cdot y\right)' = \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \qquad \Big| \int dx$$

$$\sin x \cdot y = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}\,dx =$$

5

$$= \left[\begin{matrix} t = \cos x \\ dt = (\cos x)' dx \end{matrix}\right] = -\int \frac{1-t^2}{t^2}\, dt = -\int \frac{1}{t^2}\, dt + \int 1\, dt =$$

$$= \frac{1}{t} + t + C = \frac{1}{\cos x} + \cos x + C$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{\sin x \cos x} + \cot x + \frac{C}{\sin x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

---

9 b) $(1-x^2)y' + xy = x, \quad y(0) = 3 \quad |x| < 1$

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{x}{1-x^2} \qquad x \neq \pm 1$$

$x < -1$

$\boxed{|x| < 1}$ ← innehåller 0

$x > 1$

$$a(x) = \frac{x}{1-x^2} \qquad A(x) = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2)'}{1-x^2}\, dx = \frac{-1}{2}\int \frac{(1-x^2)'}{1-x^2}\, dx =$$

$$-\frac{1}{2}\ln\underbrace{(1-x^2)}_{>0}$$

I.f. $e^{A(x)} = e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} = e^{\ln \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y' + \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}y}_{= \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y\right)'} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \Big| \int dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = -\frac{1}{2}\int \frac{(1-x^2)'}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = -\frac{1}{\cancel{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \Big/ -\frac{1}{\cancel{2}} + C$$

$y(x) = 1 + C\sqrt{1-x^2}$ den allmänna lösningen $C \in \mathbb{R}$

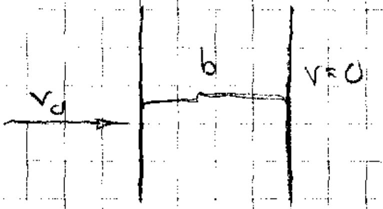
begynnelsevillkoret $y(0) = 3$

$y(0) = 1 + C = 3 \Rightarrow C = 2$

$y(x) = 1 + 2\sqrt{1-x^2}$

8.20 En kula slår med hastigheten v_0 in i en mjuk vägg en retardation som är proportionell mot hastigheten
= negativ acceleration

Sök samband mellan v_0, väggens tjocklek b och prop. konst. k s.a. kulan nätt och jämnt tränger genom väggen



oberoende variabel t (tiden)

$\dot{x}(t)$ hastigheten

$\ddot{x}(t)$ accelerationen

$$\ddot{x} = -k\dot{x} \quad (k>0) \quad 0 \leq x \leq b$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \qquad x(0) = 0$$

$\dot{x}(t_0) = 0$ för det t_0 som ger $x(t_0) = b$

Integrera $\ddot{x} = -k\dot{x}$ m.a.p. t:

$$\dot{x} = -kx(t) + C \qquad \begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

$t = 0$: $v_0 = -k \cdot 0 + C \Rightarrow C = v_0$

$$\boxed{\dot{x}(t) = -kx(t) + v_0}$$

Sätt in $t = t_0$: $\dot{x}(t_0) = 0 = -k\underbrace{x(t_0)}_{b} + v_0 = -kb + v_0$

Om en sådan tid finns $\Rightarrow \boxed{v_0 = kb}$ Finns det en sådan tid t_0?

$$\dot{x}(t) + kx(t) = v_0 \quad \Big| \cdot e^{kt}$$

$$\left(e^{kt}x\right)^{\cdot} = v_0 e^{kt} \quad \Big| \int \ldots dt$$

$$e^{kt}x(t) = v_0 \frac{1}{k} e^{kt} + C_1$$

$$x(t) = \frac{v_0}{k} + C_1 e^{-kt}$$

Om $\exists\, t_0$: $x(t_0) = b$, $\dot{x}(t_0) = 0$

$$0 \cdot b = \frac{v_0}{k} + C_1 e^{-kt_0} \qquad \cancel{t = t_0} \quad \lim_{t \to \infty}$$

$$t_0 = \infty$$

7 $\dot{v} = -kv$ själva!

$v(0) = v_0$

t s.a. $v = 0$

<u>Separabla diff. ekv.</u> <u>ordinära diff. ekvationer</u>

$y'(x) = f(x)\,g(y)$

Formellt: $\dfrac{dy}{dx} = y'$

uppfattas formellt som en kvot

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \iff \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

$G(y) = F(x) + C$ implicit lösning

$y_0 : g(y_0) = 0$

$y(x) \equiv y_0$ lösning till ekvationen (behöver ej ingå i allmänna lösningen)

$\underset{=0}{0} = f(x)g(y_0) = 0$

---

23 e) $x^2 y \dfrac{dy}{dx} = 1 + x^2$, $y(2) = 2$

$y' = \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{1+x^2}{x^2}$ $x \neq 0$

$y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+x^2}{x^2}$ $\displaystyle\int y\,dy = \int \frac{1+x^2}{x^2}\,dx$

$\dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{1}{x} + x + C$ $\boxed{C \text{ godtycklig konstant}}$

$y^2 = -\dfrac{2}{x} + 2x + C$

$y = +\sqrt{}$, $y = -\sqrt{}$

$y(2) > 0$

$y = \sqrt{-\dfrac{2}{x} + 2x + C} \geqslant 0$ $y(2) = \sqrt{-1+4+C}$ $C = 1$

lösning $\forall C$ olika C ger olika definitionsmängder Vänd!

$$y(x) = \sqrt{-\frac{2}{x} + 2x + 1} \quad , \quad x \geq \frac{\sqrt{17} - 1}{4}$$ (intervallet som innehåller 2)

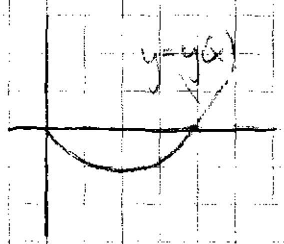
8

Egen räkning: 8b, 9ö, 18, (19), 21, 23ö

föreläsning 29/10-03

Ex på Integralekvationer

Härledning av kedjelinjens ekvation



$$y'(x) = k\int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2}\, dt + h$$

$$\Rightarrow y''(x) = k\sqrt{1 + y'(x)^2} \quad , \quad y'(0) = h$$

$u = y'$ $\quad u' = \frac{du}{dx} = k\sqrt{1+u^2}$

$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = k\,dx$ Separabel diff. ek.

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int k\, dx$$

$$\boxed{\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)}$$

$$\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = k(x - C)$$

$$u = \sinh k(x - C)$$

$$y' = \sinh k(x - C)$$

$$y = \frac{1}{k}\cosh k(x - C) + D$$

kedjelinjen

9 **Linjära diff. ekv.**

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = h(x)$$

$D = \frac{d}{dx}$ = <u>deriveringsoperatorn</u>

$$Dy = \frac{dy}{dx} = y' \qquad D^2 y = D(Dy) = y''$$

$$L[y] = D^n y + a_{n-1}(x) D^{n-1} y + \dots + a_1(x) Dy + a_0(x) y =$$

$$= \underbrace{\left(D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + \dots + a_1(x) D + a_0(x)\right)}_{L = P(D)} y$$

$$P(r) = r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

L <u>linjär</u>:

$$\begin{cases} L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \\ L[\alpha y] = \alpha L[y], \ \alpha \text{ konst} \end{cases}$$

$$a_k(x) D^k [y_1 + y_2] = a_k(x) D^k [y_1] + a_k(x) D^k [y_2]$$
$$a_k(x) D^k [\alpha y] = \alpha (a_k(x) D^k [y])$$

Summering ger påståendet

Om y_1 och y_2 är lösningar till $L[y] = 0$
så är $L[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2] = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0$
Alltså är också $C_1 y_1 + C_2 y_2$ en lösning till $L[y] = 0$

<u>Superpositionsprincipen</u>

<u>Sats</u> Om y_P är någon lösning till $L[y] = h(x)$ (en <u>partikulär lösning</u>) så är y en lösning till $L[y] = h(x)$ omm $y_h = y - y_P$ löser $L[y_h] = 0$

Vänd!

Bevis $L[y - y_p] = L[y] - L[y_p]$
$= L[y] - h(x)$

$L[y] = h(x) \iff L[y - y_p] = 0$

Alltså: Allmän lösning till $L[y] = h(x)$
är $y = y_h + y_p$ där y_h är en allmän lösning
till $L[y] = 0$

Linjära diff. ekv. av 2:a ordningen

$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x)$

Antag $y_1(x)$ löser motsvarande homogena ekvation:

$y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1 = 0$

Sätt $z(x) = \frac{y(x)}{y_1(x)}$, $y(x) = y_1(x)z(x)$

i ett intervall där $y_1(x) \neq 0$

Sätt in $y = y_1 z$ i diff. ekv.

$y' = y_1 z' + y_1' z$

$y'' = y_1 z'' + 2y_1' z' + y_1'' z$

$y'' + a(x)y' + b(x)y = y_1 z'' + [2y_1' + a(x)y_1]z' +$

$+ \underbrace{[y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1]}_{= 0} z =$

$= y_1(x)z'' + [2y_1'(x) + a(x)y_1(x)]z' = h(x)$

En 1:a ordningens ekv. i z'

Vi kan bestämma z' först och sedan z

och $y = y_1 z$

(Metoden med reducering av ordningen)

11

Ex. $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$

$y_1(x) = x$ är en lösning

Sätt $y = xz$ då blir

$y' = xz' + z \quad , \quad y'' = xz'' + 2z'$

$(1+x^2)(xz'' + 2z') + x(xz' + z) - xz =$

$= x(1+x^2)z'' + (2+3x^2)z' = 0$

sätt $u = z'$

$x(1+x^2)u' + (2+3x^2)u = 0$

$u' + \underbrace{\frac{2+3x^2}{x(1+x^2)}}_{g(x)} u = 0$ $\quad \boxed{\begin{matrix} u' = -g(x)u \\ u = Ce^{-\int g(x)dx} \end{matrix}}$

$g(x) = \frac{2+3x^2}{x(1+x^2)} = \frac{2}{x} + \frac{x}{1+x^2}$ (partialbråksuppdelning)

$\int g(x)\,dx = 2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln\left[x^2\sqrt{1+x^2}\right]$

$u = \frac{C_1}{x^2\sqrt{1+x^2}} = z' \qquad z = C_1 \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \left[\begin{matrix} \frac{1}{x} = t \\ -\frac{1}{x^2}dx = dt \end{matrix}\right] =$

$= -C_1 \int \frac{dt}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -C_1 \int \frac{\pm t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$

$\Longrightarrow z = -C_1\left(\pm\sqrt{t^2+1}\right) + C_2 = -C_1\left(\pm\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) + C_2 =$

$= -C_1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C_2 \qquad \boxed{y = x \cdot z}$

$y = -C_1\sqrt{1+x^2} + C_2 x$

$$\underbrace{y'' + ay' + by}_{} = 0 \quad a, b \text{ konstanter}$$

$$(D^2 + aD + b)\, y = 0$$

$P(r) = r^2 + ar + b$ kallas karakteristiska polynomet

Antag att $P(r) = 0$ har lösningarna r_1 och r_2

<u>Sats</u> Om $r_1 \neq r_2$ är allm. lösn. till $y'' + ay' + by = 0$

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Om $r_1 = r_2$ är allm. lösning till —ıı—

$$y = (C_1 x + C_2) e^{r_1 x}$$

C_1 och C_2 godtyckliga komplexa konstanter

Påminnelse: Om $c = \alpha + i\beta$ är en komplex konstant, så är $e^{cx} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} =$

$$= e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$\frac{d}{dx} e^{cx} = c e^{cx}$$

30/10 - föreläsning

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \text{ const.}$$

$$(D^2 + aD + b)\, y = P(D)$$

$P(r) = r^2 + ar + b$ karakteristiska polynomet

$P(r) = 0$ karakteristiska ekv.

Antag att $P(r) = 0$ har rötterna r_1 och r_2

$$r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2$$

13

Sats 1) $r_1 \neq r_2$ Allm lösn. är:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

2) $r_1 = r_2$ Allm. lösning är

$$y = (C_1 x + C_2) e^{r_1 x}$$

Bevis Allmänt gäller $(D - r_2)(D - r_1) y = (D - r_2)[y' - r_1 y] =$

$= y'' - r_1 y' - r_2 y' + r_1 r_2 y = y'' - (r_1 + r_2) y' + r_1 r_2 y =$

$= y'' + ay' + by = (D^2 + aD + b) y$ så att $P(D) = D^2 + aD + b$
$= (D - r_2)(D - r_1)$

$0 = P(D) y = (D - r_2) \underbrace{[(D - r_1) y]}_{Z}$

sätt

$Z = (D - r_1) y = y' - r_1 y$

så fås ett ekvivalent system av 1:a ordn. ekv.

$$\begin{cases} z' - r_2 z = 0 \\ y' - r_1 y = z \end{cases}$$

Vi får $z = Ce^{r_2 x}$

$y' - r_1 y = Ce^{r_2 x}$

Integrerande faktor $e^{-r_1 x}$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-r_1 x} \cdot y\right) = C \cdot e^{(r_2 - r_1)x}$$

1) $r_1 \neq r_2$

$$e^{-r_1 x} y = \underbrace{\frac{C}{r_2 - r_1}}_{C_2} e^{(r_2 - r_1)x} + C_1 \quad \Big| : e^{-r_1 x}$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Vänd!

2) $r_1 = r_2$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-r_1 x} y\right) \equiv \text{Const} = C_1 \quad \Big| \int \ldots dx$$

$$e^{-r_1 x} y = C_1 x + C_2 \quad \Big| : e^{-r_1 x}$$

$$\Rightarrow \quad y = (C_1 x + C_2) e^{r_1 x}$$

$$P(r) = r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0$$

a_k konstanter

c en komplex konstant

z en (tillräckligt) deriverbar funktion

$$D[ze^{cx}] = z' e^{cx} + z c e^{cx} = e^{cx}(z' + cz) =$$

$$= e^{cx}(D + c) z = e^{cx} z_1$$

$$D^2[ze^{cx}] = D[e^{cx} z_1] = e^{cx}(D + c) z_1 = e^{cx}(D + c)^2 z$$

Allmänt $D^k[ze^{cx}] = e^{cx}(D + c)^k z$

<u>Förskjutningsregeln</u>

$$P(D)[ze^{cx}] = e^{cx} P(D + c)[z]$$

$$P(r) = r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 =$$

$$= (r - r_1)^{m_1} (r - r_2)^{m_2} \cdots (r - r_k)^{m_k}$$

<u>Sats</u> Allmän lösn till $P(D) y = 0$ är

$$y = P_1(x) e^{r_1 x} + \ldots + P_k(x) e^{r_k x} \qquad (2)$$

P_j polynom av grad högst $m_j - 1$

1) (2) ger en lösn.

$$P(r) = Q_j(r)(r - r_j)^{m_j}$$

15

$$P(D)\left[p_j(x)e^{r_jx}\right] = e^{r_jx}P(D+r_j)\left[p_j(x)\right] =$$

$$= e^{r_jx}Q_j(D+r_j)\,D^{m_j}\left[p_j(x)\right] = 0$$

polynom av grad $\leq m_j - 1$

$p_j(x)e^{r_jx}$ löser ekvationenen

Superpositionsprincipen ger att (2) löser ekv.

2) Varje lösn. är av formen (2)

Bevisas m.h.a induktion i k

a) $k = 1$ $\quad P(r) = (r-r_1)^n$

$$P(D)y = 0 \Rightarrow D^n\left[ye^{-r_1x}\right] = e^{-r_1x}(D-r_1)^n[y]$$

$$= e^{-r_1x}P(D)y = 0$$

$\therefore\ ye^{-r_1x} = p_1(x)$ = polynom av grad högst $n-1$

b) Antag klart upp till $k-1$

$$P(r) = Q_1(r)(r-r_1)^{m_1}$$

$Q_1(r) = 0$ har rötterna $r_2, \ldots r_k$

$$P(D)y = 0 \Rightarrow Q_1(D)\underbrace{(D-r_1)^{m_1}y}_{Z} = Q_1(D)Z = 0$$

Enligt induktionsantagandet är Z av formen

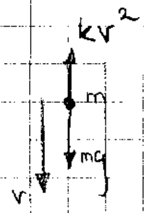
$$Z = q_2(x)e^{r_2x} + \ldots + q_k(x)e^{r_kx}$$

$$D^{m_1}\left[ye^{-r_1x}\right] = e^{-r_1x}(D-r_1)^{m_1}[y] = e^{-r_1x}\cdot Z =$$

$$= q_2(x)e^{(r_2-r_1)x} + \ldots + q_k(x)e^{(r_k-r_1)x}$$

Successiva integrationer ger påståendet

8.28) a)



Newton: $m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$

b) $\frac{dv}{dt} = 1 - v^2 \qquad v(0) = 3, \quad v > 1$

Separabel ekv. $\frac{dv}{1-v^2} = dt$,

$$\int \frac{dv}{1-v^2} = \int dt = t + C_1$$

$$\int \frac{dv}{1-v^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{v+1} - \frac{1}{v-1}\right)dv = \frac{1}{2}\left(\ln(v+1) - \ln(v-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{v+1}{v-1} = t + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{v+1}{v-1} = e^{2(t+C_1)} = e^{2C_1} e^{2t} = C \cdot e^{2t}$$

$$v + 1 = v \cdot Ce^{2t} - Ce^{2t}$$

$$v(Ce^{2t} - 1) = Ce^{2t} + 1$$

$$v = \frac{Ce^{2t} + 1}{Ce^{2t} - 1} = \frac{C + e^{-2t}}{C - e^{-2t}}$$

begynnelsevillkor

$$v(0) = \frac{C+1}{C-1} = 3, \quad C = \frac{v(0)+1}{v(0)-1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$v = \frac{2 + e^{-2t}}{2 - e^{-2t}} \xrightarrow[t \to \infty]{} 1$$

8.34) $f(x) = x + \int_0^x \frac{2t f(t)}{1+t^2}\, dt \qquad f$ kont på $\mathbb{R}$

högerledet är deriverbar $\Rightarrow$ f deriverbar

derivering ger $f'(x) = 1 + \frac{2x f(x)}{1+x^2}$

17 Dessutom måste vi ha $\underline{\underline{f(0) = 0}}$ (randvillkor)

$$f'(x) - \frac{2x}{1+x^2} f(x) = 1$$

$$g(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$$

Integrerande faktor $e^{-\int g(x)\,dx} = e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx} =$

$$= e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \cdot f'(x) - \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1+x^2} f(x)\right] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} f(x) = \arctan x + C$$

$$\Rightarrow f(x) = (1+x^2)(\arctan x + C) \;;\; f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\underline{\underline{f(x) = (1+x^2)\arctan x}}$$

8.38) c) $y'' - 6y' + 10y = 0$

<u>Kar. ekv.</u> $r^2 - 6r + 10 = 0$

$$r = 3 \pm \sqrt{9-10} = 3 \pm i$$

Allm. lösn: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{(3+i)x} + C_2 e^{(3-i)x} =$

$$= C_1 \cdot e^{3x} \cdot e^{ix} + C_2 \cdot e^{3x} \cdot e^{-ix} = e^{3x}\left[C_1(\cos x + i\sin x) + C_2(\cos x - i\sin x)\right]$$

$$= e^{3x}(A\cos x + B\sin x)$$

där $\left\{\begin{array}{l} A = C_1 + C_2 \\ B = i(C_1 - C_2) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{2}(A - Bi) \\ C_2 = \frac{1}{2}(A + Bi) \end{array}$

A och B godtyckliga konstanter

Reella A och B ger reella lösningen:

$y = e^{3x}(A\cos x + B\sin x)$ är allm. lösn. på reell form

<u>Allm.</u>: Om

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Då är lösningen till $y'' + ay' + by = 0$

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)}$$ lösningen på reell form

8.42) $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \ell \\ y(0) = 0, & y(\ell) = 0 \end{cases}$ (randvillkor)

<u>Kar. ekv.</u> $r^2 + \lambda = 0$, $r^2 = -\lambda$

$r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$

1) $\lambda = 0$ $\quad r_{1,2} = 0 \quad y = C_1 x + C_2$

$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$, $y(\ell) = C_1\ell = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

Ger inget

2) $\lambda < 0$

Sätt $\mu = \sqrt{-\lambda}$ $(\mu > 0)$

$r_{1,2} = \pm\mu$

$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$

$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$, $C_2 = -C_1$

$y(\ell) = C_1(e^{\mu\ell} - e^{-\mu\ell}) = 2C_1 \sinh\mu\ell = 0$

$\mu\ell > 0 \Rightarrow \sinh\mu\ell > 0$

$\therefore C_1 = 0$ och $C_2 = 0$

Ger inget

3) $\lambda > 0$ $\quad$ Sätt $\omega = \sqrt{\lambda}$

19 $r_{1,2} = \pm i\omega$, $y = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x$

$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$y(\ell) = C_2 \sin\omega\ell = 0$

Vi måste ha $C_2 \neq 0$, varför $\sin\omega\ell = 0$

$\omega\ell = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$

$\lambda = \omega^2 = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$, $\underline{\underline{y = C \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \ C \neq 0}}$

Linjära differentialekvationer av ordning n

En linjär differentialekvation av ordning n är av formen

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x). \tag{1}$$

Ekvationen kallas *homogen* om $h(x) \equiv 0$, *inhomogen* annars. Ekvationen sägs ha *konstanta koefficienter*, om $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ alla är konstanta.

Skriv vänsterledet i (1) som $L[y]$, där L är en *differentialoperator*. Vi önskar uttrycka L med hjälp av *deriveringsoperatorn* $D = \frac{d}{dx}$. Vi har

$$y' = Dy, \quad y'' = D^2y = D(Dy) \quad \text{osv.},$$

så att

$$\begin{aligned} L[y] &= D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y \\ &= (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y = P(D)y. \end{aligned}$$

Alltså är $L = P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$ ett polynom i D. Vi kallar L *linjär*, eftersom

$$\begin{aligned} L[y_1 + y_2] &= L[y_1] + L[y_2], \\ L[\alpha y] &= \alpha L[y], \quad \alpha \text{ konstant}. \end{aligned}$$

För en typisk term $a_k(x)D^k$ i $P(D)$ är nämligen

$$\begin{aligned} a_k(x)D^k[y_1 + y_2] &= a_k(x)(D^k y_1 + D^k y_2) = a_k(x)D^k y_1 + a_k(x)D^k y_2, \\ a_k(x)D^k[\alpha y] &= \alpha a_k(x)D^k y, \end{aligned}$$

varefter addition ger påståendet.

Om y_1 och y_2 är lösningar till den homogena ekvationen $L[y] = 0$, så är $c_1y_1 + c_2y_2$ också en lösning för godtyckliga konstanter c_1 och c_2, ty

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0.$$

Detta brukar kallas *superpositionsprincipen*.

Sats. *Om y_p är någon lösning till $L[y] = h(x)$ (en partikulärlösning), så är y en lösning till $L[y] = h(x)$ om och endast om $y_h = y - y_p$ löser $L[y_h] = 0$. Med andra ord har $L[y] = h(x)$ allmänna lösningen $y = y_h + y_p$, där y_h är allmänna lösningen till $L[y_h] = 0$.*

Bevis. På grund av lineariteten hos L är

$$L[y - y_p] = L[y] - L[y_p] = L[y] - h(x),$$

varför $L[y] = h(x)$ om och endast om $L[y - y_p] = 0$. $\square$

Homogena ekvationer med konstanta koefficienter

Antag nu att alla a_k är konstanta. Betrakta den homogena ekvationen $L[y] = P(D)y = 0$. Polynomet P kallas för det *karakteristiska polynomet*, och ekvationen

$$P(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

kallas *karakteristiska ekvationen.*

Vi behöver några regler för räkning med operatorpolynom. Om a och b är konstanter, så är

$$\begin{aligned}&\big((D+a)(D+b)\big)[y] = (D+a)[(D+b)y] = (D+a)[Dy+by]\\ &= D[Dy+by] + a(Dy+by) = D^2y + bDy + aDy + aby = \big(D^2 + (a+b)D + ab\big)y,\end{aligned}$$

dvs. vi får multiplicera ihop $(D+a)(D+b) = D^2 + aD + bD + ab$ "som vanligt". Allmänt gäller för polynom P och Q med konstanta koefficienter att $(PQ)(D) = P(D)Q(D)$. Vi behöver ofta beräkna uttryck av formen $P(D)[ze^{cx}]$, där c är en komplex konstant. Först påminner vi om att om $c = \alpha + i\beta$, är

$$e^{cx} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \quad \text{och} \quad De^{cx} = ce^{cx}.$$

Sats (Förskjutningsregeln). *Om P har konstanta koefficienter, och om c är en (reell eller komplex) konstant, är*

$$P(D)[ze^{cx}] = e^{cx}P(D+c)z.$$

Bevis. Det gäller att

$$\begin{aligned}D[ze^{cx}] &= z'e^{cx} + zce^{cx} = e^{cx}(Dz + cz) = e^{cx}(D+c)z = e^{cx}z_1,\\ D^2[ze^{cx}] &= D[z_1e^{cx}] = e^{cx}(D+c)z_1 = e^{cx}(D+c)^2z,\end{aligned}$$

och allmänt

$$D^k[ze^{cx}] = e^{cx}(D+c)^k z.$$

Av detta fås nu

$$\begin{aligned}P(D)[ze^{cx}] &= D^n[ze^{cx}] + a_{n-1}D^{n-1}[ze^{cx}] + \cdots + a_1D[ze^{cx}] + a_0ze^{cx}\\ &= e^{cx}(D+c)^nz + a_{n-1}e^{cx}(D+c)^{n-1}z + \cdots + a_1e^{cx}(D+c)z + a_0e^{cx}z\\ &= e^{cx}\big((D+c)^n + a_{n-1}(D+c)^{n-1} + \cdots + a_1(D+c) + a_0\big)z\\ &= e^{cx}P(D+c)z,\end{aligned}$$

vilket är påståendet. □

Låt oss återvända till ekvationen $P(D)y = 0$. Om r är en konstant, är $D^ke^{rx} = r^ke^{rx}$, och $P(D)[e^{rx}] = P(r)e^{rx}$, och alltså är e^{rx} en lösning till $P(D)y = 0$ om och endast om $P(r) = 0$, dvs. r är en rot till karakteristiska ekvationen. Låt nu de olika rötterna till $P(r) = 0$ vara $r_1, r_2, \ldots, r_k$ med multipliciteter $m_1, m_2, \ldots, m_k$. För varje j, $1 \le j \le k$, kan vi enligt faktorsatsen skriva $P(r) = Q_j(r)(r - r_j)^{m_j}$ för något polynom Q_j av grad $n - m_j$. Låt $p_j(x)$ vara ett godtyckligt polynom av grad $m_j - 1$, $1 \le j \le k$. Enligt förskjutningsregeln är

$$P(D)[p_j(x)e^{r_jx}] = e^{r_jx}P(D+r_j)[p_j(x)] = e^{r_jx}Q_j(D+r_j)D^{m_j}[p_j(x)] = 0.$$

Enligt superpositionsprincipen är varje funktion av formen $y = p_1(x)e^{r_1x} + \cdots + p_k(x)e^{r_kx}$ en lösning till ekvationen $P(D)y = 0$. I själva verket ger detta allmänna lösningen till ekvationen.

Sats. *Om den karakteristiska ekvationen $P(r) = 0$ har de olika rötterna $r_1, r_2, \dots, r_k$ med multipliciteter $m_1, m_2, \dots, m_k$, så är den allmänna lösningen till ekvationen $P(D)y = 0$*

$$y = p_1(x)e^{r_1 x} + \dots + p_k(x)e^{r_k x}, \tag{2}$$

där $p_j(x)$ är ett godtyckligt polynom av grad högst $m_j - 1$ för $j = 1, 2, \dots, k$.

Bevis. Vi har redan visat att varje funktion av formen (2) är en lösning. Omvänt måste vi nu visa att varje lösning är av den formen. Beviset är induktion i k. Om $k = 1$, är $P(r) = (r - r_1)^n$, och om y är en godtycklig lösning till $P(D)y = 0$, så är enligt förskjutningsregeln

$$D^n[ye^{-r_1 x}] = e^{-r_1 x}(D - r_1)^n[y] = e^{-r_1 x}P(D)y = 0,$$

varför n integrationer ger att $ye^{-r_1 x}$ är ett polynom $p_1(x)$ av grad högst $n - 1 = m_1 - 1$. Alltså gäller påståendet för $k = 1$. Antag så att $k > 1$ och att påståendet är sant för varje polynom P med färre än k olika nollställen. Låt nu P ha k olika nollställen och låt y vara en godtycklig lösning till $P(D)y = 0$. Låt som förut nollställena vara $r_1, r_2, \dots, r_k$ med multipliciteterna $m_1, m_2, \dots, m_k$. Skriv $P(r) = Q_1(r)(r - r_1)^{m_1}$, och sätt $z = (D - r_1)^{m_1}y$. Då är

$$0 = P(D)y = Q_1(D)(D - r_1)^{m_1}y = Q_1(D)z.$$

Eftersom Q_1 är ett polynom med de $k - 1$ olika nollställena $r_2, \dots, r_k$ med multipliciteter $m_2, \dots, m_k$, ger induktionsantagandet att

$$z = q_2(x)e^{r_2 x} + \dots + q_k(x)e^{r_k x}$$

för vissa polynom $q_j(x)$ av grad högst $m_j - 1$, $j = 2, \dots, k$. Enligt förskjutningsregeln är

$$D^{m_1}[ye^{-r_1 x}] = e^{-r_1 x}(D - r_1)^{m_1}y = e^{-r_1 x}z = q_2(x)e^{(r_2 - r_1)x} + \dots + q_k(x)e^{(r_k - r_1)x}.$$

Integrera partiellt enligt följande mönster: Om $q(x)$ är ett polynom och $c \neq 0$, är

$$\begin{aligned}\int q(x)e^{cx}\,dx &= \frac{1}{c}q(x)e^{cx} - \int \frac{1}{c}q'(x)e^{cx}\,dx = \frac{1}{c}q(x)e^{cx} - \frac{1}{c^2}q'(x)e^{cx} + \int \frac{1}{c^2}q''(x)e^{cx}\,dx \\ &= \dots = \tilde{q}(x)e^{cx} + C,\end{aligned}$$

där $\tilde{q}(x)$ är ett polynom av samma grad som $q(x)$ och C är en konstant. Upprepad användning av detta ger vid handen att det finns polynom $p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x)$ av grad högst $m_1 - 1$, $m_2 - 1, \dots, m_k - 1$ så att

$$ye^{-r_1 x} = p_1(x) + p_2(x)e^{(r_2 - r_1)x} + \dots + p_k(x)e^{(r_k - r_1)x}.$$

Därför blir y av formen (2), och satsen är bevisad. □

Inhomogena ekvationer

Betrakta nu den inhomogena ekvationen $P(D)y = h(x)$, där $P(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$ är ett polynom med konstanta koefficienter. Vi skall ange hur man kan finna en partikulärlösning i några olika fall.

I. $h(x) =$ polynom.
Om $a_0 \neq 0$, ansätt $y_p(x) = q(x)$, där $q(x)$ är ett polynom av samma grad som $h(x)$.
Om $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$, $a_m \neq 0$, ansätt $y_p(x) = x^m q(x)$, där $q(x)$ är ett polynom av samma grad som $h(x)$.

II. $h(x) = g(x)e^{\alpha x}$, där $g(x)$ är ett polynom.
Skriv $y = ze^{\alpha x}$. Då blir

$$P(D)y = P(D)[ze^{\alpha x}] = e^{\alpha x}P(D+\alpha)z = g(x)e^{\alpha x},$$

så att $P(D+\alpha)z = g(x)$, som löses som i I. Vi ser att man också direkt kan ansätta $y_p(x) = x^m q(x)e^{\alpha x}$, där $q(x)$ är ett polynom av samma grad som $g(x)$, och där m är multipliciteten hos α som rot till karakteristiska ekvationen $P(r) = 0$ ($m = 0$ om α inte är en rot).

III. $h(x) = g(x)\cos\beta x$ eller $h(x) = g(x)\sin\beta x$, där $g(x)$ är ett polynom.
Betrakta hjälpekvationen

$$P(D)u = g(x)e^{i\beta x}$$

och bestäm en lösning som i II. Skriv alltså $u = ze^{i\beta x}$. Då blir

$$P(D)u = e^{i\beta x}P(D+i\beta)z = g(x)e^{i\beta x}, \qquad P(D+i\beta)z = g(x),$$

och vi kan bestämma en lösning z i form av ett lämpligt polynom. Vi har

$$P(D)[\operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u] = g(x)(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

och om $P(D)$ och $g(x)$ har reella koefficienter, blir

$$P(D)[\operatorname{Re} u] = g(x)\cos\beta x \quad \text{och} \quad P(D)[\operatorname{Im} u] = g(x)\sin\beta x.$$

IV. $h(x) = g(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ eller $h(x) = g(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, där $g(x)$ är ett polynom.
Betrakta hjälpekvationen

$$P(D)u = g(x)e^{(\alpha+i\beta)x},$$

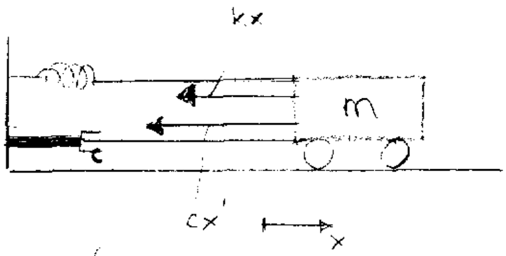
och bestäm en partikulärlösning.

V. $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$.
Lös $P(D)y_1 = h_1(x)$ och $P(D)y_2 = h_2(x)$. Då är $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x)$ en lösning.

1

Veckoövad v 45 Reell Matematisk Analys

Ett svängningsproblem



$x = x(t)$ avvikelse från jämviktsläget

Fjäderkraft: $-kx$

Dämpning: cx'

Newton:

$$mx'' = -kx - cx'$$

$$\underbrace{x'' + \frac{c}{m}}_{2\lambda}x' + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\mu^2}x = 0 \qquad x'' + 2\lambda x' + \mu^2 x = 0$$

Karakteristisk ekv.: $r^2 + 2\lambda r + \mu^2 = 0$

$$r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}$$

1) $\lambda < \mu$, sätt $\beta = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}$

$r_{1,2} = -\lambda \pm i\beta$

$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = e^{-\lambda t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$

(Dämpad svängning)

2) $\lambda = \mu$ $\quad r_{1,2} = -\lambda$: $x(t) = (C_1 t + C_2)e^{-\lambda t}$

(Kritisk dämpning)

3) $\lambda > \mu$: Två olika reella negativa rötter r_1 och r_2

$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$

(Överkritisk dämpning)

Ex $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Kar. ekv. $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$

$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2+1)^2 = 0$, $(r-i)^2(r+i)^2$

$r_1 = i, m_1 = 2$; $r_2 = -i, m_2 = 2$ $\boxed{m_1, m_2 \text{ multiplicitet}}$

$y = (C_1x + C_2)e^{r_1x} + (C_3x + C_4)^{r_2x} =$ $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{C}$

$= (C_1x + C_2)e^{ix} + (C_3x + C_4)e^{-ix} =$

$= (C_1x + C_2)(\cos x + i\sin x) + (C_3x + C_4)(\cos x - i\sin x) =$

$= \boxed{(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x}$ $A, B, C, D \in \mathbb{C}$

A, B, C, D godtyckliga konstanter ; reella A, B, C, D ger <u>reella</u> lösningar

<u>Inhomogena ekvationer</u>

$P(D)y = h(x)$ $P(r) = r^n + a_{k-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0$

I) $h(x) =$ polynom

a) Om $a_0 \neq 0$ ansätt $y_p(x) = q(x)$ = ett polynom av samma grad som $h(x)$.

b) Om $a_0 = \dots = a_{m-1} = 0$ men $a_m \neq 0$
ansätt $y_p(x) = x^m q(x)$ (samma $q(x)$ som ovan)
0 är en rot till kar. ekv med multipl. m

II $h(x) = g(x)e^{\alpha x}$, $g(x)$ polynom

skriv $y = z \cdot e^{\alpha x}$ Då blir

$P(D)y = P(D)[ze^{\alpha x}] =$ [förskjutningsregeln] $=$

$= e^{\alpha x}P(D+\alpha)[z] = g(x)e^{\alpha x}$

Lös $P(D+\alpha)[z] = g(x)$

Bestäm en part. lösning som i I

Ex $y'' - 5y' + 6y = 3(x^2-2)e^{3x}$

kar. ekv. $r^2 - 5r + 6 = 0$, $r_1 = 3$, $r_2 = 2$

$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$

$y = ze^{3x}$, $(D^2 - 5D + 6)[ze^{3x}] = e^{3x}[(D+3)^2 - 5(D+3) + 6][z] =$

$= e^{3x}(D^2 + 6D + \cancel{9} - 5D - \cancel{15} + \cancel{6})[z] = 3(x^2-2)e^{3x}$

$(D^2 + D)[z] = 3(x^2-2)$

Ansätt $z_p = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$

$(D^2 + D)[z_p] = z_p'' + z_p' = 6Ax + 2B + 3Ax^2 + 2Bx + C = 3x^2 - 6$

Koefficientidentifiering.

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & 3A = 3 \\ x^1: & 6A + 2B = 0 \\ x^0: & 2B + C = -6 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} A = 1 \\ B = -3 \\ C = 0 \end{array}\right\} \quad z_p = x^3 - 3x^2$$

$y_p = (x^3 - 3x^2)e^{3x}$

$\underline{\underline{y = y_p + y_h}} = (x^3 - 3x^2)e^{3x} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$

Anmärkning Diff. ekv. för z är $\underbrace{P(D+\alpha)}_{P_1(D)}[z] = g(x)$
med kar. polynomet $P_1(r) = P(r+\alpha)$

$P_1(0) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$

Man kan direkt ansätta: $y_p = x^m q(x) e^{\alpha x}$,
$q(x)$ = polynom av samma grad som $g(x)$
m = multipl. hos α som rot till kar. ekv. $P(r) = 0$

III $h(x) = g(x)\begin{cases}\sin\beta x \\ \cos\beta x\end{cases}$, $g(x)$ polynom

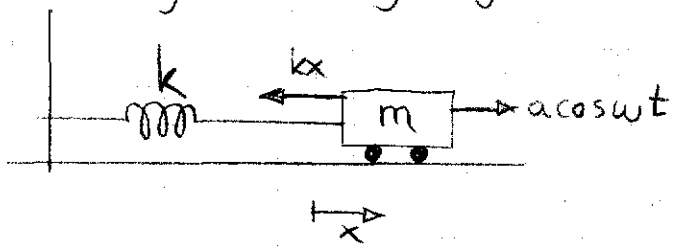
Betrakta hjälpekvationen: $P(D)u = g(x)e^{i\beta x}$
och bestäm en lösning som i II
Skriv $u = z\cdot e^{i\beta x}$, $P(D)u = P(D)[ze^{i\beta x}] =$

$= e^{i\beta x}P(D+i\beta)[z] = g(x)e^{i\beta}$

$P(D+i\beta)[z] = g(x)$ Ansätt z = ett lämpligt polynom
Om $P(D)$ och $g(x)$ har reella koefficienter blir

$$\begin{cases} P(D)[\operatorname{Re} u] = g(x)\cos\beta x \\ P(D)[\operatorname{Im} u] = g(x)\sin\beta x \end{cases}$$

Ex Tvungna svängningar



$mx'' = -kx + a\cos\omega t$

$x'' + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\mu^2}x = \frac{a}{m}\cos\omega t$ kar. ekv. $r^2 + \mu^2 = 0$, $r = \pm i\mu$

$x_h = C_1\cos\mu t + C_2\sin\mu t$ (den fria svängningen)

Partikulärlösning x_p (den tvugna svängningen)
Betrakta ekvationen $u'' + \mu^2 u = \frac{a}{m}e^{i\omega t}$

1) $\omega \neq \mu$, $i\omega$ ingen kar. rot
Ansätt $u_p = C\cdot e^{i\omega t}$

$u_p'' + \mu^2 u_p = C(i\omega)^2e^{i\omega t} + \mu^2 e^{i\omega t} = C\underbrace{(\mu^2-\omega^2)}_{\neq 0}e^{i\omega t} = \frac{a}{m}e^{i\omega t}$

$C = \dfrac{a}{m(\mu^2-\omega^2)}$

$$x_p = \mathrm{Re}[u_p] \cdot \frac{a}{m(\mu^2-\omega^2)} \cos\omega t$$

$|C| \to \infty$ då $\omega \to \mu$ <u>Resonans!</u>

2) $\mu = \omega$ Ansätt $u_p = C t e^{i\mu t}$ (se boken)

<u>Räkneövning</u>

$$\begin{cases} y' = x^2 - y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$ (Riccati) <u>rita grafen till lösningen!</u>

<u>Inhomogena linjära ODE med konstanta koefficienter</u>

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

$a_k \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$

$$y_{\text{allmän}} = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}}$$

allmän lösning till inhomogena

allmän lösn. till homogena

en partikulärlösn. till inhomogena (linearitet)

<u>f(x) kvasipolynom</u> $P(x)e^{\alpha x}\begin{Bmatrix}\cos\beta x \\ \sin\beta x\end{Bmatrix}$

<u>Problem</u>: Hitta partikulärlösning för högerled kvasipolynom

<u>Ansats</u>: Man antar att det finns lösning av en speciell typ och försöker bestämma parametrar s.a. det blir en lösning.

8.51 b) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ Naturlig ansats Ae^{2x}

Homogen: $y'' - 3y' + 2y = 0$

karakteristiska ekv. : $r^2 - 3r + 2 = 0$

$(r-1)(r-2) = 0$ $r_1 = 1$, $r_2 = 2$

$y_{hom} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ "av naturliga ansatsen" Vänd!

$y_{part.}(x) = e^{2x} z(x)$

$P(D) = D^2 - 3D + 2(I)$

$D = \frac{d}{dx}$

$P(D)\underbrace{\left(e^{2x} \cdot z\right)}_{y_{part}} = e^{2x} P(D+2)(z) = e^{2x}$

$P(D+2)(z) = 1$

$P(D+2) = (D+2)^2 - 3(D+2) + 2 = D^2 + 4D + 4 - 3D - \cancel{6} + \cancel{2} =$

$= D^2 + D$

konstanterna försvinner ty 2, rot till kar. ekv

$(D^2 + D)(z) = 1 \qquad z'' + z' = 1 \qquad z = x$ en lösn.

$\Rightarrow y_{part}(x) = xe^{2x}$

$y_{allm.}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + xe^{2x}$

<u>Direkt ansats</u> (utan förskjutningsregeln)

$P(D)y = e^{\alpha x}$

$y_{part}(x) = x^m e^{\alpha x}$ $\quad$ $m = \alpha$:s multiplicitet som rot till den kar. ekv. (kan vara 0)

$P(D)y = \overbrace{Q(x)}^{\text{polynom}} e^{\alpha x}$

$y_{part} = x^m Q_1(x) e^{\alpha x} \qquad \deg Q = \deg Q_1$

---

51 d) $\quad y'' + 2y' + y = xe^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

Homogen: $r^2 + 2r + 1 = 0 \qquad r_1 = r_2 = -1$

$y_{hom}(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$

Direkt ansats: $y_{part}(x) = x^2(Ax + B)e^{-x} =$

$\begin{cases} \alpha = -1 \\ m = 2 \end{cases}$

$= (Ax^3 + Bx^2)e^{-x}$

7

Insättning i Diff ekv:

$$y'_{part} = (3Ax^2 + 2Bx)e^{-x} + (Ax^3 + Bx^2)(-e^{-x}) = (-Ax^3 - Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx)e^{-x}$$

$$y''_{part} = (-3Ax^2 - 2Bx + 6Ax + 2B)e^{-x} - (-Ax^3 - Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx)e^{-x}$$

$$y''_{part} + 2y'_{part} + y_{part} = e^{-x}(-3Ax^2 - 2Bx + 6Ax + 2B + Ax^3 + Bx^2 - 3Ax^2 - 2Bx -$$
$$- 2Ax^3 - 2Bx^2 + 6Ax^2 + 4Bx + Ax^3 + Bx^2) = xe^{-x}$$

$$(6Ax + 2B)\cancel{e^{-x}} = x\cancel{e^{-x}}$$

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = 0$$

$$y_{part}(x) = x^2 \cdot \frac{1}{6}xe^{-x} = \frac{1}{6}x^3e^{-x}$$

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{6}x^3e^{-x}$$

$$y(0) = 1 \quad : \quad y(0) = C_1 = 1$$

$$y'(x) = \left(e^{-x}\left(1 + C_2x + \frac{1}{6}x^3\right)\right)'\Bigg|_{x=0} = -e^{-x}\left(1 + C_2x + \frac{1}{6}x^3\right) + e^{-x}\left(C_2 + \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{x=0}$$

$$= -1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow C_2 = 1$$

$$\underline{\underline{y = e^{-x} + xe^{-x} + \frac{1}{6}x^3e^{-x}}}$$

---

56 a) $y'' - 2y' - y = \sin 3x = \operatorname{Im} e^{3ix}$

$$y'' - 2y' - y = e^{3ix} \quad / \operatorname{Im} y$$
(reella koefficienter)

Homogen: $r^2 - 2r - 1 = 0 \quad (r-1)^2 - 2 = 0$

$r_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ (reella)

$$y_{hom} = C_1e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2e^{(1-\sqrt{2})x}$$

$3i$ ej rot till kar. ekv. $\Rightarrow m = 0$

Alternativa tillvägagångssätt

a) Reell Ansats: $\underline{y_p = x^0(A\cos 3x + B\sin 3x)}$

b) Komplex Ansats: $x^0 Ce^{3ix}$ $\quad C \in \mathbb{C}$

$y_p = \text{Im}(Ce^{3ix})$

c) Förskjutningsregeln

a) $y_p' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$

$y_p'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$

$y_p'' - 2y_p' - y_p = (-9A - 6B - A)\cos 3x + (-9B + 6A - B)\sin 3x = \sin 3x$

$\left.\begin{array}{l} -10A - 6B = 0 \\ 6A - 10B = 1 \end{array}\right\}$ $\quad \left.\begin{array}{l} A = \frac{3}{68} \\ B = \frac{-5}{68} \end{array}\right\}$ $y_p = \frac{1}{68}(3\cos 3x - 5\sin 3x)$

$y_{allm} = y_{hom} + y_{part} = C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x} + \frac{1}{68}(3\cos 3x - 5\sin 3x)$

---

58 a) $y'' - 6y' + 10y = e^{3x}\cos x = \text{Re}(e^{3x} \cdot e^{ix}) = \text{Re}(e^{(3+i)x})$

Homogena: $r^2 - 6r + 10 = 0 \quad (r-3)^2 + 1 = 0$

$r_{1,2} = 3 \pm i$

$3+i$ en enkelrot till kar. ekv. $\quad m = 1$

Reell ansats: $y_p = xe^{3x}(A\cos x + B\sin x)$

Komplex ansats: $y_p = \text{Re}(xCe^{(3+i)x})$, $\quad C \in \mathbb{C}$

Förskjutningsregeln

$u'' - 6u' + 10u = e^{(3+i)x}$

$u(x) = e^{(3+i)x} z(x)$

$P(D)(e^{(3+i)x} z) = e^{(3+i)x} P(D + (3+i))z = e^{(3+i)x}$

$P(D+3+i) = (D+3+i)^2 - 6(D+3+i)^1 + 10 =$

$$= D^2 + \cancel{6D} + 2iD + 9 + 6i - 1 - \cancel{6D} - 18 - 6i + \cancel{10} =$$

$$= D^2 + 2iD$$

$$(D^2 + 2iD)z = 1 \qquad z'' + 2iz' = 1$$

$$z_{part} = \frac{1}{2i}x = -\frac{i}{2}x$$

$$u_{part}(x) = -\frac{i}{2}xe^{(3+i)x} = -\frac{i}{2}xe^{3x}(\cos x + i\sin x)$$

$$y_p(x) = \text{Re}\, u_p(x) = \frac{1}{2}xe^{3x}\sin x$$

Allmänna lösningen:

$$y_{allm.} = C_1 e^{3x}\cos x + C_2 e^{3x}\sin x + \frac{1}{2}xe^{3x}\sin x \qquad C_{1,2} \in \mathbb{R}$$

---

63 c) $\quad y''' + 9y' = (x^2 + 5)e^{0\cdot x}$

Homogen: $\quad r^3 + 9r = 0 \qquad r(r^2 + 9) = 0$

$$\boxed{r_1 = 0} \qquad r_{2,3} = \pm 3i$$

$$y_{hom}(x) = C_1 + C_2\cos 3x + C_3\sin 3x$$

y_{part} : 0 rot till kar. ekv. ; $m = 1$

$$y_{part} = x^1(Ax^2 + Bx + C)e^{0\cdot x} =$$

$$= Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$y'_{part} = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y''_{par} = 6Ax + 2B$$

Sätt in bestäm konstanter

Speciella ekvationer

1) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ Sätt $\frac{y}{x} = z$ $y = xz$,

$y' = xz' + z$ ger

$xz' + z = f(z)$, $x\frac{dz}{dx} = f(z) - z$ separabel

$$\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x} \quad (\text{om } f(z) \neq z)$$

Ex. $xyy' = x^2 + y^2$

$$y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \quad (\text{om } x, y \neq 0)$$

$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ Sätt $\frac{y}{x} = z$, $y = xz$, $y' = xz' + z$

$x z' + \cancel{z} = \frac{1}{z} + \cancel{z}$, $x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z}$

$z\,dz = \frac{1}{x}\,dx$, $\frac{z^2}{2} = \ln|x| + C_1$

$z^2 = 2\ln|x| + 2C_1 = \ln x^2 + \underbrace{C}_{C=\ln C_2} = \ln(C_2 x^2)$

$\underline{\underline{y = \pm x\sqrt{\ln(C_2x^2)}}}$ (ty $y = x\cdot z$)

---

2) $y' + g(x)y = h(x)y^a$ $(a \neq 1)$

Bernoullis ekvation

Sätt $z = y^{1-a}$ Då blir

$z' = (1-a)y^{-a}\cdot y' = (1-a)y^{-a}\left[h(x)y^a - g(x)y\right] =$

$= (1-a)\left[h(x) - g(x)y^{1-a}\right] = \underline{\underline{(1-a)\left[h(x) - g(x)z\right]}}$

Linjär

Eulers diff. ekv.

3) $$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = h(x)$$

a_k konstanter

Sätt $x = e^t$, $t = \ln x$ för $x > 0$

Sätt $D_x = \frac{d}{dx}$, $D_t = \frac{d}{dt}$

$$D_x y = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}, \quad x D_x = D_t$$

$$D_x = e^{-t} D_t$$

$$x^2 D_x^2 y = x(x D_x)[D_x y] = e^t D_t [e^{-t} D_t y] =$$

$$= e^t [e^{-t} D_t^2 y - e^{-t} D_t y] = D_t^2 y - D_t y$$

$$\therefore \quad x^2 D_x^2 = D_t^2 - D_t = D_t(D_t - 1)$$

Allmänt fås

$$x^k D_x^k = D_t(D_t - 1) \cdots (D_t - k + 1)$$

Man erhåller en linjär ekv med konstanta koefficienter

Ex $\quad x^2 y'' - 4 x y' + 6y = 0$

$x = e^t$, $t = \ln x$ ger

$$(D_t^2 - D_t) y - 4 D_t y + 6y = 0$$

$$(D_t^2 - 5 D_t + 6) y = 0 \quad \text{(homogen diff. ekv av 2:a ordn)}$$

kar ekv. $r^2 - 5r + 6 = 0$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} = C_1 x^2 + C_2 x^3$$

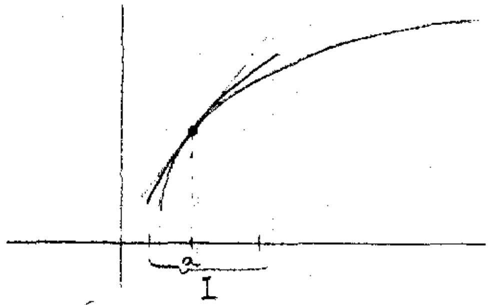
---

4) $y'' = f(y, y')$, H.L. oberoende av x

Sätt $p = y'$, $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$

man får $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$ 1:a ordn. ekv

Taylors formel



Sats (Sats om Taylors formel)

f har kontinuerliga derivator av ordning $n+1$ i ett intervall I som innehåller punkten $x=a$.
För $x \in I$ är då:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x) =$$

$$\boxed{\text{där } R_{n+1}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt} \quad \text{Resttermen}$$

$$= P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

$P_n(x)$ kallas Taylorpolynomet av grad n
$R_{n+1}(x)$ -"- Resttermen av ordning $n+1$

Bevis Partialintegration:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x 1 \cdot f'(t)\, dt = f(a) + R_1(x) \qquad (n=0)$$

$$f(x) = f(a) + \Big[(t-x)f'(t)\Big]_a^x - \int_a^x (t-x) f''(t)\, dt =$$

$$= f(a) + (x-a)f'(a) + R_2(x) \qquad (n=1)$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) - \left[\frac{(t-x)^2}{2} f''(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)\, dt =$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + R_3(x)$$

Allmänt: Om $R_k(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\, dt$ är

$$R_k(x) = \left[-\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\, dt =$$

$$= \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{k+1}(x)$$

Induktion ger påståendet. ■

<u>Integralkalkylens medelvärdessats:</u>

Om $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga på $[a,b]$ och om $g(x)$ <u>ej</u> växlar tecken på $[a,b]$ är

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \quad \text{för något } \xi \in (a,b)$$

Tillämpas denna sats erhålles:

$$\underset{\text{Restterm}}{R_{n+1}(x)} = f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt =$$

$$= f^{(n+1)}(\xi)\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

för något $\xi = \xi(x)$ mellan a och x

<u>Lagranges restterm</u>

Fallet $a=0$ kallas ofta för <u>Maclaurins formel</u>
(samma förutsättningar som Taylors formel)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

för något θ mellan 0 och 1

<u>Några standardutvecklingar</u>

$a = 0$

$f(x) = e^x$, $f^{(k)}(x) = e^x$ för alla k

$f^{(k)}(0) = 1$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\text{Resttermen}}} \qquad 0 \le \theta \le 1$$

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k-1}$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \underbrace{(-1)^n \cos(\theta x)\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{Resttermen}}}$$

$f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

Def. $\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$ Binomialkoefficient

$$\boxed{(1+\alpha)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \underbrace{\binom{\alpha}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}}_{\text{Resttermen}}}$$

$$\frac{1-c^n}{1-c} = 1 + c + c^2 + \dots + c^{n-1} \quad \left(\text{geometrisk summa}\right) \quad c \neq 1$$

$$(1-c)(1+c+c^2+\dots+c^{n-1}) = 1 + \cancel{c} + \dots + \cancel{c^{n-1}} - \cancel{c} - \cancel{c^2} - \cancel{c^{n-1}} - c^n = 1 - c^n$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \dots + (-t)^{n-1} + \frac{(-t)^n}{1+t} \quad \Big| \int_0^x dt$$

$$\Longrightarrow \ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underbrace{(-1)^n\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt}_{\text{Resttermen}}$$

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{1}{1+\theta x}\int_0^x t^n\,dt = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)(n+1)} \qquad 0 \leq \theta \leq 1$$

Obs. Annan form på resttermen!

I boken finns flera standardutvecklingar

Entydighetssats

Antag att f och dess derivator t.o.m ordning $n+1$ är kontinuerliga i en omgivning av $x=0$

Antag vidare att

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n h(x) \quad \text{där } h(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Så är detta Maclaurinutvecklingen av $f(x)$

Bevis. Enligt Maclaurins formel är:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^{n+1}B(x)$$

$B(x)$ begränsad nära $x=0$

Sätt $x=0$: $a_0 = f(0)$

Utnyttja detta och dividera med x

$$a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1} + x^{n-1}h(x) = f'(0) + \dots + x^n B(x)$$

$x \to 0$: $\quad a_1 = f'(0)$

osv. $\quad a_2 = \dfrac{f''(0)}{2!} \quad \dots \quad a_{n-1} = \dfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$

Till sist kvarstår följande

$$a_n + h(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + x B(x)$$

$x \to 0$ en sista gång

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad h(x) = x B(x)$$

■

Ex Beräkna ett närmevärde av

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^4}\,dx \qquad \text{(inte en elementär funktion)}$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{\cos\theta t}{6!}t^6$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} - \frac{\cos\theta x^2}{720}x^{12}$$

$$\frac{1-\cos x^2}{x^4} = \frac{1}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{\cos\theta x^2}{720}x^8$$

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^4}\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{720}\int_0^1 \cos(\theta x^2)\cdot x^8\,dx$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{120} + \delta = \frac{59}{120} + \delta \approx 0{,}4917 + \delta$$

där $0 < \delta < \frac{1}{720}\int_0^1 x^8\,dx \approx 1{,}54\cdot 10^{-4} < 2\cdot 10^{-4}$

$$0{,}4917 < \int_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^4}\,dx < 0{,}4919$$

Räkneövning 5/11

8.67) $(x-y)y' - y = 0$

$$y' = \frac{y}{x-y} \qquad (x \neq y)$$

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \qquad \text{sätt } \frac{y}{x} = z,\quad y = xz,\quad y' = xz' + z$$

$$xz' + z = \frac{z}{1-z}$$

$$xz' = x\frac{dz}{dx} = \frac{z}{1-z} - z = \frac{z - z + z^2}{1-z} = \frac{z^2}{1-z} \quad \text{Separabel}$$

17

$(z \neq 0)$ $\quad \dfrac{1-z}{z^2}\,dz = \dfrac{dx}{x}$

$$\int \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} \right) dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{z} - \ln|z| = \ln|x| + \ln C_1 = \ln(C_1|x|)$$

$$-\frac{1}{z} = \ln|z| + \ln(C_1|x|) = \ln(C_1|xz|)$$

$$C_1|xz| = e^{-\frac{1}{z}} \quad , \quad \underbrace{\pm C_1}_{=C} xz = e^{-\frac{1}{z}} \qquad (C_1 \neq 0)$$

$$Cy = e^{-\frac{x}{y}} \qquad \left(\frac{y}{x} = z \right)$$

$$\boxed{y e^{\frac{x}{y}} = \frac{1}{C}}$$

$y = 0$ är också en lösning som inte finns med i den allmänna lösningsformeln.
Singulär lösning

8.71) a) $\quad x^2 y'' + 3xy' + 2y = x^3 \quad , \quad x > 0$

Eulers diff. ekv. Sätt $t = \ln x \quad , \quad x = e^t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} \quad , \quad xy' = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$x^2 y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

Diff. ekv. övergår i:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}$$ linjär med konstanta koeff.

Homogena:

Kar. ekv. : $r^2 + 2r + 2 = 0$

$r = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$

$y = C_1' e^{(-1+i)t} + C_2' e^{(-1-i)t} =$

$= e^{-t}(C_1' \underbrace{e^{it}}_{\cos t + i\sin t} + C_2' \underbrace{e^{-it}}_{\cos t - i\sin t}) = \underline{e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)}$

Nu ska vi hitta en partikulär lösning

Ansätt $y_p = a e^{3t}$: (derivera och sätt in)

$a(9+6+2)e^{3t} = 17a e^{3t} = e^{3t} \qquad a = \frac{1}{17}$

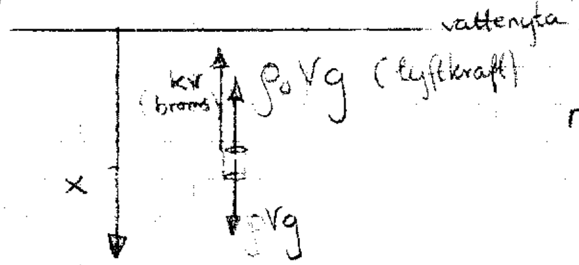
$y_p = \frac{1}{17} e^{3t}$

$y = y_h + y_p = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + \frac{1}{17} e^{3t}$

men $t = \ln x \qquad x = e^t$

$\Rightarrow y = \frac{1}{x}(C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)) + \frac{1}{17} x^3$

8.75/



$m_{tunna} = \rho V$

$\rho > \rho_0$ (annars hade tunnan flytit upp till ytan)

Newton: $\rho V x'' = \rho V v' = \rho V g - \rho_0 V g - kv \quad \Big| : \rho V$

$\Rightarrow v' + \frac{k}{\rho V} v = g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$

homogen lösn.

$v_h = C e^{-\frac{k}{\rho V} t}$

Nästa blad!

part. lösn. $v_p = \dfrac{g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}{\frac{k}{\rho V}} = \dfrac{Vg(\rho - \rho_0)}{k}$

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{\rho V}t} + \frac{Vg(\rho-\rho_0)}{k}$$

$$v(0) = C + \frac{Vg(\rho-\rho_0)}{k} = 0 \;, \quad C = -\frac{Vg(\rho-\rho_0)}{k}$$

$$\underline{\underline{v(t) = \frac{Vg(\rho-\rho_0)}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{\rho V}t}\right)}}$$

$$\underline{v(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{Vg(\rho-\rho_0)}{k} = v_\infty}$$

Taylors och Maclaurins formler

9.15) $e^{x} = \quad + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^{\theta_1 x}}{24}x^4 \;, \quad 0 \leq \theta_1 \leq 1$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{e^{-\theta_2 x}}{24}x^4 \;, \quad 0 \leq \theta_2 \leq 1$$

$$e^{x} + e^{-x} = 2 + x^2 + \frac{1}{24}\left(e^{\theta_1 x} + e^{-\theta_2 x}\right)x^4$$

$$\left|e^{x} + e^{-x} - 2 - x^2\right| = \frac{1}{24}\left|e^{\theta_1 x} + e^{-\theta_2 x}\right| x^4$$

för $|x| \leq 1$ är $0 < e^{\theta_1 x} + e^{-\theta_2 x} \leq e + 1 < 4$

$$\underline{\left|e^{x} + e^{x} - 2 - x^2\right| \leq \frac{1}{6}x^4}$$

Sam Polesie

1

Veckoblad Reell Matematisk Analys del A v 46

Taylors formel

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} =$$

$$= P_n(x) + (x-a)^{n+1} B_{n+1}(x)$$

där $B_{n+1}(x)$ är begränsad, ja t.o.m kontinuerlig i en omgivning av $x=a$

$$B_{n+1}(x) = \frac{f(x) - P_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} \longrightarrow \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} \overset{\text{def.}}{=} B_{n+1}(a)$$

Ex. Maclaurinutveckla $\frac{1}{\cos x}$ med restterm av ordning 6

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B_1(x) \quad , \; B_1(x) \text{ begränsad}$$

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 B_2(t) \quad , \; B_2(t) \text{ begränsad}$$

sätt in $t = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - x^6 B_1(x) = \frac{x^2}{2} + x^4 B_3(x) = x^2 B_4(x)$

Notera att $t \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - x^6 B_1(x) + \frac{x^4}{4} + x^6 B_3(x) + x^8 (B_3(x))^2 +$$

$$+ x^6 (B_4(x))^3 B_2(t) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^6 B(x) \quad , \; B(x) \text{ begränsad}$$

Def. En funktion $f(x)$ sägs vara av $O(x^n)$ ("stort ordo") för x nära 0, om det finns en konstant M så att $|f(x)| \leq M|x|^n$ för x nära 0.

Det gäller t.ex.

$$O(x^n) \pm O(x^n) = O(x^n)$$

Vänd!

$f(x) = O(x^n) \Longrightarrow f(x) = O(x^m)$ om $n \geq m$

- Om $B(x)$ är begränsad är

$\underline{B(x)\,O(x^n)} = \underline{O(x^n)}$

- Om $y = O(x^n)$ $(n > 0)$

är $O(y^p) = O(x^{np})$

ty om $h(y) = O(y^p)$

är $|h(y)| \leq M_1 |y|^p$, y nära 0

Vidare är $|y| \leq M_2 |x|^n$, x nära 0,

$$|h(y)| \leq M_1 M_2^p |x|^{np} = M|x|^{np}, \quad x \text{ nära } 0$$

<u>Ex från förra sidan kan skrivas:</u>

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6), \quad x \to 0$$

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + O(t^3), \quad t \to 0$$

$$t = 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + O(x^6) = \frac{x^2}{2} + O(x^4) = O(x^2)$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + O(x^6) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)$$

Vidare t.ex:

$$\tan x = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} = \left[x - \frac{x^3}{6} + O(x^7)\right]\left[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)\right] =$$

$$= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + O(x^7) =$$

$$= \underline{\underline{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)}}$$

svårt att ge allmänna formler för konstanterna framför x-termerna i utvecklingen

Ex. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{4+x^2}-2}$

$$\sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}t + O(t^2)$$

$$\sqrt{4+x^2} = 2\sqrt{1+\frac{x^2}{4}} = 2\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4} + O(x^4)\right]$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{4+x^2}-2} = \frac{\cancel{1}+\frac{1}{2}x^2+O(x^4)-\cancel{1}}{\cancel{2}+\frac{x^2}{4}+O(x^4)-\cancel{2}} = \frac{\frac{1}{2}x^2+O(x^4)}{\frac{1}{4}x^2+O(x^4)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+O(x^2)}{\frac{1}{4}+O(x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

Ex $f(x) = (x+1)^2 - e^x - (x+1)\ln(x+1)$

Är $x=0$ en extrempunkt.

(Man finner $f'(0) = f''(0) = 0$)

$$f(x) = x^2+2x+1 - \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O(x^5)\right) -$$

$$- (x+1)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+O(x^5)\right) = \ldots = -\frac{x^4}{8}+O(x^5) =$$

$$= -\frac{x^4}{8}\left(1+xB(x)\right)$$ där $B(x)$ är begränsad

För x nära 0 är $1+xB(x)>0$ så att $f(x)\le 0$ med likhet endast i $x=0$

$x=0$ är ett strängt lokalt maximum

Man ser att $f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$ och

$$f^{(4)}(0) = -24\cdot\frac{1}{8} = -3$$

l'Hospitals regel $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$

Antag

(1) $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ då $x \to x_0$

[eller $g(x) \to \pm\infty$]

(2) $f'(x)$ och $g'(x)$ existerar åtminstone då $x \neq x_0$ i en omgivning av x_0, och

$g'(x)$ har konstant tecken på vardera sidan av x_0

(3) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Motsvarande gäller för

$x \to x_{0+}$, $x \to x_{0-}$, $x \to \pm\infty$

Ex. (1642 b) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\sin 4x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{4\cos 4x} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{2}}}{-4} = -\frac{1}{2}$$

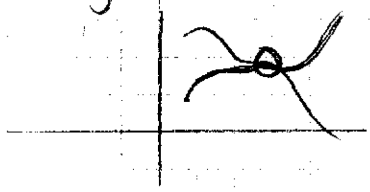
Taylors formel

$f \in C^{n+1}$ i en omgivning till a

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

approximerar f med n-tegradspolynom

bra approximation nära a



$$g(x) = P_n(x) + rest(x)$$

$$rest(x) \overset{def}{=} g(x) - P_n(x)$$

$$e^x = \frac{1}{100}x + \underbrace{\left(e^x - \frac{1}{100}x\right)}_{rest}$$

stor rest $\Leftrightarrow$ dålig approximation

Poängen: R_{n+1} är liten av högre ordning än sista medtagna termen.

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \xi_x \text{ mellan } x \text{ och } a$$

9.20 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ med 4 korrekta decimaler

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+3}(x)$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} + \frac{R_{2n+3}(x)}{x}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\right]_0^1 +$$

$$+ \int_0^1 \frac{1}{x}R_{2n+3}(x)\,dx = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} +$$

$$+ \int_0^1 \frac{1}{x}R_{2n+3}(x)\,dx$$

$$\left| \int_0^1 \frac{1}{x} R_{2n+3}(x)\, dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{1}{x} R_{2n+3}(x) \right| dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\cancel{x}} \frac{\left| (\sin x)^{(2n+3)} \Big|_{x=\xi} \right|}{(2n+3)} \cdot x^{\cancel{2n+3}\; 2}\, dx = \int_0^1 \frac{|\cos \xi_x|}{(2n+3)!} x^{2n+2} \leq$$

$$\leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{(2n+3)!}\, dx = \frac{1}{(2n+3)(2n+3)!} < \varepsilon \quad \text{för } n \text{ tillräckligt stort}$$

Välj noggrannhet $\varepsilon = 0{,}00005$
prövar sig fram med n

9.25 $f(x) = \sin x \arctan x$ $\quad a = 0 \quad n = 4$

resttermen $x^n B(x)$, B begränsad

garanti : $R_{n+1}(x) = x^5 B(x)$

$f(x)$ jämn (som produkt av två udda)

$\Rightarrow R(x) = x^6 B(x)$ (t.o.m. grad 5 samma som t.o.m. grad 4)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^5 B_1(x)$$

$$\arctan x = \blacksquare x + \blacktriangle + x^5 B_2(x)$$
(udda)

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$$

$$\Rightarrow \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + R(x)$$

$$\sin x \cdot \arctan x = x^2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) x^4 + x^6 B(x) =$$

$$= x^2 - \frac{1}{2} x^4 + x^6 B(x)$$

7

9.27 b) $\underset{\text{jämn}}{e^{\cos x}} = e^{\cos(-x)}$ $n=4$, $a=0$, $R(x) = x^6 B(x)$

$e^{\cos x} = e^{\cos x - 1 = t} \cdot e$

$t = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + \tilde{R}(x)$

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \text{rest}$

$e^{\cos x - 1} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + \text{rest} =$

$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \text{rest}$

$e^{\cos x} = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + x^6 B(x)$

9.28 b) $x \to 0$ $\frac{x + \ln(1-x)}{1 - \sqrt{1-x^2}} = (*)$

$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \binom{\frac{1}{2}}{1} x^2 + x^4 B(x)$

$(*) = \frac{\cancel{x} - (\cancel{x} + \frac{x^2}{2} + x^3 B(x))}{\cancel{1} - \cancel{1} + \binom{\frac{1}{2}}{1} x^2 + x^4 B(x)} = \frac{-\frac{1}{2} + x B(x)}{\frac{1}{2} + x^2 B(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} -1$

9.29 b) $\lim_{x \to 0} (1 + \sin^2 x)^{-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x \to 0} e^{-2 \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{x^2}}$

utveckla täljaren t o m grad 2 $\left(a = e^{\ln a} \right)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \text{rest}$

$\ln(\underbrace{1+\sin^2 x}_{\text{nära } 0}) = \sin^2 x - \frac{\sin^4 x}{2} + \text{rest} = x^2 + \text{rest}$

$e^{-\frac{2(\cancel{x^2} + x^3 B(x))}{\cancel{x^2}}} \xrightarrow[x \to 0]{} e^{-2}$

9.31 c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\sqrt[3]{1+x^3}-x^3\right)=$

$x=\frac{1}{t}$, $t\to 0$

$=\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^2}\sqrt[3]{1+\frac{1}{t^3}}-\frac{1}{t^3}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t\sqrt[3]{1+\frac{1}{t^3}}-1}{t^3}=$ nära ∞

$=\lim\frac{\cancel{t}\sqrt[3]{\frac{t^3+1}{\cancel{t^3}}}-1}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1+\binom{\frac{1}{3}}{1}t^3+t B^{*}-1}{\cancel{t^3}}=\frac{1}{3}$

9.31 d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n\cdot e^{-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot e^{-n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{(1/n)^2}{2}+\frac{1}{n^3}B(n)\right)-n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}B(n)-n}=e^{-\frac{1}{2}}$

Cauchys medelvärdessats (sats 16 9)

Antag att f och g är kontinuerliga på $[a,b]$ och deriverbara i (a,b), och antag att $g'(x)\neq 0$ på (a,b). Då finns (minst) ett tal ξ i (a,b) så att:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Bevis Bilda hjälpfunktionen

$$\varphi(x)=\big(f(b)-f(a)\big)g(x)-\big(g(b)-g(a)\big)f(x)$$ deriverbar i (a,b) kontinuerlig på $[a,b]$

Nu är $\varphi(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = \varphi(b)$

φ uppfyller förutsättningarna i (den vanliga) medelvärdessatsen

Då finns $\xi \in (a,b)$ så att

$\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi'(\xi)$

men $\varphi(b) - \varphi(a) = 0$ så att $\varphi'(\xi) = 0$.

Vidare är $g(b) - g(a) = (b-a)g'(\xi_1)$ för något $\xi_1 \in (a,b)$

Alltså är $g(b) - g(a) \neq 0$, och $g'(\xi) \neq 0$

$$[f(b) - f(a)]\underbrace{g'(\xi)}_{\neq 0} = \underbrace{[g(b) - g(a)]}_{\neq 0} f'(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

~~(l'Hospitals' regel~~

Betrakta $x > x_0$ Vi har

1) $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ då $x \to x_{0+}$

2) $f'(x)$ och $g'(x)$ existerar för $x > x_0$ (nära x_0) och $g'(x)$ har konstant tecken där

3) $\lim_{x \to x_{0+}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar

Då gäller $\lim_{x \to x_{0+}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_{0+}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

<u>Bevis</u> Definiera (om det ej redan är gjort)

$f(x_0) = g(x_0) = 0$

Då blir f och g kontinuerliga på $[x_0, x]$

Vänd!

Enligt Cauchys medelvärdessats finns ξ i (x_0, x) så att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$x \to x_{0+} \Rightarrow \xi \to x_{0+}$$

Enligt antagande 3 har högerledet ett gränsvärde då $x \to x_{0+}$. Alltså är

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Analogt i övriga fall

Ex $\displaystyle \lim_{x\to\infty} x e^{-x} \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

där $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$, $g(x) = \frac{e^x}{x}$

$g(x) \to \infty$ då $x \to \infty$

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} \quad , \quad g'(x) = \frac{1}{x}e^x - \frac{1}{x^2}e^x$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{e^x}{x}}{\frac{1}{x}e^x - \frac{1}{x^2}e^x} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$$

Alltså är $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Ex $\displaystyle \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin x - x}{x^3}$

Man ser direkt t.ex. via Maclaurinutveckling

att $\displaystyle \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{6}$

11

Men L'Hospitals regel går också bra

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{6x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}$$

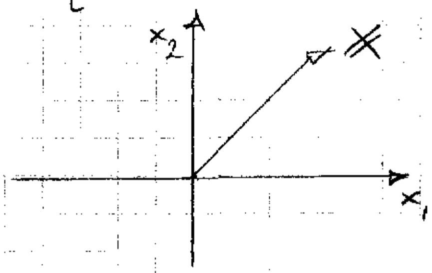
Funktioner av flera variabler

Ex. Temperaturen $T = T(x, y, z)$

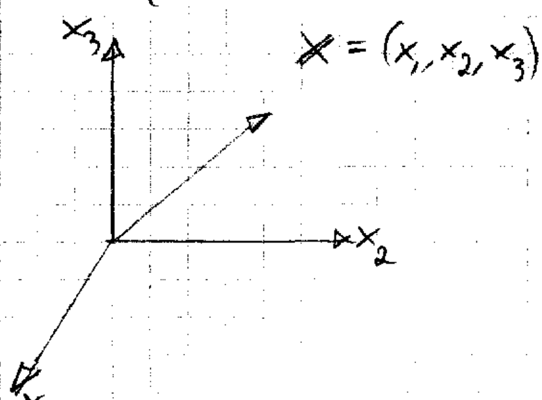
Kraftfält $\mathbb{F} = \mathbb{F}(x, y, z, t)$

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ = den reella tallinjen

$\mathbb{R}^2 = \{ x = (x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$ = planet



$\mathbb{R}^3 = \{ \mathbb{X} = (x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$ = det tredimensionella rummet



$\mathbb{R}^n = \{ \mathbb{X} = (x_1, x_2 \ldots, x_n) : x_1, x_2 \ldots x_n \in \mathbb{R} \}$

Def. Om $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ och $y_n = (y_1, y_2 \ldots y_n)$

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 \ldots, x_n + y_n)$

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Vanliga räknelagar

T.ex. $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$

Def. $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2} = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ = längden av $\mathbf{x}$

Cauchy-Schwarz olikhet $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

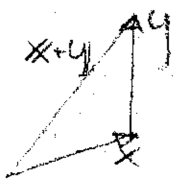
$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$$

med likhet omm $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är parallella, dvs. $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$ eller $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$

Def. $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}$, θ = vinkeln mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$

Sats (triangelolikheten)

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$$



Bevis $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} =$

$= |\mathbf{x}|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2 \leq$

$\leq |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 \underset{C.S}{\leq} |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 =$

$= (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2$ Rotutdragning är påstående

likhet omm $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$ eller $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ med $\lambda \geq 0$

13

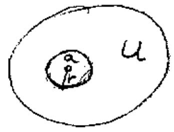
Mängder i $\mathbb{R}^n$ (Topologi terminologi)

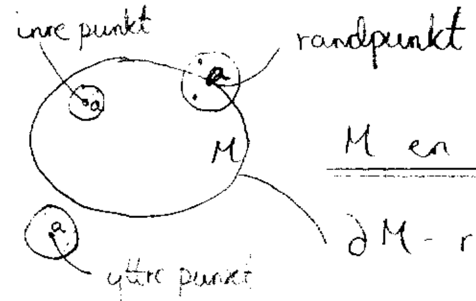
Öppet klot $\{ x : |x - a| < r \}$

Slutet klot $\{ x : |x - a| \leq r \}$

Sfär $\{ x : |x - a| = r \}$ = randen

Omgivning U till en punkt a





M en mängd

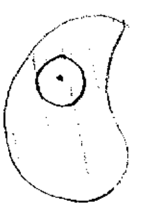
∂M - randmängden - randen

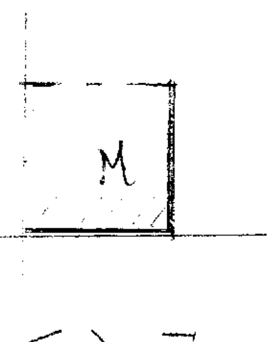
M är <u>öppen</u> om inga av dess randpunkter tillhör M

$\iff$ alla punkter i M är inre punkter

M är <u>sluten</u> om alla dess randpunkter tillhör M

Ett öppet klot är en öppen mängd
Ett slutet klot —"— sluten mängd } följd av triangelolikheten





varken öppen eller sluten mängd

M begränsad $\iff \exists$ en konstant C så att $|x| \leq C$

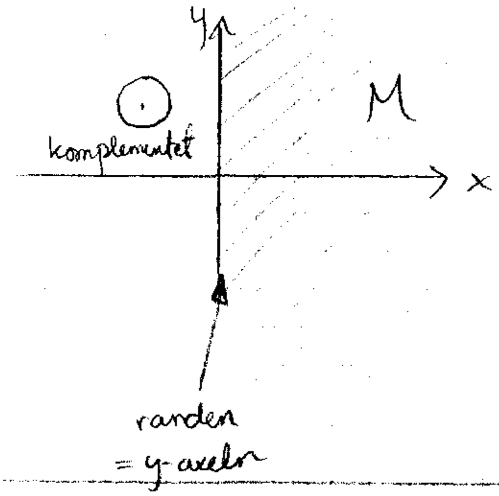
$\forall x \in M$

Ex, Ett klot med radie r : $|x - a| \leq r \Rightarrow |x| = |a + (x - a)|$
$\leq |a| + |x - a| \leq |a| + r = C$

M kompakt $\Leftrightarrow$ M är sluten och begränsad

Ex. Ett slutet klot $|\mathbf{x} - a| \leq r$

Ex. Ett slutet halvplan $\{(x, y) : x \geq 0\}$



M sluten, ej begränsad

$D \subseteq \mathbb{R}^n$

$\mathbf{f}$ en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$

$\mathbf{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^p$ $\quad D$ är definitionsmängden

värdemängden (V_f) är en del av $\mathbb{R}^p$

$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$

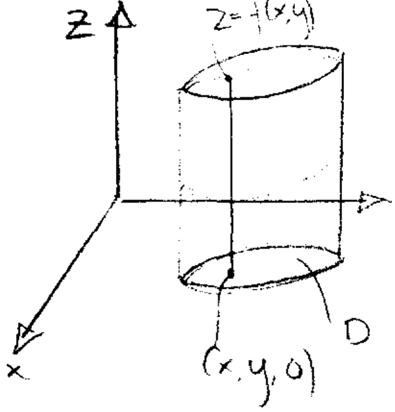
$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots x_n) \\ \quad \cdots \\ y_p = f_p(x_1, \dots x_n) \end{cases}$$

p st. <u>reellvärda funktioner av n reella variabler</u>

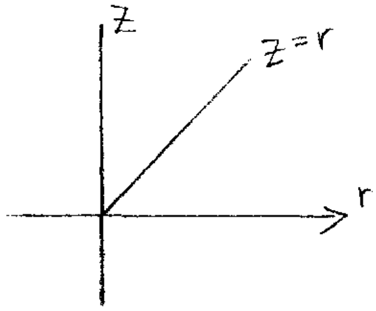
Reellvärda funktioner av två variabler

$(x,y) \in D \quad , \quad z = f(x,y)$

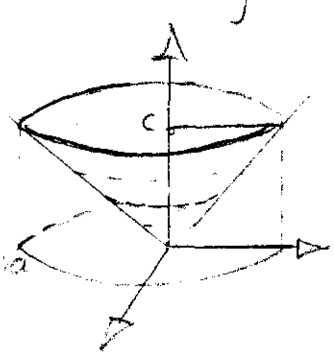
$\{(x,y,z) : z = f(x,y), (x,y) \in D\}$ en funktionsyta



<u>Ex.</u> $z = \sqrt{x^2+y^2} = r$

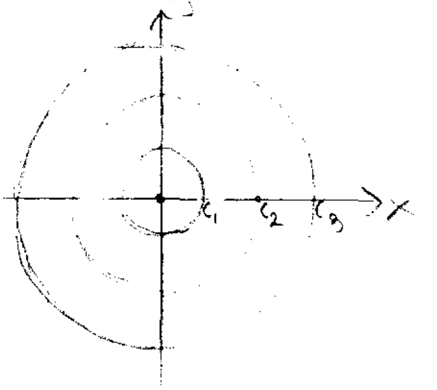


Rotera kring z-axeln



En kon
Rotationsyta

Kurvan $z = c$ kallas nivåkurva

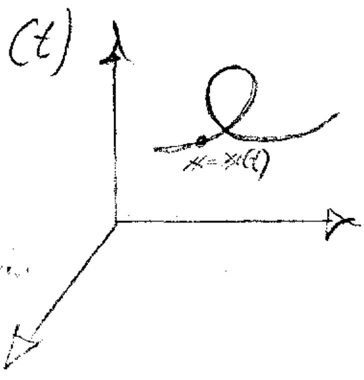


Matlab : contour

Se hemsidan för mer info. om hur man ritar ytor i matlab!

<u>Kurvor</u>
parameterform

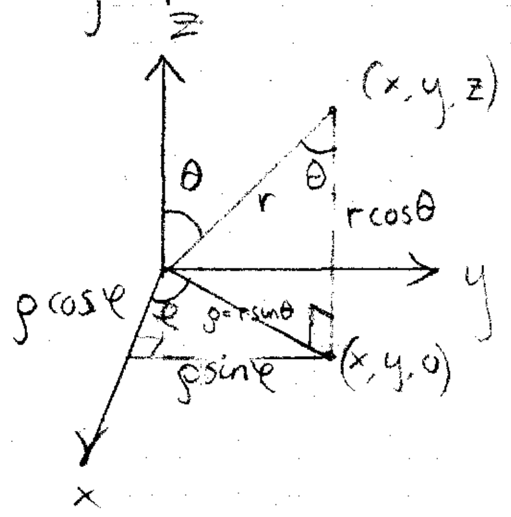
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$$



<u>Ex</u> rät linje $\quad \mathbf{x} = \underset{\text{punkt}}{\mathbf{x}_0} + t \underset{\text{riktningsvektor}}{\mathbf{v}}$

$t \in \mathbb{R}$

Rymdpolära (sfäriska) koordinaterna



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

En sfär med radie R

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Storgruppsövning 13/11-03

1639) $f(x) = x^{-3}\left(\cot x + \frac{a}{x} + bx\right) = \frac{1}{x^3}\left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{a}{x} + bx\right) =$

$$= \frac{x\cos x + (a + bx^2)\sin x}{x^4 \sin x} \overset{\text{maclaurinutveckling}}{=} \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right) + (a+bx^2)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right)}{x^4\left(x + O(x^3)\right)} =$$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + ax - \frac{ax^3}{6} + \frac{ax^5}{120} + bx^3 - \frac{bx^5}{6} + O(x^7)}{x^5\left(1 + O(x^2)\right)} =$$

$$= \frac{(1+a)x + \left(-\frac{1}{2} - \frac{a}{6} + b\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} + \frac{a}{120} - \frac{b}{6}\right)x^5 + O(x^7)}{x^5\left(1 + O(x^2)\right)} =$$

För att gränsvärde skall kunna existera (då $x \to 0$) måste vi ha:

$$\begin{cases} 1 + a = 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{a}{6} + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Nästa blad!

Med $\begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$ blir

$$f(x) = \frac{\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{120} - \frac{1}{18}\right)x^5 + O(x^7)}{x^5(1 + O(x^2))} =$$

$$= \frac{\frac{1}{30} - \frac{1}{18} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{30} - \frac{1}{18} = \underline{\underline{-\frac{1}{45}}}$$

1640/ a) $f(x) = x^{-3}\left(\int_0^1 \frac{\sin xt}{t}\,dt - x\right)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^5 B(x)$, där $B(x)$ är kontinuerlig

$$\int_0^1 \frac{\sin xt}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{xt - \frac{x^3t^3}{6} + x^5t^5 B(xt)}{t}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \left(x - \frac{x^3}{6}t^2 + x^5t^4 B(xt)\right)dt = x - \frac{x^3}{6}\cdot\frac{1}{3} + x^5\int_0^1 t^4 B(xt)\,dt =$$

$$f(x) = -\frac{1}{18} + x^2\int_0^1 t^4 B(xt)\,dt$$

$B(x)$ begränsad $\Rightarrow |B(x)| \leq M$ för $|x| \leq 1$ t.ex.

$|xt| \leq |x| \leq 1$, $|B(xt)| \leq M$ för $|x| \leq 1$

$$\left|x^2\int_0^1 t^4 B(xt)\,dt\right| \leq x^2\int_0^1 t^4 \underbrace{|B(xt)|}_{\leq M}\,dt \leq Mx^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\therefore \quad f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{18}$$

1643 b) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$ $a, b > 0$

$f(x) \xrightarrow[x\to 0_+]{} -\infty$, $g(x) \xrightarrow[x \to 0_+]{} -\infty$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{\sin ax}\cdot\cos ax\cdot a}{\frac{1}{\sin bx}\cdot \cos bx \cdot b} = \frac{a}{b}\cdot\frac{\cos ax}{\cos bx}\cdot\frac{\sin bx}{\sin ax}$$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{\sin bx}{\sin ax}, \quad \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{\cos bx \cdot b}{\cos ax \cdot a} \xrightarrow[x \to 0_+]{} \frac{b}{a}$$

Vänd!

L'Hospital: $\lim\limits_{x \to 0_+} \frac{\sin bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$

l'Hospital: $\lim\limits_{x \to 0_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{\cancel{b}} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{\cancel{b}}{\cancel{a}} = \underline{\underline{1}}$

1643) c) $x \operatorname{arccot} x = [\infty \cdot 0] = \frac{\operatorname{arccot} x}{\frac{1}{x}} = [\frac{0}{0}] = \frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (L'Hospital)

$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{1+x^2} \xrightarrow[x \to \infty]{} \underline{\underline{1}}$

1644) a) $\frac{\ln x}{x} \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{\int_2^x \frac{dt}{\ln t}}{\frac{x}{\ln x}} = \frac{f(x)}{g(x)}$

$g(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{\ln x - \frac{x}{x}}{(\ln x)^2}} = \frac{\ln x}{\ln x - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\ln x}} \longrightarrow 1$

L'Hospital: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \underline{\underline{1}}$

Gränsvärden

$\mathbb{f}$ en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$ med def. mängd D

a en inre punkt eller randpunkt till D

$\lim\limits_{\mathbb{x} \to \mathbb{a}} \mathbb{f}(\mathbb{x}) = \mathbb{b} \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.a. $\forall \mathbb{x} \in D_f : |\mathbb{x} - \mathbb{a}| < \delta$, $\mathbb{x} \neq \mathbb{a}$

$|\mathbb{f}(\mathbb{x}) - \mathbb{b}| < \varepsilon$

$\iff |\mathbb{f}(x) - \mathbb{b}| \xrightarrow[|\mathbb{x} - \mathbb{a}| \to 0]{} 0$

Samma räkneregler som för en variabel.

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2 \cdots , f_p)$$
$$\mathbf{b} = (b_1, b_2 \cdots , b_n)$$
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{b} \iff f_k(\mathbf{x}) \to b_k \quad \underline{\underline{\forall\, k = 1,2,3 \cdots p}}$$

<u>Ex.</u> $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{\underbrace{xy + x^2y^3}_{xy(1+xy^2)}} \quad (x,y) \neq (0,0)$

$$f(x,y) = \frac{\sin xy}{xy} \cdot \frac{1}{1+xy^2} \quad , \quad \frac{\sin t}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} 1$$

$(x,y) \to (0,0) \implies \begin{matrix} x \to 0 \\ y \to 0 \end{matrix} \quad xy^2 \Rightarrow 0$ och

$t = xy \to 0$

$$\therefore \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{xy} \cdot \frac{1}{1+xy^2} = 1$$

Sam Polesie

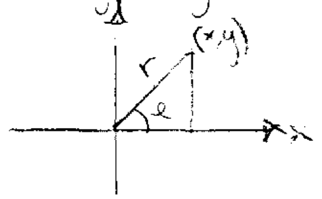
Veckoblad i Reell Matematisk Analys del A v47

Gränsvärden

$f(x) \to b$ då $x \to a$ $\iff$ $|f(x) - b| \xrightarrow[|x-a| \to 0]{} 0$

I planet kan man ibland använda polära koord.

Låt $(x,y) \to (0,0)$



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$(x,y) \to (0,0) \iff r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ oberoende av φ

Att $f(x,y) \to b$ då $(x,y) \to (0,0)$ betyder alltså att $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \to b$ då $r \to 0$, oberoende av φ

Ex $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^2+x^2y}$ $\quad (x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| = |f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)| = \frac{r^4 \overbrace{|\cos\varphi \sin^3\varphi|}^{\leq 1}}{|r^2 + r^3\cos^2\varphi\sin\varphi|} \leq$$

$$\leq \frac{r^2}{|1 + r\cos^2\varphi\sin\varphi|} \leq$$

$\leq \left[|r\cos^2\varphi \sin\varphi| \leq r,\ |1+\cos^2\varphi\sin\varphi| \geq 1 - |r\cos^2\varphi\sin\varphi| \geq 1-r > 0 \text{ för } r < 0 \right] \leq \dfrac{r^2}{1-r}$

$$\therefore\ 0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{r^2}{1-r} \xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

Enligt instängningslagen gäller

$|f(x,y)| \to 0$, $f(x,y) \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$

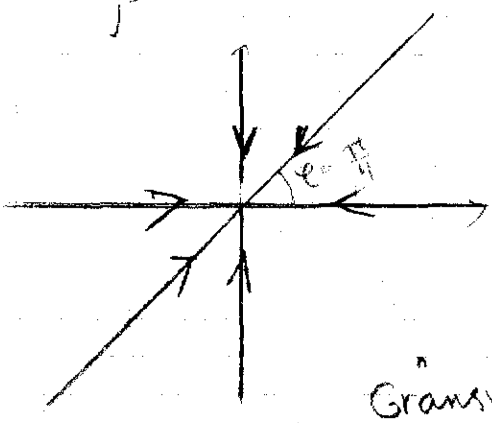
Ex $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $(x,y) \neq 0$

$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \dfrac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} = \cos\varphi\sin\varphi$

saknar gränsvärde då $r \to 0$ (oberoende av φ)

Gränsvärde saknas!

Annars kan man börja med att låta $(x,y) \to (0,0)$ längs enkla kurvor, t.ex. linjer



$f(0,y) = 0 \quad \forall y \neq 0$

$f(x,0) = 0 \quad \forall x \neq 0$

Men $f(x,x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2}$ då $x \to 0$

Gränsvärde saknas

Betrakta $g(x,y) = f(x^2,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$ $(x,y) \neq 0,0$

y-axeln : $g(0,y) = 0 \to 0$ då $y \to 0$

linjen $y=kx$: $g(x,kx) = \dfrac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = \dfrac{kx}{k^2+x^2} \to 0$ då $x \to 0$

Alltså gäller $g(x,y) \to (0,0)$ då $(x,y) \to (0,0)$ längs räta linjer

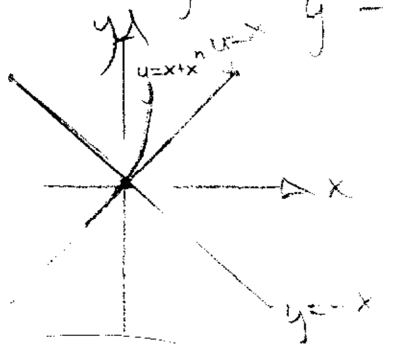
$\lim g(x,x^2) = f(x^2,x^2) = \dfrac{1}{2}$

Längs parabeln $y=x^2$ går $g(x,y) \to \dfrac{1}{2}$

Gränsvärde saknas!

3

Ex. $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{y^2 - x^2}$ $\quad y \neq \pm x$



Gå mot $(0,0)$ längs kurvan $y = x + x^n$ där $n > 1$

konjugatregeln

$$f(x, x+x^n) = \frac{x^2 \cdot x(1+x^{n-1})}{x^n \cdot x(2+x^{n-1})} = \frac{1+x^{n-1}}{x^{n-2}(2+x^{n-1})}$$

$n=2$: $f(x, x+x^n) = \dfrac{1+x}{2+x} \to \dfrac{1}{2}$ då $x \to 0$

$n>2$: $f(x, x+x^n) \to \infty$ då $x \to 0$

Gränsvärde saknas

Def. f en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$ med def. mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $\;(f: D \to \mathbb{R}^p)$

a en punkt i D

f kontinuerlig i a om $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Sats: Om f är reellvärd och kontinuerlig på en kompakt mängd D, så antar f såväl ett största som ett minsta värde på D

$\left[\; \exists \max_{x \in D} f(x) \quad \exists \min_{x \in D} f(x) \;\right]$

Sats: Om f är kontinuerlig på en kompakt mängd D så är f likformigt kontinuerlig på D,

dvs $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.a. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in D$ med $|x - y| < \delta$

Alltså δ kan väljas oberoende av x och y

Talföljder

En talföljd a_n, $n = p, p+1, \dots$
kan ses som en funktion definierad på heltal:

$a_n = f(n)$, $n \geq p$

Gränsvärde då $n \to \infty$
som för funktioner.

Ex. Vi vet att $\lim_{x \to \infty} x^p e^{-ax} = 0$ $\begin{cases} \text{för } p \geq 0 \\ a > 0 \end{cases}$ konstanter

Härav fås att om $|k| < 1$ så gäller att:

$$|n^p k^n| = n^p |k|^n = n^p e^{n \ln |k|} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad (\ln|k| < 0)$$

$n^p k^n \to 0$ då $n \to \infty$ om $|k| < 1$

Differensekvationer

Ex. (sid 35)

Insättning k vid varje års början
Kapital y_n vid början av år n

$y_1 = k$ r % årlig ränta
30 % skatt på räntan

$$y_{n+1} = y_n + \frac{r}{100} - 0{,}3 \cdot \frac{r}{100} y_n + k =$$

$$= \left(1 + 0{,}7 \frac{r}{100}\right) y_n + k \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

rekursionsformel

Linjär differensekvation av 1:a ordn. med konstanta koefficienter

$$y_{n+1} + a y_n = d_n$$

$$y_1 = -ay_0 + d_0$$
$$y_2 = -ay_1 + d_1 = (-a)^2 y_0 + (-a)d_0 + d_1$$
$$y_3 = -ay_2 + d_2 = (-a)^3 y_0 + (-a)^2 d_0 + (-a)d_1 + d_2$$

Allmänt:

$$y_n = (-a)^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (-a)^{n-1-k} \cdot d_k$$

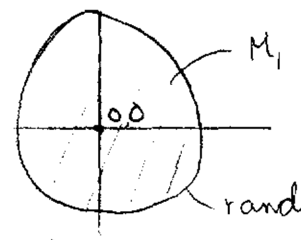
Räkneövning 17/11

6+11)

$$M_1 = \{ (x,y) : x^2 + y^2 \leq 1 \}$$
$$M_2 = \{ (x,y) : |x| + |y| < 1 \}$$
$$M_3 = \{ (x,y) : \max(|x|, |y|) \leq 1 \}$$
$$M_4 = \{ (x,y) : |xy| < \tfrac{1}{4} \}$$
$$M_5 = \{ (x,y) : x^2 + y^2 - 2x - 4y < 11 \}$$
$$M_6 = \{ (x,y) : |x + 2y| \leq 2 \}$$
$$M_7 = \{ (x,y) : y > x^2, 0 < x < 1, y \leq 1 \}$$
$$M_8 = \{ (x,y) : x^2 + y^2 \leq 2 \leq -4 - 4x - 4y - x^2 - y^2 \}$$

Rita; öppna, slutna, varken eller, begränsade, kompakta

1)



randen $x^2 + y^2 = 1$

$\underbrace{\text{sluten, begränsad}}_{\text{kompakt}}$

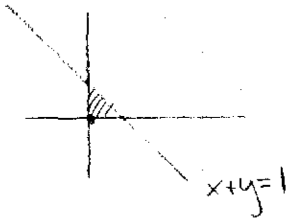
begränsad M: $\exists R \ \forall (x,y) \in M \quad x^2 + y^2 \leq R^2$

---

2)

$\boxed{x \geq 0 \quad y \geq 0}$	
$x \geq 0$	$y < 0$
$x < 0$	$y \geq 0$
$x < 0$	$y < 0$

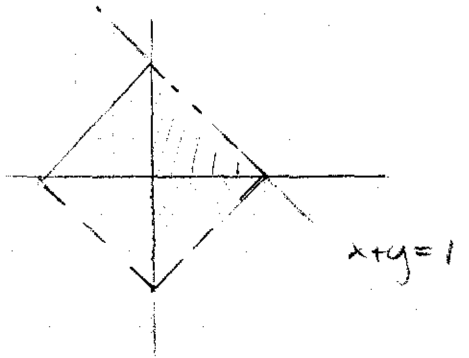
$\triangleright$



$$\underbrace{|\pm x| + |\pm y|}_{=|x|+|y|} < 1$$

Symmetrisk m.a.p. båda axlarna

$\Rightarrow$ räcker att rita i 1:a kvadranten och sen spegla i x- och y-axeln



öppen, begränsad
ej kompakt

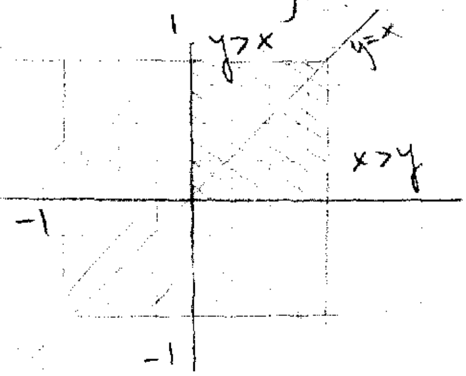
3) $\max(|x|, |y|) \leq 1$

symmetri m.a.p x- och y-axeln

$\Rightarrow$ räcker I kvadranten, sen spegla

$x \geq 0, \ y \geq 0$

$$\max(x, y) \leq 1 \iff \begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$$



$\underbrace{\text{begränsad, sluten}}_{\text{kompakt}}$

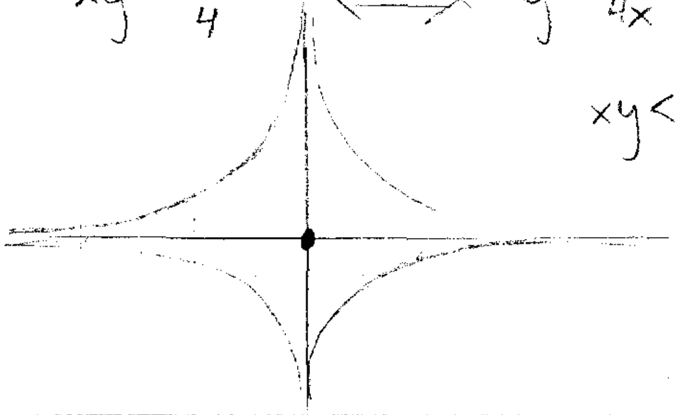
7

4) $|xy| < \frac{1}{4}$

symmetri m.a.p. x-axeln, y-axeln

$x \geq 0, \; y \geq 0$

$xy = \frac{1}{4} \iff y = \frac{1}{4x}$ hyperbel



Vilken sida?

$xy < \frac{1}{4}$ Sätt in $(0,0): 0 < \frac{1}{4}$

öppen, obegränsad

5) $(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 < 11$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 < 16$

cirkelskiva med medelpunkt $(1,2)$ radie 4

öppen, begränsad

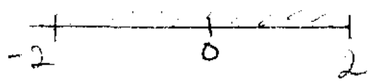
6) $|x+2y| \leq 2$

Sätt ① Tag bort beloppstecknet

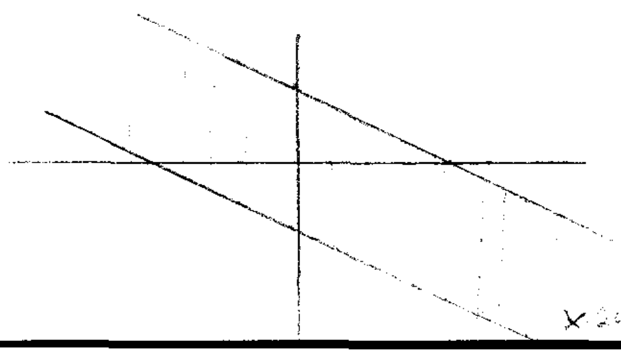
$x+2y \geq 0 : x+2y \leq 2$

$x+2y < 0 : -(x+2y) \leq 2$

avståndet mellan 0 och $x+2y$ är ≤ 2

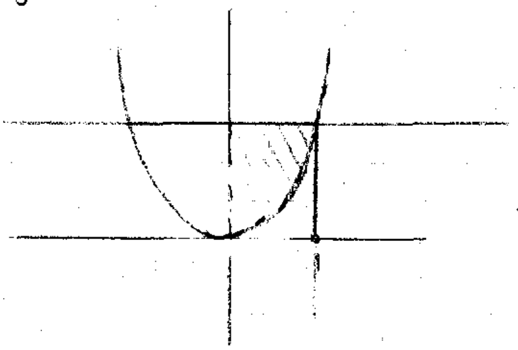


Sätt ② $|x+2y| \leq 2 \iff -2 \leq x+2y \leq 2$



sluten, obegränsad

7) $y > x^2$, $0 < x < 1$, $y \leq 1$



varken öppen eller sluten
begränsad

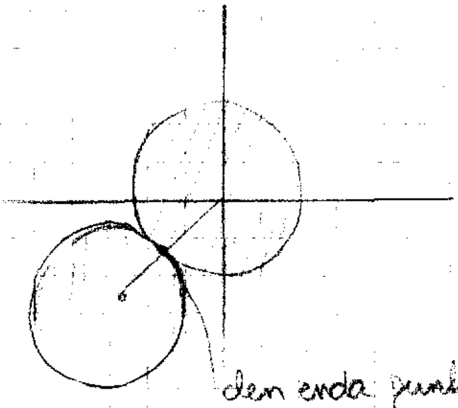
---

8) $x^2 + y^2 \leq 2$ och $2 \leq -4 - 4x - 4y - x^2 - y^2$

$$x^2 + y^2 + 4x + 4y \leq -6$$

$$(x+2)^2 - 4 + (y+2)^2 - 4 \leq -6$$

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 \leq 2$$



den enda punkt som uppfyller båda

$(-1, -1)$

sluten, begränsad $\}$ kompakt

Gränsvärden

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = \ell \quad \text{om}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall (x,y) : \underset{(x,y) \neq (a,b)}{|(x,y) - (a,b)| < \delta_\varepsilon} \quad |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$$

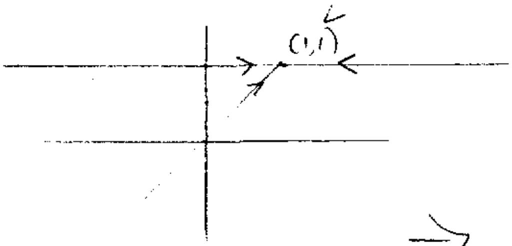
$\nexists \lim$: räcker att hitta två olika sätt för (x,y) att närma sig (a,b) s.a. $f(x,y)$ närmar sig olika tal.

$\exists \lim : f \to \ell$ oavsett hur $(x,y) \to (a,b)$

25 c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x-1}$

Hypotes: $\nexists \lim$

$(x,1)$



$$f(x,1) = \frac{x-1}{x-1} = 1 \xrightarrow[(x,1)\to(1,1)]{} 1$$

$$f(x,x) = \frac{x-x}{x-1} = 0 \xrightarrow[(x,x)\to(1,1)]{} 0$$

olika

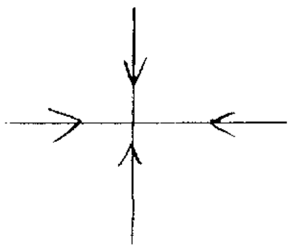
$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x-1}$$

---

25 d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2}$

Hypotes $\nexists \lim$

1) $(0,y)$



$$f(0,y) = \frac{2y^2}{y^2} = 2 \xrightarrow[(0,y)\to(0,0)]{} 2$$

2) $(x,0)$ $\quad f(x,0) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow[(x,0)\to(0,0)]{} \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2}$$

Alternativ lösning m.h.a polära koord.

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{r^2(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi)}{r^2(2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \frac{1+\sin^2\varphi}{1+\cos^2\varphi} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[r\to 0]{} \frac{1+\sin^2\varphi}{1+\cos^2\varphi}$$

ej oberoende av φ

$(x,y) \to (0,0) \Longleftrightarrow r \to 0$

27 b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{x^2+(x+y)^2}$$

$$\frac{\cancel{r^4}^{\,3}\cos^4\varphi \cdot r\sin\varphi}{\cancel{r^2}\cos^2\varphi + \cancel{r^2}(\cos\varphi+\sin\varphi)^2} = r^3 \frac{\cos^4\varphi \sin\varphi}{\cos^2\varphi + (\cos\varphi+\sin\varphi)^2}$$

? begränsad

$\cos\varphi = 0$, $\cos\varphi + \sin\varphi = 0$ } går ej

nämnaren $\neq 0 \ \forall \varphi \quad \varphi \in [0, 2\pi]$

$\cos^2\varphi + (\cos\varphi + \sin\varphi)^2 > 0$

kontinuerlig

$\Rightarrow$ den har ett minsta värde $m \quad m \neq 0$

$\Rightarrow m > 0$

$$\left| \frac{\cos^4\varphi \sin\varphi}{\cos^2\varphi + (\cos\varphi+\sin\varphi)^2} \right| \leq \frac{1}{m}$$

substitution Alternativ lösning

$\begin{cases} x = x \\ z = x+y \end{cases} \qquad \dfrac{x^4(z-x)}{x^2+z^2} \qquad (x,z)\to(0,0)$,

byt sedan till polära koord.

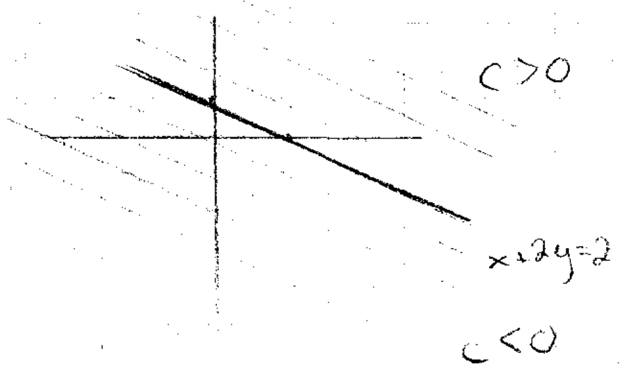
17 b) $z = f(x,y) = x + 2y - 2$, $D_f = \mathbb{R}^2$

nivåkurvor ?

graf ?

$z = C$ i xy planet : $f(x,y) = C$

$x + 2y = C + 2$



} ett plan

11

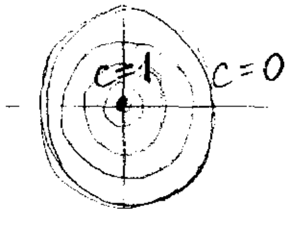
17 c) $z = f(x,y) = (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ $\quad x^2+y^2 \leq 1$

$z = C$: $(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}} = C \Rightarrow C<0$ inga nivåkurvor

$C \geq 0$: $1-x^2-y^2 = C^2$

$x^2+y^2 = 1-C^2 \Rightarrow$ för $C>1$ inga nivåkurvor

$0 \leq C \leq 1 \quad x^2+y^2 = (\sqrt{1-C^2})^2$



$\left\{ \begin{array}{l} \text{halvsfär} \\ z = \sqrt{1-x^2-y^2} \geq 0 \end{array} \right.$

Matlabtenta lö 6/12 kl 11.15 – 13.15
V-huset

<u>Differensekvationer</u>

Linjär ekv. av 1:a ordn. med konstanta koeff.

$y_{n+1} + a y_n = d_n$, $n \geq 0$. y_0 givet startvärde

$$y_n = (-a)^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (-a)^{n-1-k} d_k$$

<u>Ex.</u> $d_k = c \equiv$ const.

$$y_n = (-a)^n y_0 + c \sum_{k=0}^{n-1} (-a)^{n-1-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-a)^{n-1-k} = [n-1-k=j] = \sum_{j=0}^{n-1} (-a)^j = [\text{geometrisk summa}]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1-(-a)^n}{1-(-a)} = \dfrac{1-(-a)^n}{1+a} & \text{om } a \neq -1 \\ n, & \text{om } a = -1 \end{cases}$$

Linjär differensekv. av andra ordn.

(*) $y_{n+2} + ay_{n+1} + by = d_n$, $n \geq 0$
a, b konst.

Allmänt gäller!

1.) Om $y_n^{(1)}$ och $y_n^{(2)}$ är lösningar till den homogena ekv. (dvs (*) med $d_n = 0$, så är också $C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)}$ en lösning till homogena ekv.

2) Om $y_n^{(h)}$ är allmänna lösn. till den homogena och om $y_n^{(P)}$ är en partikulärlösn. till (*) så är $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(P)}$ allmänna lösn. till (*)

Bevis Som för diff. ekv.

Homogena ekv.

(**) $y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0$

Antag $b \neq 0$ (annars fås en 1:a ordn. ekv för $z_n = y_{n+1}$)

Sök lösningar av formen $y_n = r^n$ $(r \neq 0)$

$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = r^{n+2} + ar^{n+1} + br^n =$

$= r^n(r^2 + ar + b) = 0$ omm $\boxed{r^2 + ar + b = 0}$

karakteristiska ekv.

13

r_1 och $r_2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$

<u>Sats</u> Låt r_1 och r_2 vara rötterna till kar. ekv.
Då gäller:

1) Om $r_1 \neq r_2$ är allmänna lösn. till (* *)

$$y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

2) Om $r_1 = r_2$ är allmänna lösn.

$$y_n = (C_1 + C_n n) r_1^n$$

<u>Bevis</u>

1) $C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ är alltid en lösn. (förra sidan)
Låt y_n vara en godtycklig lösn till (* *).
y_n och $C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ är lösningar (för alla konstanter C_1 och C_2). Värdena på lösn. för $n=0$ och $n=1$ bestämmer lösn. entydigt.

Bestäm C_1 och C_2 så att
y_n och $C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ överensstämmer för $n = 0$, $n = 1$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y_0 \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0$$

Alltså entydig lösn. C_1, C_2

Alltså gäller $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$
$\forall n \geq 0$

2) $r_1 = r_2$ $\qquad r^2 + \underline{ar} + b = (r - r_1)(r - r_2) = (r - r_1)^2 =$

$= r^2 \underline{- 2r_1 r} + r_1^2 \qquad \underline{-2r_1 = a}$

$C_1 r_1^n$ är en lösn. Nu är $y_n = n r_1^n$ också en lösning, ty

$$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = (n+2) r_1^{n+2} + a(n+1) r_1^{n+1} + b n r_1^n =$$

$$= r_1^n \left[n \cdot r_1^2 + 2 r_1^2 + a r_1 n + a r_1 + b n \right] =$$

$$= r_1^n \left[n(\underbrace{r_1^2 + a r_1 + b}_{=0}) + r_1 (\underbrace{2 r_1 + a}_{=0}) \right] = 0$$

Alltså är $C_1 r_1^n + C_2 n r_1^n$ alltid en lösn.

Låt nu y_n vara en godtycklig lösning

y_n och $(C_1 + C_2 n) r_1^n$ är två lösn.

Välj C_1 och C_2 så att n får överensstämmelse för $n = 0$ och $n = 1$:

$$\begin{cases} C_1 = y_0 \\ (C_1 + C_2) r_1 = y_1 \end{cases}$$ med en entydig lösning C_1 och C_2

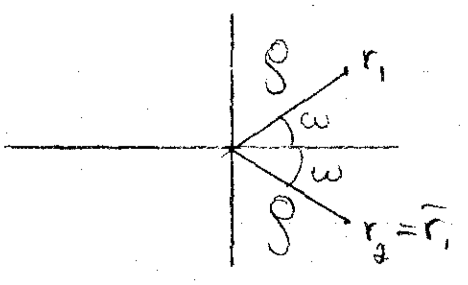
Alltså gäller (med dessa C_1 och C_2)

$$y_n = (C_1 + C_2 n) r_1^n \quad \forall n \geq 0$$

$\blacksquare$

Antag att r_1 och r_2 är två olika komplexa icke reella rötter. Då är $r_2 = \overline{r_1}$ (a och b reella)

Skriv på polär form



$$r_{1,2} = \rho e^{\pm \omega i} = \rho(\cos\omega \pm i \sin\omega) \qquad 0 < \omega < \pi$$

Lösn. till (* *) blir i detta fall

$$y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 \rho^n e^{in\omega} + C_2 \rho^n e^{-in\omega} =$$

$$= \rho^n \left[C_1(\cos n\omega + i \sin n\omega) + C_2(\cos n\omega - i \sin n\omega) \right] =$$

$$= \rho^n \left[\underbrace{(C_1 + C_2)}_{A} \cos n\omega + \underbrace{i(C_1 - C_2)}_{B} \sin n\omega \right] =$$

$$= \rho^n (A \cos n\omega + B \sin n\omega)$$ lösningen på reell form

(reella lösn för reella A och B)

Inhomogena ekv.

$$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = d_n$$

Partikulärlösning för några typer av högerled d_n:

a) d_n = ett polynom i n av grad q

Ansatt en part. lösn $y_n^{(p)}$:

I/ $y_n^{(p)}$ = polynom av grad q om $r_1 \neq 1$, $r_2 \neq 1$

II) $y_n^{(p)} = n \cdot$ polynom av grad q om $r_1 = 1$, $r_2 \neq 1$ (eller omvänt)

III $y_n^{(p)} = n^2$ (polynom av grad q) om $r_1 = r_2 = 1$

Ex 1715 e)

$$y_{n+2} - \frac{5}{2} y_{n+1} + y_n = 3 + n$$

1) kar. ekv. : $r^2 - \frac{5}{2} r + 1 = 0$, $r_1 = 2$ $r_2 = \frac{1}{2}$

$$y_n^{(h)} = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 2^n + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2) En part. lösning $y_n^{(p)}$

$r = 1$ ingen rot till kar ekv.

Ansätt $y_n^{(p)} = an + b$

$$y_{n+2}^{(p)} - \frac{5}{2} y_{n+1}^{(p)} + y_n^{(p)} = a(n+2) + b - \frac{5}{2}\left[a(n+1) + b\right] + an + b =$$

$$= -\frac{a}{2} n - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = n + 3$$

koeff identifiering

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} = 1 \\ -\frac{a}{2} - \frac{b}{2} = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}$$

3) $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = C_1 2^n + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2n - 4$

<u>Differensekv.</u>

$$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = d_n \quad , \quad n \geq 0$$

kar. ekv. : $r^2 + ar + b = 0$, rötter r_1 och r_2

homogenlösning $d_n = 0$

1) $r_1 \neq r_2$: $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$

2) $r_1 = r_2$: $y_n = (C_1 + C_2 n) r_1^n$

Några högerled d_n

<u>A:</u> d_n = polynom av grad q

Ansätt $y_n^{(p)} = n^m \cdot$ (polynom av grad q)

där m = antalet rötter till kar. ekv som är $= 1$

B: $d_n = (\text{polynom av grad } q)\, k^n$

Ansätt

$y_n^{(p)} = n^m (\text{pol. av grad } q) \cdot k^n$

där m = antalet kar. rötter som är $= k$

C: $d_n = (\text{pol. av grad } q) \cdot k^n \begin{cases} \cos n\omega \\ \sin n\omega \end{cases}$

Antar reella koeff.

Betrakta hjälpekv.

$u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = (\text{pol. av grad } q)\,(ke^{i\omega})^n$

Bestäm en part. lösn. $u_n^{(p)}$ som i B

$y_n^{(p)} = \text{Re}\, u_n^{(p)}$ resp. $y_n^{(p)} = \text{Im}\, u_n^{(p)}$ ger part. lösn.

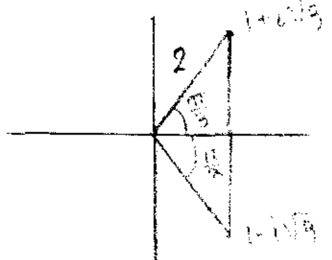
D: $d_n = e_n + f_n$

Lös differensekv med e_n resp. f_n som högerled och finn part. lösn. z_n resp w_n

Då blir $y_n^{(p)} = z_n + w_n$ en part. lösn. med d_n i H.L

Ex. 1717/e) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 2^n \sin\frac{n\pi}{3}$

1) kar. ekv $r^2 - 2r + 4 = 0$, $r = 1 \pm \sqrt{1-4} = 1 \pm i\sqrt{3} =$



$= 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

$y_n^{(h)} = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 2^n e^{i\frac{\pi n}{3}} + C_2 2^n e^{-i\frac{\pi n}{3}} =$

$= 2^n\left[C_1\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) + C_2\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right)\right] =$

$$= \underline{\underline{2^n\left(A\cos\frac{n\pi}{3} + B\sin\frac{n\pi}{3}\right)}}$$

2) Betrakta hjälpekv.

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + 4u_n = 2^n e^{i\frac{\pi n}{3}} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n \equiv H.L$$

Då $r_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ är en kar. rot, ansätts en part. lösn.

$$u_n^{(p)} = n\cdot a\cdot\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = anr_1^n$$

$$u_{n+2}^{(p)} - 2u_{n+1}^{(p)} + 4u_n^{(p)} = a(n+2)r_1^{n+2} - 2a(n+1)r_1^{n+1} + 4anr_1^n =$$

$$= ar_1^n\left[(n+2)r_1^2 - 2(n+1)r_1 + 4n\right] =$$

$$= ar_1^n\left[n\underbrace{(r_1^2 - 2r_1 + 4)}_{=0} + 2r_1^2 - 2r_1\right] = ar_1^n\cdot 2r_1(r_1 - 1) = r_1^n = (H.L)$$

$$\therefore\ 2r_1(r_1-1)a = 1, \qquad r_1 = 1+i\sqrt{3}$$

$$2(1+i\sqrt{3})\,i\sqrt{3}\,a = 1 \qquad 2\sqrt{3}(-\sqrt{3}+i)a = 1$$

$$a = \frac{1}{2\sqrt{3}(-\sqrt{3}+i)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{-\sqrt{3}-i}{3+1} =$$

$$= -\frac{1}{8\sqrt{3}}(\sqrt{3}+i)$$

$$u_n^{(p)} = -\frac{1}{8\sqrt{3}}(\sqrt{3}+i)\cdot n\cdot 2^n\cdot e^{i\frac{n\pi}{3}} =$$

$$= -\frac{1}{8\sqrt{3}}\,n\cdot 2^n(\sqrt{3}+i)\left(\cos\frac{\pi n}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$\underline{\underline{y_n^{(p)} = \operatorname{Im} u_n^{(p)} = -\frac{1}{8\sqrt{3}}\cdot n\cdot 2^n\left(\sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{n\pi}{3}\right)}} \qquad y_n = y_n^{(p)} + y_n^{(h)}$$

Def. (sid. 61)

En talföljd $\{a_n\}_1^\infty$ är växande: $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$

strängt växande : $a_n < a_{n+1}$ —॥—

Monoton: växande eller avtagande

Begränsad uppåt : $a_n \leq B \quad \forall n$ (B någon konstant)

—॥— nedåt : $a_n \geq A \quad \forall n$ (A —॥—)

Begränsad : $|a_n| \leq M \quad \forall n$ (M —॥—)

Sats (s. 62)

Om $\{a_n\}$ är begränsad och monoton, så existerar $\lim_{n\to\infty} a_n \iff$ talföljden konvergerar

Ex. 1815) $x_0 = \sqrt{b} \quad (b>0)$

$x_1 = \sqrt{1+\sqrt{b}} = \sqrt{1+x_0}$

$x_2 = \sqrt{1+x_1}$ o.s.v.

Allmänt: $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}\ , \ n \geq 0$

Om $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ existerar, så är $\alpha = \sqrt{1+\alpha}\ (>0)$

$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \qquad \alpha = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{5}$

$\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

Den andra roten är $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = -\beta$ där $\beta > 0$

Alltså är: $x^2 - x - 1 = (x-\alpha)(x+\beta)$ Vänd!

För $b=1$ är $x_0 = 1 < \alpha$

Om $x_n < \alpha$ för något n så är

$$x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} < \sqrt{1+\alpha} = \alpha$$

Induktion: $x_n < \alpha \quad \forall n$ uppåt begränsad

Vi har

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{1+x_n} - x_n = \frac{1+x_n-x_n^2}{\sqrt{1+x_n}+x_n} =$$

$$= \frac{\overbrace{(\alpha - x_n)}^{>0}\overbrace{(x_n+\beta)}^{>0}}{\underbrace{\sqrt{1+x_n}+x_n}_{>0}} > 0$$

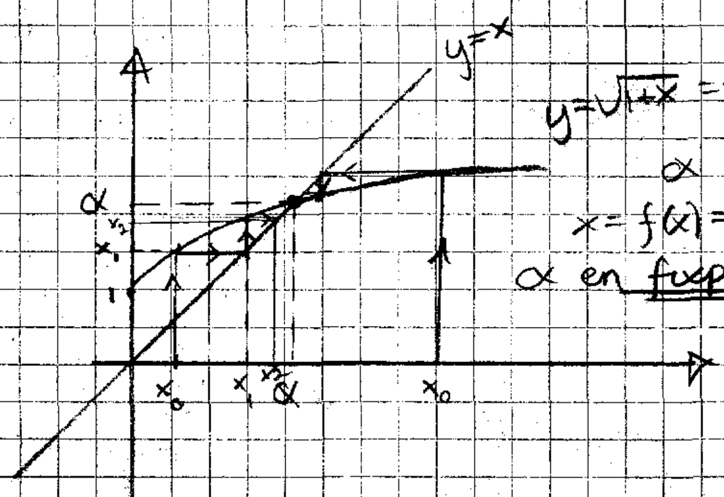
$x_{n+1} > x_n \quad \forall n$ strängt växande följd

Alltså $\exists \lim_{n\to\infty} x_n$ och enligt ovan är detta

gränsvärde $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$

Om $b=4$ är $x_0 = 2 > \alpha$

Så blir på motsvarande sätt x_n nedåt begränsad och strängt avtagande. Gränsvärde existerar



$y = \sqrt{1+x} = f(x)$

α löser

$x = f(x) = \sqrt{1+x}$

α en fixpunkt till f

21

Lös $x = f(x)$ approximativt

Gissa en appr. x_0 till en rot α

$x_1 = f(x_0)$ bör ge en bättre appr.

Iterera: $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$

Sats Antag $I = [a, b]$

(I) f kontinuerlig i $[a, b]$

(II) $f(x) \in I$

(III) f deriverbar i I med $|f'(x)| \leq k < 1$

Då finns en entydig lösning $\alpha \in I$ till $x = f(x)$

och $x_n \to \alpha$ då $n \to \infty$

P.B. 2)
1.28 c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2 + x^2 y^2}$ $\quad x^2 + y^2 \to \infty$

Använd polära koord. $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ där $r \to \infty$

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^3 \cos^2\varphi \sin\varphi}{r^4 + r^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\cos^2\varphi \sin\varphi}{1 + \cos^2\varphi \sin^2\varphi}$$

$$|f(x,y)| = \frac{1}{r} \frac{\overbrace{\cos^2\varphi \, |\sin\varphi|}^{\leq 1}}{1 + \underbrace{\cos^2\varphi \sin^2\varphi}_{\geq 0}} \leq \frac{1}{r} \quad \text{oberoende av } \varphi$$

$\frac{1}{r} \to 0$ då $r \to \infty$

$$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} f(x,y) = 0$$

1.28 e) $f(x,y) = xye^{-(x+y)^2}$

$x^2+y^2 \to \infty$

$f(x,0) = 0 \quad \forall x$

Men $f(x,-x) = -x^2 \to -\infty$ då $|x| \to \infty$

$\nexists$ gränsvärde då $x^2+y^2 \to \infty$

1.30 e) $f(x,y) = xe^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$ $(x,y) \neq (0,0)$

Kontinuerlig för $(x,y) \neq (0,0)$

Då $(x,y) \to (0,0)$ gäller att $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ och

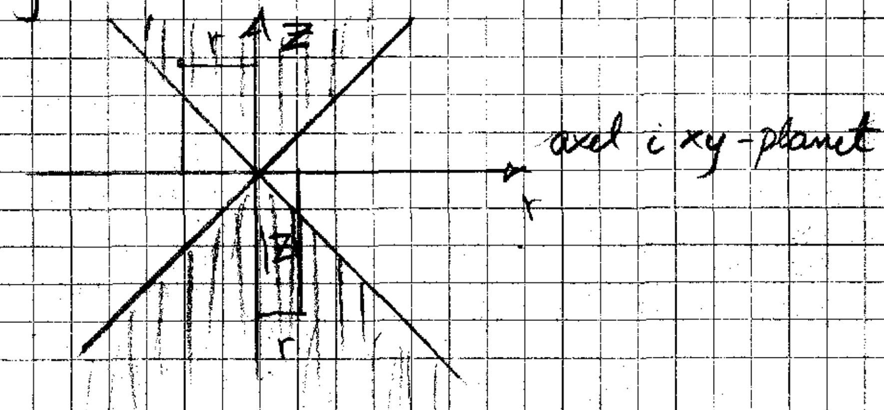
därmed $-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \to -\infty$, $e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} \to 0$

Alltså $f(x,y) \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$

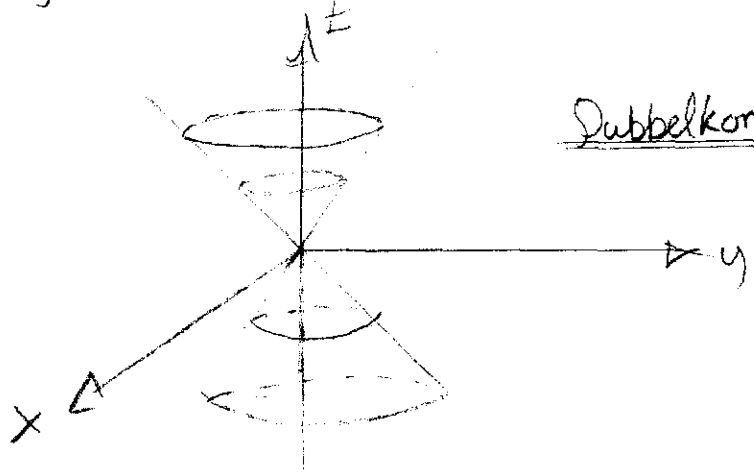
Sätter man nu $f(0,0) = 0$, så blir f kontinuerlig även i $(0,0)$

P.B 2) 1.33) a) $M_1 : x^2+y^2-z^2 \leq 0$

Beror på x och y bara i kombinationen $r^2 = x^2+y^2$ vilket betyder att vi får samma snitt i alla plan genom z-axeln



Den tredimensionella bilden fås genom rotation kring z-axeln



Dubbelkon

ELW 1704)

a) $$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2}$$

$$< n \cdot \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2} \to 0 \text{ då } n \to \infty$$

$$\therefore a_n \to 0 \text{ då } n \to \infty$$

b) $$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}$$

$$> n \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \to \infty \text{ då } n \to \infty$$

$$a_n \to \infty \text{ då } n \to \infty$$

1709) b) $y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 0$

Homogen ekv. med kar. ekv. $r^2 - 7r + 10 = 0$

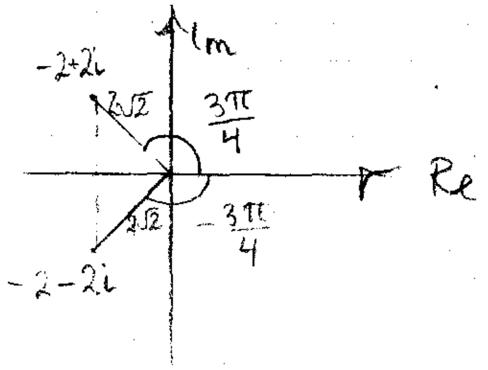
$r_1 = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{40}{4}}$ $\quad r_1 = 5 \quad r_2 = 2$

$$\Rightarrow y_n^{(h)} = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 5^n + C_2 2^n$$

7) $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 8y_n = 0$

kar. ekv. : $r^2 + 4r + 8 = 0$

$r = -2 \pm \sqrt{4-8} = -2 \pm 2i = 2\sqrt{2}\, e^{\pm i \frac{3\pi}{4}} =$



$$y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 (2\sqrt{2})^n e^{i\frac{3n\pi}{4}} + C_2 (2\sqrt{2})^n e^{-i\frac{3n\pi}{4}} =$$

$$= (2\sqrt{2})^n \left[C_1\left(\cos\frac{3n\pi}{4} + i\sin\frac{3n\pi}{4}\right) + C_2\left(\cos\frac{3n\pi}{4} - i\sin\frac{3n\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= (2\sqrt{2})^n \left(A\cos\frac{3n\pi}{4} + B\sin\frac{3n\pi}{4}\right)$$ Reell form

---

P_n = sannolikheten att A blir ~~ruinerad, då han har n kr~~

1713/ Antag att A har n kr $1 \leq n \leq a-1$

A vinner nästa omgång med sannolikheten p, får då n+1 kr, och har därefter sannolikheten P_{n+1} att bli ruinerad. Sannolikheten att A vinner nästa omgång och därefter blir ruinerad är alltså $p \cdot P_{n+1}$. På samma sätt är sannolikheten att A förlorar nästa omgång och därefter blir ruinerad qP_{n-1}. Totala sannolikheten att A blir ruinerad är alltså:

$$P_n = pP_{n+1} + qP_{n-1}, \quad 1 \leq n \leq a-1$$

Vidare är $\underline{P_0 = 1,\ P_a = 0}$ Differensekv av 2:a ordn
randvillkor

$P_{n-1} = y_n$

Iteration, Newton-Raphsons metod

Kjell Holmåker

19 november 2003

Iteration

Rekursionsformler av formen $x_n = f(x_{n-1})$ uppträder ofta. Användning av en sådan rekursionsformel brukar kallas *iteration*, eftersom man använder funktionen f om och om igen. Iteration används ofta för att lösa ekvationer numeriskt.

Exempel 1. Sök en rot till ekvationen

$$x \cdot \sqrt[3]{1+x} = 0,2, \quad x > 0.$$

Ekvationen kan också skrivas

$$x = \frac{0,2}{\sqrt[3]{1+x}}, \quad x > 0. \tag{1}$$

Man kan lätt visa att (1) har exakt en rot α (se Sats 1 nedan). Då högerledet i (1) är mindre än $0,2$ för $x > 0$, måste vi ha $0 < \alpha < 0,2$. I första approximationen bör vi då kunna försumma x jämfört med 1 i $\sqrt[3]{1+x}$. Vi får

$$\alpha \approx x_1 = 0,2.$$

Om vi nu i stället ersätter x i högerledet av (1) med x_1, bör vi få en bättre approximation av α, nämligen

$$\alpha \approx x_2 = \frac{0,2}{\sqrt[3]{1+x_1}} \approx 0,1882.$$

Fortsätter vi på detta sätt får vi

$$\alpha \approx x_3 = \frac{0,2}{\sqrt[3]{1+x_2}} \approx 0,1888,$$
$$\alpha \approx x_4 = \frac{0,2}{\sqrt[3]{1+x_3}} \approx 0,1888.$$

Det förefaller troligt att $\alpha \approx 0,1888$ med fyra korrekta decimaler. ■

Betrakta nu allmänt en ekvation av formen

$$x = f(x). \tag{2}$$

Vi skall försöka lösa (2) med iteration. Utgå då från ett startvärde x_0 och generera talen $x_1, x_2, \dots$ genom rekursionsformeln

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots . \tag{3}$$

Ekvivalent med (3) kan vi skriva

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots . \tag{3'}$$

Vår förhoppning är att talföljden $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ skall konvergera mot en rot till (2). Det gör den dock inte alltid, utan vi behöver göra vissa antaganden om funktionen f. Vi skall förutsätta att f uppfyller följande villkor:

(i) f är definierad och kontinuerlig i ett intervall $I = [a, b]$.

(ii) $f(x) \in I$, då $x \in I$.

(iii) f är deriverbar i I, och det finns en konstant $k < 1$ så att $|f'(x)| \leq k$ för $x \in I$.

Om x och y är två punkter ur I, finns enligt medelvärdessatsen ett tal ξ mellan x och y, så att $f(x) - f(y) = (x - y)f'(\xi)$. Eftersom $\xi \in I$, ger villkoret (iii) att

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|. \tag{4}$$

Anmärkning. En funktion som uppfyller (4), kallas *Lipschitzkontinuerlig* med Lipschitzkonstant k. Det räcker att f uppfyller (ii) och (4) med $k < 1$.

Sats 1. *Antag att f satisfierar* (i)–(iii). *Då har* (2) *en entydigt bestämd lösning $x = \alpha$ i I.*

Bevis. Bilda $g(x) = x - f(x)$. Då är g kontinuerlig på I, och vi har $g(a) = a - f(a) \leq 0$ och $g(b) = b - f(b) \geq 0$ (eftersom både $f(a)$ och $f(b)$ tillhör I enligt (ii)). Enligt satsen om mellanliggande värden finns minst en punkt α i I sådan att $g(\alpha) = 0$, dvs. $\alpha = f(\alpha)$. Antag att $\bar{\alpha} \in I$ också är en rot till (2), så att $\bar{\alpha} = f(\bar{\alpha})$. Då är enligt (4)

$$|\alpha - \bar{\alpha}| = |f(\alpha) - f(\bar{\alpha})| \leq k|\alpha - \bar{\alpha}|,$$

och då $k < 1$, måste vi ha $\bar{\alpha} = \alpha$, vilket visar entydigheten. ■

Villkoret (ii) garanterar att följden $x_0, x_1, \ldots$ är väldefinierad för ett godtyckligt $x_0 \in I$, ty om något $x_p \in I$, så ger (3′) och (ii) att också $x_{p+1} \in I$. Därmed fås med induktion att $x_n \in I$ för alla n. Vi skall nu bevisa att x_n konvergerar mot α då $n \to \infty$, och vi skall också härleda en feluppskattning. Då f är kontinuerlig på I, är också $|f|$ kontinuerlig, och alltså antar $|f|$ ett största värde på det slutna och begränsade (kompakta) intervallet I. Vi sätter

$$m = \max_{x \in I} |f(x)|. \tag{5}$$

Sats 2. *Antag att f satisfierar* (i)–(iii). *För godtyckligt $x_0 \in I$ konvergerar följden $x_0, x_1, x_2, \ldots$ definierad genom* (3) *mot α, den entydigt bestämda roten i I till* (2). *Vidare gäller*

$$|x_n - \alpha| \leq k^n(|x_0| + m), \tag{6}$$

där m ges av (5).

Bevis. Vi har redan visat (i Sats 1) att det existerar en entydigt bestämd rot $\alpha \in I$ till (2). Vidare har vi sett ovan att $x_n \in I$ för alla n. Nu ger (4)

$$|x_n - \alpha| = |f(x_{n-1}) - f(\alpha)| \leq k|x_{n-1} - \alpha| \quad \text{för } n = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Upprepad användning av (7) ger

$$|x_n - \alpha| \leq k|x_{n-1} - \alpha| \leq k^2|x_{n-2} - \alpha| \leq \cdots \leq k^{n-1}|x_1 - \alpha| \leq k^n|x_0 - \alpha|. \tag{8}$$

Eftersom $0 \leq k < 1$, så gäller att $k^n \to 0$ då $n \to \infty$, och alltså får vi av (8) att $x_n \to \alpha$ då $n \to \infty$. Enligt (5) är

$$|x_0 - \alpha| = |x_0 - f(\alpha)| \leq |x_0| + |f(\alpha)| \leq |x_0| + m,$$

varför (8) ger

$$|x_n - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha| \leq k^n(|x_0| + m),$$

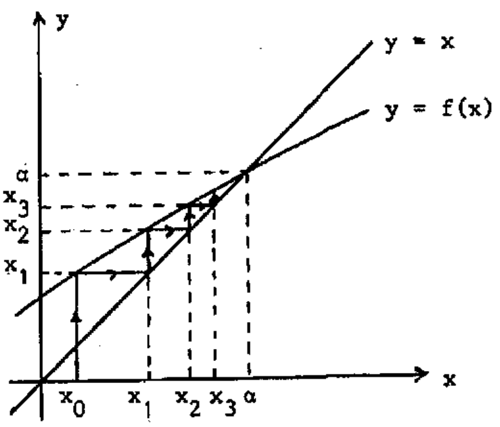
vilket visar (6). ■

Betrakta åter Exempel 1. Vi har där $f(x) = \frac{0,2}{\sqrt[3]{1+x}}$, och vi kan ta $I = [0,1]$. Förutsättningarna (i)–(iii) är uppfyllda med $k = 0,2 \cdot \frac{1}{3}$, och vi har $m = 0,2$. Enligt (6) är (eftersom $x_0 = 0$)

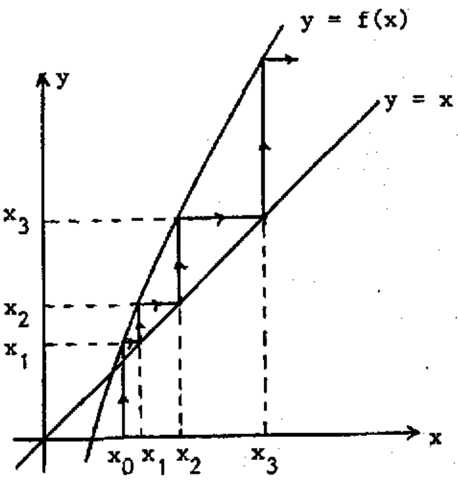
$$|x_4 - \alpha| \leq \left(\frac{0,2}{3}\right)^4 \cdot 0,2 < 4 \cdot 10^{-6},$$

vilket visar att $\alpha = 0,1888$ korrekt avrundat till fyra decimaler.

Figurerna 1 och 2 visar hur iterationen $x_n = f(x_{n-1})$ kan åskådliggöras grafiskt. I Figur 1 är $|f'(x)| \leq k < 1$, och följden x_n konvergerar; i Figur 2 är däremot x_n divergent.



Figur 1



Figur 2

Exempel 2. Lös ekvationen $x^3 + 2x - 1 = 0$. Eftersom funktionen $x^3 + 2x - 1$ är strängt växande, finns exakt en rot α. Om man vill använda iteration, måste ekvationen skrivas på formen $x = f(x)$, vilket kan göras på många sätt. Tre möjligheter är följande:

$$\text{a)}\quad x = \sqrt[3]{1-2x}, \qquad \text{b)}\quad x = \frac{1}{2}(1 - x^3), \qquad \text{c)}\quad x = \frac{1}{x^2+2}.$$

I a konvergerar inte iterationerna, medan man i b och c får värdet $0,45340$ efter 10 resp. 7 iterationer utgående från $x_0 = 0$.

I b är $f(x) = \frac{1}{2}(1 - x^3)$. Låt oss ta $I = [0, \frac{1}{2}]$. Då är $0 < f(x) \leq \frac{1}{2} = m$, och $k = \max_{x \in I} |f'(x)| = \frac{3}{2} \cdot 0,25$. Enligt Sats 2 är $|x_{10} - \alpha| \leq (\frac{3}{2} \cdot 0,25)^{10} \cdot \frac{1}{2} < 3 \cdot 10^{-5}$. Alltså är $\alpha = 0,4534$ med fyra korrekta decimaler. Analogt analyseras c. ■

Naturligtvis kan en talföljd x_n erhållen genom iteration som i (3) ha ett eget intresse och uppkomma på annat sätt än som en metod att lösa ekvationen $x = f(x)$ numeriskt.

Exempel 3. Undersök om talföljden x_n, definierad av $x_0 = 0$ och

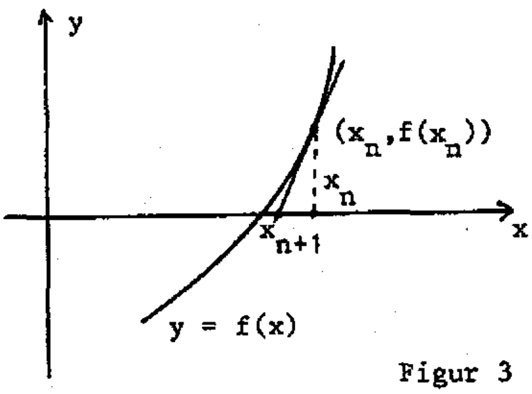
$$x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n} \qquad \text{för } n = 0, 1, \dots ,$$

är konvergent eller divergent.

I detta fall är rekursionsformeln av formen (3′) med $f(x) = \sqrt{3+x}$. Låt I vara intervallet $[0, 3]$. Vi har $0 < f(x) \leq \sqrt{6} < 3$ för $x \in I$, och vidare är $|f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{3+x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} < 1$ för $x \in I$. Förutsättningarna (i)–(iii) är alltså uppfyllda, och enligt Sats 2 konvergerar x_n mot den entydigt bestämda lösningen till ekvationen $x = \sqrt{3+x}$ i I. Vi får $x^2 - x - 3 = 0$, $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 3}$. Men $x > 0$, varför $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$ ∎

Newton-Raphsons metod

Antag att vi önskar lösa en ekvation $f(x) = 0$. Vi kan då skriva om ekvationen så att den blir av formen $x = F(x)$, och sedan kan vi försöka lösa den senare ekvationen med iterationen $x_{n+1} = F(x_n)$. En sådan omskrivning kan ske på många sätt; vi skall här beskriva en särskilt effektiv iterationsmetod, kallad Newton-Raphsons metod. Den motiveras kanske enklast geometriskt. Om metoden har givit oss x_n som approximation till en rot till $f(x) = 0$, får vi nästa approximation x_{n+1} genom att dra tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(x_n, f(x_n))$ och söka dess skärning med x-axeln; se Figur 3.



Figur 3

Tangentens ekvation är

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n),$$

och $y = 0$ ger här $x = x_{n+1}$. Alltså är rekursionsformeln

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, \dots . \tag{9}$$

Vi ser att (9) är av formen $x_{n+1} = F(x_n)$ med

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Observera att $x = F(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$ (om $f'(x) \neq 0$).

Antag att $f(x) = 0$ har en rot α, att f har kontinuerlig andraderivata och att $f'(\alpha) \neq 0$. Då kan man visa, att om begynnelseapproximationen x_0 ligger tillräckligt nära α, så konvergerar följden x_n i Newton-Raphsons metod mot α, och konvergensen är snabb. Det gäller nämligen att

$$|x_n - \alpha| \leq C|x_{n-1} - \alpha|^2$$

för någon viss konstant C (s. k. kvadratiskt konvergens), vilket ger en snabbare konvergens än uppskattningen $|x_n - \alpha| \leq k|x_{n-1} - \alpha|$, som vi hade förut.

I praktiken itererar man tills resultatet inte ändras inom den önskade noggrannheten. Vi kan lätt härleda en feluppskattning, som bygger just på skillnaden mellan två successiva iterationer. Låt oss anta att vi vet, att roten α ligger i ett visst intervall I, och att vi har följande uppskattning för $f'(x)$:

$$0 < k_0 \leq |f'(x)| \leq k_1 \qquad \text{för } x \in I. \tag{10}$$

Antag att iterationerna x_n i Newton-Raphsons metod tillhör I, och sätt $\delta_n = |x_{n+1} - x_n|$. Ur (9) och (10) får vi då

$$\delta_n = |x_{n+1} - x_n| = \left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| \geq \frac{1}{k_1}|f(x_n)|.$$

Vidare ger medelvärdessatsen att det finns ett tal ξ mellan α och x_n, alltså i I, sådant att

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\alpha) = (x_n - \alpha)f'(\xi),$$

och enligt (10) fås $|f(x_n)| \geq |x_n - \alpha| \cdot k_0$. Allts å är

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k_1}{k_0}\delta_n, \tag{11}$$

vilket är den önskade feluppskattningen.

Exempel 4. Lös ekvationen $x^3 + 2x - 1 = 0$ med Newton-Raphsons metod (jämför Exempel 3). Vi har $f(x) = x^3 + 2x - 1$, $f'(x) = 3x^2 + 2$, och (9) ger

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n - 1}{3x_n^2 + 2}, \qquad n \geq 0.$$

Eftersom $f(0) < 0$ och $f(\frac{1}{2}) > 0$, gäller att roten α tillhör $I = [0, \frac{1}{2}]$ (det finns bara en rot eftersom $f'(x) > 0$). Med $x_0 = 0$ fås $x_3 = 0,4533983\ldots$, och ytterligare iterationer påverkar inte de fem första decimalerna. Närmare bestämt har vi att $\delta_3 = |x_4 - x_3| < 7 \cdot 10^{-7}$. Eftersom $2 \leq |f'(x)| \leq 2,75$ för $x \in I$, och $x_3 \in I$, ger (11) feluppskattningen

$$|x_3 - \alpha| \leq \frac{2,75}{2} \cdot 7 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}.$$

Alltså är $\alpha = 0,45340$ med fem korrekta decimaler. ■

Veckoblad v 48 Analys Sam Polesie

Om f är deriverbar på ett intervall I med $|f'(x)| \leq k$ på I så gäller

$$|f(x)-f(y)| = |(x-y)f'(\xi)| \leq k|x-y| \quad \forall x,y \in I$$

$\boxed{\text{Lipschitzkontinuerlig på } I}$ $\xi \in I$

Fixpunktssats

Antag $I=[a,b]$ och att f uppfyller:

$|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$ för någon konstant $k<1$ $\forall x,y \in I$

$f(x) \in I$ då $x \in I$

Då finns en entydig fixpunkt α (dvs. en lösning till $x=f(x)$) i I och iterationerna x_n, som fås av $x_n = f(x_{n-1})$, $x_0 \in I$, konvergerar mot α

Bevis sätt $g(x) = x - f(x)$

$g(x)$ kontinuerlig på I,

$g(a) = a - f(a) \leq 0$ och

$g(b) = b - f(b) \geq 0$

Enligt satsen om mellanliggande värden så finns ett $\alpha \in I$ så att $g(\alpha)=0$, dvs $\alpha = f(\alpha)$

Antag $\bar{\alpha} \in I$ också är en fixpunkt

Då $|\alpha - \bar{\alpha}| = |f(\alpha) - f(\bar{\alpha})| \leq k|\alpha - \bar{\alpha}|$

Men $k<1$ varför $\alpha = \bar{\alpha}$

Vänd!

$x_0 \in I$ om $x_n \in I$ så gäller

också $x_{n+1} = f(x_n) \in I$

$x_n \in I \ \forall n$, (induktion)

$$|x_n - \alpha| = |f(x_{n-1}) - f(\alpha)| \leq k|x_{n-1} - \alpha| \leq k^2 |x_{n-2} - \alpha| \leq$$

$$\leq \dots \leq k^n |x_0 - \alpha| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{ty } \underline{0 \leq k < 1}$$

Ex $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = \sqrt{6}$

$f(x) = \sqrt{1+x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ tag $I \in [0,3]$

$|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2} = k < 1$

$0 \leq x \leq 3 \implies 0 \leq f(x) \leq \sqrt{4} = 2 < 3$

$\therefore x_n$ konvergerar mot lösn. till $x = \sqrt{1+x}$

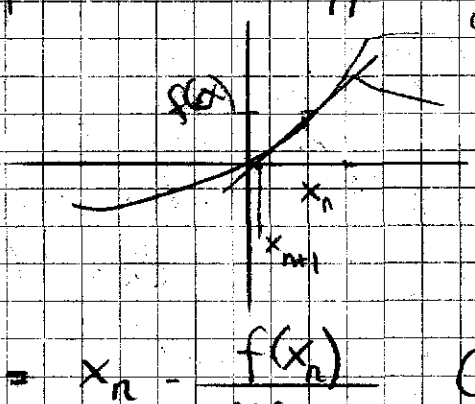
(Jämför tidigare lösning)

<u>Newton - Raphsons metod</u>

lös ekv. $f(x) = 0$

Om x_n är en approximation till en rot α,

så fås nästa approx



$y = f(x)$

$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$

$y = 0$ ger $x = x_{n+1}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{om } f'(x_n) \neq 0)$$

(Se utdelat papper för mer info.)

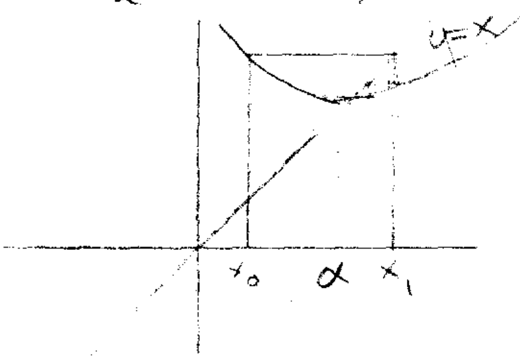
3

Ex Lös $x^2 - a = 0$

$f(x) = x^2 - a \qquad f'(x) = 2x$

Newton-Raphson: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - a}{2x_n} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right) = F(x_n)$

$F(x) = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{a}{x}\right), \quad F'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{a}{x^2}\right)$



Serier

En serie är en formell oändlig summa.

$$a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Def Den n-te delsumman är:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Om $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ existerar ($\{S_n\}_1^{\infty}$ är konvergent) så sägs serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ vara konvergent serie med summan $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. I annat fall är serien divergent.

Ex $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Delsummorna alternerar mellan 0 och 1

Divergent serie

Ex $\quad a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad \text{teleskoperande serie}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$$

Ex $\quad$ Den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c^k = \frac{1 - c^{n+1}}{1-c} \quad \text{om } c \neq 1 \, ; \quad S_n = n+1 \text{ om } c = 1$$

om $|c| < 1$ så gäller att $c^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} c^k = \frac{1}{1-c} \quad \text{för } |c| < 1}$$

om $|c| > 1$ så fås att $|c^{n+1}| = |c|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

om $c = 1$, är $S_n = n+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, divergens

om $c = -1$, är $S_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$ som saknar lim, divergens

$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} c^k$ är konvergent omm $|c| < 1$

Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergenta, så är

$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent med summan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

5

Sats 18.1

Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar så gäller att $a_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

Bevis $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = S_{n-1} + a_n$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ $\quad S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} S$ (konv. serie)

$\therefore a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} S - S = 0$ $\square$

VIKTIGT! Motsatsen gäller inte

Ex $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

Trots detta är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent, ty

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

Räkneövning

Differensekvationer

Linjära med konstanta koefficienter

Analogi med ODE

15c) $y_{n+2} - 3y_{n+1} - 10y_n = (36n - 21) \cdot 1^n$

andra ordningen.

$y_{allmän} = y_{hom} + y_{part}$ (p.g.a lineariteten)

Homogen: $y_{n+2} - 3y_{n+1} - 10y_n = 0$

kar ekv.: $r^2 - 3r - 10 = 0$ $\quad r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}$

$r_1 = 5 \quad r_2 = -2$

$y_{hom}^{(n)} = C_1 5^n + C_2 (-2)^n$

Vänd!

Partikulär lösn. : Ansats ej resonans (ty 1 ej rot till kar. ekv)

Ansats : $y_{part}^{(n)} = An + B$

$$A(n+2) + B - 3(A(n+1) + B) - 10(An + B) = 36n - 21$$

$$(A - 3A - 10A)n + (2A + B - 3A - 3B - 10B) = 36n - 21$$

$$-12A = 36 \Rightarrow \boxed{A = -3}$$

$$3 - 12B = -21 \Rightarrow \boxed{B = 2}$$

$$y_{allmän}^{(n)} = C_1 5^n + C_2(-2)^n - 3n + 2$$

---

15 h) $y_{n+1} - 2y_n = n \cdot 1^n \quad y_0 = 0$ begynnelsevärdesproblem

kar ekv. $r - 2 = 0$

$$y_{hom}^{(n)} = C \cdot 2^n$$

Part. lösn. ej resonans

Ansats. $y_{part}^{(n)} = An + B$

$$A(n+1) + B - 2An - 2B = n (+0)$$

n^1: $-A = 1 \Rightarrow A = -1$

n^0: $A + B - 2B = 0 \quad B = A = -1$

$$\Rightarrow y_{allm}^{(n)} = C \cdot 2^n - n - 1$$

$$y_0 = C \cdot 2^0 - 0 - 1 = 0 \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_n = 2^n - n - 1}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 = 2y_0 + 0 = 0 & y_1 = 2^1 - 1 - 1 = 0 \\ y_2 = 2y_1 + 1 = 1 & y_2 = 2^2 - 2 - 1 = 1 \end{array}\right\}$$ test om svaret gäller för $n = 1, 2$

16 b) $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = n \cdot 2^n$

Kar. ekv. $r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0 \quad r_1 = -1 \quad r_2 = 2$

$y_{hom}^{(n)} = C_1 2^n + C_2(-1)^n$

Part lösn. resonans ty 2 rot till kar. ekv.
enkelrot $m = 1$

Ansats: $y_{part}^{(n)} = n^1(An+B) \cdot 2^n = (An^2 + Bn)\, 2^n$

$(A(n+2)^2 + B(n+2))\, \cancel{2^{n+2}} - \cancel{2^{n+1}}(A(n+1) + B(n+1)) - 2(An^2 + Bn)\, \cancel{2^{n+1}}$

$= n \cancel{2^n}$

$4(\cancel{An^2} + 4An + 4A + \cancel{Bn} + 2B) - 2(\cancel{An^2} + 2An + A + \cancel{Bn} + B) - \cancel{2An^2} - \cancel{2Bn} =$

$= n$

$12An + 14A + 6B = n$

$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{12} \qquad \frac{14}{12} + 6B = 0 \quad \Rightarrow B = -\frac{7}{36}$

$y_{allm}^{(n)} = C_1 \cdot 2^n + C_2(-1)^n + n\left(\frac{1}{12}n - \frac{7}{36}\right) 2^n$

---

17 c) $y_{n+2} - 4y_n = \underbrace{-6n^2 + 8n + 17}_{①} \underbrace{+2^{n+1}}_{②}$

Kar. ekv. $r^2 - 4 = 0 \quad r_1 = \pm 2$

$y_{hom}^{(n)} = C_1 2^n + C_2(-2)^n$

① $y_{n+2} - 4y_n = (-6n^2 + 8n + 17) \cdot 1^n$

ej resonans

$\Rightarrow y_{part,1}^{(n)} = An^2 + Bn + C$ sätt in....

② $y_{n+2} - 4y_n = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$ resonans

$\boxed{\text{OBS! } y_{n+2} - 4y_n = 2^{2n} = 4^n \text{ ej resonans}}$

$$y^{(n)}_{part,2} = n \cdot D \cdot 2^n \qquad \underline{\underline{\text{sätt}^n \text{ in..}}}$$

$$y^{(n)}_{allm} = y^{(n)}_{hom} + y^{(n)}_{part,1} + y^{(n)}_{part,2}$$

1803 a) $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$

$$? \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1 \qquad \textit{teleskoperande serie}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = (a_1 - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_3}) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_4}) + \dots +$$

$$+ (\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_n}) + (\cancel{a_n} - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

$$a_1 - \underbrace{a_{n+1}}_{\to 0} \xrightarrow[n \to \infty]{} a_1 \Rightarrow$$ serien är konvergent och dess summa är a_1

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$ Partialbråksuppdelning:

$$\frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1}$$

$$1 = A(2k+1) + B(2k-1) \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$k = \frac{1}{2}$: $A = \frac{1}{2}$

$k = -\frac{1}{2}$: $B = -\frac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right);$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) =$$

9

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

---

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ $\qquad a_k = \frac{k+1}{2^{k-1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$$a_k - a_{k+1} = \frac{k+1}{2^{k-1}} - \frac{k+2}{2^k} = \frac{2k+2-k-2}{2^k} = \frac{k}{2^k}$$

$\Rightarrow$ enl. a) 1803 serien är konvergent med summa $a_1 = 2$ [För att få "tipset": lös $a_k - a_{k+1} = \frac{k}{2^k}$]

1816 a) $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \ldots$

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \end{cases}$$

Gränsvärde, <u>om</u> det finns:

$l = \sqrt{2+l}$

| växande | alt. | avtagande
| uppåt begränsad | | nedåt begränsat

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n$

ett schema

<u>Alternativ lösning</u>

<u>Fixpunktsresonemang</u>

$x_{n+1} = f(x_n) \qquad x_0 \ (x_1)$

Visa att ekvationen $x = f(x)$ har en lösning i ett visst intervall, visa att lösningen är entydig. och att $x_n \to$ lösningen

$\exists$ lösning: satsen om mellanliggande värden

$f:[a,b] \to [a,b]$, f kontinuerlig $\boxed{\begin{matrix} a=0 \\ b=2 \end{matrix}}$

$\Rightarrow \exists\, x \in [a,b] : x = f(x)$

$x = \sqrt{2+x} \qquad f(x) = \sqrt{2+x} \geq 0$

f växande $f(0) = \sqrt{2}$, $f(2) = 2$

Vänd $\Longrightarrow$

$\Rightarrow f: [0,2] \to [\sqrt{2}, 2] \subset [0,2]$

$\Rightarrow \exists$ lösning till $x = f(x)$ i $[0,2]$

? Entydighet α, β lösningar $|\alpha - \beta| = |f(\alpha) - f(\beta)| = |f'(\xi)(\alpha - \beta)| \leq$

Medelvärdessatsen $\leq \underset{<1}{c} |\alpha - \beta| \leq |\alpha - \beta|$

$\Rightarrow \alpha = \beta$

låt $\alpha = f(\alpha)$

$|x_{n+1} - \alpha| = |f(x_n) - f(\alpha)| = |f'(\xi_n) \cdot (x_n - \alpha)| \leq \frac{1}{2} |x_n - \alpha| \leq (*)$

$$\boxed{|f'(\xi_n)| \leq c < 1 \qquad \left|f'(\xi_n)\right| = \left|\frac{1}{2\sqrt{2+\xi_n}}\right| \leq 1}$$

$(*) \leq \ldots \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\substack{n \to \infty \\ \to 0}} \underbrace{|x_1 - \alpha|}_{\text{fixt}}$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} x_n = \alpha \qquad \alpha = 2$

Serier

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad \text{partialsumma}$$

Positiv serie: $a_k \geq 0 \quad \forall k$

Sats 18.5

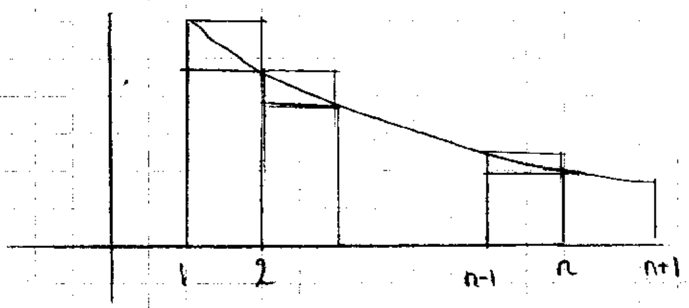
En positiv serie är konvergent omm följden av delsummor S_n är (uppåt) begränsad

Bevis $\{S_n\}_1^{\infty}$ är växande $(S_n - S_{n-1} = a_n \geq 0$
Antag att $\{S_n\}_1^{\infty}$ är begränsad. Då är följden konvergent (sats 18.2).
Omvändningen är självklar (varje konvergent följd är begränsad

11

Integraluppskattning

Antag $f(x)$ kontinuerlig, avtagande, >0 för $x \geq 1$



$$\underbrace{f(2)\cdot 1 + \ldots + f(n)\cdot 1}_{} \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \ldots + f(n-1)\cdot 1 = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} f(k)$$

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) + \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \quad (*)$$

"För en växande funktion fås $(*)$ med $\geq$ istället för $\leq$"

Ex. $f(x) = \ln x$

$(*)$ ger (med omvända olikheter)

$$\ln 1 + \int_1^n \ln x\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq \ln n + \int_1^n \ln x\,dx$$

$$\ln n! = \ln(1\cdot 2 \cdots n) = \sum_{k=1}^{n} \ln k$$

$$\int_1^n \ln x\,dx = [x \ln x]_1^n - \int_1^n x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \underbrace{n \ln n - n}_{n\cdot\ln\left(\frac{n}{e}\right)} + 1$$

$$\ln\left(\frac{n}{e}\right)^n + 1 \leq \ln n! \leq \ln n + n\cdot\ln\left(\frac{n}{e}\right) + 1 = \ln\left[n\left(\frac{n}{e}\right)^n\right] + 1$$

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Stirlings formel $\quad n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1+\varepsilon_n)$

$\varepsilon_n \to 0$ då $n \to \infty$

Sats (Integralkriteriet)

Antag att $f(x)$ är positiv, kontinuerlig avtagande för $x \geq 1$

Då är $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent omm $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent

Bevis 1) Antag att $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent.

Då är enligt integraluppskattningen (*)

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$$

Alltså $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent. (sats 18.5)

2) Antag att $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ är divergent.

Då gäller

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ är divergent $\blacksquare$

Sats (18.7)

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ är konv. om $p > 1$

och div. om $p \leq 1$

Bevis $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ är $\begin{cases} \text{konv. om } p > 1 \\ \text{div. om } p \leq 1 \end{cases}$

satsen följer av integralkriteriet $\blacksquare$

13

Ex Den harmoniska serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ är divergent}$$

Enligt integraluppskattningen

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$$

Jämförelsekriteriet

Antag $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k$

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ div $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ div

Bevis Sätt $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ då är $S_n \leq \sigma_n$ $\forall n$

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv $\Rightarrow \{\sigma_n\}_1^{\infty}$ är begränsad

$\Rightarrow \{S_n\}_1^{\infty}$ är begränsad $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ div $\Leftrightarrow S_n \to \infty$ då $n \to \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma_n \to \infty$ då $n \to \infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är div

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{1+k^2}$$

$$a_k = \frac{\arctan k}{1+k^2} < \frac{\frac{\pi}{2}}{1+k^2} < \frac{\pi}{2}\frac{1}{k^2} = b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \text{ är konv.} \underset{\text{Jämförelsekriteriet}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.}$$

Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform

Om $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$ existerar och är > 0, så är

$\sum_1^{\infty} a_k$ och $\sum_1^{\infty} b_k$ båda konvergenta eller $(b_k > 0)$

båda divergenta

Bevis $A = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} > 0$

Det finns ett tal m så att

$$\frac{A}{2} < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3A}{2} \quad \text{för } k \geqslant m$$

$$\frac{A}{2} b_k < a_k < \frac{3A}{2} b_k \quad \text{för } k \geqslant m$$

Jämförelsekriteriet ger påståendet

Ex $\sum_{k=1}^{\infty} k \arctan\frac{1}{\sqrt{k}} \sin\frac{\pi k}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$$\sin\frac{\pi k}{k+1} = \sin\left(\pi - \frac{\pi k}{k+1}\right) = \sin\frac{\pi}{k+1} =$$

$$= \frac{\pi}{k+1} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$
$(k \to \infty)$

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$a_k = k\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)\right)\left(\frac{\pi}{k+1} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) = \frac{\pi\sqrt{k}}{k+1} + O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Jämför med $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\pi k}{k+1} + O\left(\frac{1}{k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} \pi$$

$\sum_1^\infty b_k = \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{k}}$ är div $\Rightarrow \sum_1^\infty a_k$ div.

Positiva serier $\quad a_k$ och b_k asymptotiskt ekvivalenta

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = A > 0$$

$\sum_1^\infty a_k$ och $\sum_1^\infty b_k$ båda konvergenta eller divergenta

Ex. $\sum_{k=1}^\infty \frac{\ln(1+k^2)}{k\sqrt{k}} \qquad a_k = \frac{\ln(1+k^2)}{k^{\frac{3}{2}}}$

Vi vet att $\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\frac{1}{4}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

$$\left[\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\frac{1}{4}}} \underset{x\geq 1}{\leq} \frac{\ln 2x^2}{x^{\frac{1}{4}}} = \underbrace{\frac{\ln 2}{x^{\frac{1}{4}}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2\ln x}{x^{\frac{1}{4}}}}_{\to 0} \to 0\right]$$

Då finns en konstant c så att:

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\frac{1}{4}}} \leq C \quad \text{om } x \geq 1$$

$$0 < a_k = \underbrace{\frac{\ln(1+k^2)}{k^{\frac{1}{4}}}}_{\leq C} \cdot \frac{1}{k^{\frac{5}{4}}} \leq \frac{C}{k^{\frac{5}{4}}} = b_k$$

$\frac{5}{4} > 1 \Rightarrow \sum_1^\infty b_k$ konv. $\Rightarrow \sum_1^\infty a_k$ konv.

<u>Sats</u> Rotkriteriet

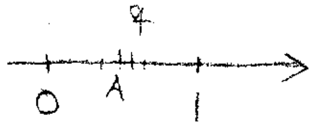
Antag $a_k \geq 0$ och $\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} = A$

Om $A < 1$ är $\sum_1^\infty a_k$ konvergent

" $A > 1$ är —"— divergent

(Ingen upplysning om $A = 1$)

<u>Bevis</u> 1) Antag $A < 1$



Tag ett tal q mellan A och 1,

t.ex. $q = \frac{A+1}{2}$

Då är $\sqrt[k]{a_k} \leq q$ om $k \geq m$ (något lämpligt m)

Alltså $a_k \leq q^k$ för $k \geq m$

Eftersom $\sum_1^\infty q^k$ är konvergent (geometrisk serie med $q < 1$)

är $\sum_1^\infty a_k$ konv. (jämförelsekriteriet)

2) $A > 1$ Då finns N

så att $\sqrt[k]{a_k} > 1$ för $k \geq N$

$a_k > 1$ för $k \geq N$

Allmänna termen a_k i serien $\sum_1^\infty a_k$ går <u>inte mot 0</u>. Serien divergerar

I sammanhanget erinras om att

$\sqrt[k]{c} \xrightarrow[k \to \infty]{} 1$ $\quad$ ($c \equiv \text{const} > 0$) och

$\sqrt[k]{k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 1$

<u>Bevis</u> $\sqrt[k]{c} = c^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k} \ln c} \xrightarrow[k \to \infty]{} e^0 = 1$

17

$$\sqrt[k]{k} = k^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k}\ln k} \xrightarrow[k\to\infty]{} e^0 = 1$$

<u>Ex</u> $a_k = \frac{1}{k}$

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \qquad \sum_1^\infty a_k \text{ div.}$$

$$b_k = \frac{1}{k^2}$$

$$\sqrt[k]{b_k} = \frac{1}{(\sqrt[k]{k})^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \qquad \sum_1^\infty b_k \text{ konv.}$$

Kvotkriteriet

Antag $a_k > 0$ och $\exists \lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = A$

Om $A < 1$ är $\sum_1^\infty a_k$ konv

" $A > 1$ —"— div.

<u>Bevis</u> Eftersom

$$(*) \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = A$$

så följer påståendet av rotkriteriet om $(*)$ är bevisad

<u>Bevis av $(*)$</u>

Antag först $A > 0$

Giv $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < A$. Då finns $N = N(\varepsilon)$ så att

$$0 < A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{k+1}}{a_k} < A + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{om } k \geq N$$

För $k > N$ är:

$$\underbrace{a_N\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-N}}_{C_2\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)^k} < a_k = a_N \cdot \underbrace{\frac{a_{N+1}}{a_N}}_{< A+\frac{\varepsilon}{2}} \cdots \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \underbrace{\frac{a_k}{a_{k-1}}}_{A+\frac{\varepsilon}{2}} < a_N\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-N} =$$

$$= C_1\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)^k \qquad \boxed{\sqrt[k]{C_2}\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right) < \sqrt[k]{a_k} < \sqrt[k]{C_1}\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

$\sqrt[k]{c_1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$, $\sqrt[k]{c_2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

Då finns $N_1 \geq N$ så att

$$A-\varepsilon < \sqrt[k]{a_k} < A+\varepsilon \quad \text{för } k \geq N_1 = N_1(\varepsilon)$$

$\therefore \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = A$

$A=0$ behandlas analogt

Ex $a_k = \begin{cases} 2^{-k} & , k \text{ jämnt} \\ 2\cdot 2^{-k} & , k \text{ udda} \end{cases}$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} \frac{2\cdot 2^{-(k+1)}}{2^{-k}} = 1 & , k \text{ jämt} \\ \frac{2^{-(k+1)}}{2\cdot 2^{-k}} = \frac{1}{4} & , k \text{ udda} \end{cases}$$

$\frac{a_{k+1}}{a_k}$ saknar gränsv. då $k\to\infty$

$$\sqrt[k]{a_k} = \begin{cases} 2^{-1} = \frac{1}{2} & , k \text{ jämnt} \\ \sqrt[k]{2}\cdot 2^{-1} & , k \text{ udda} \end{cases}$$

$\sqrt[k]{a_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2}$

Enligt rotkriteriet är $\sum_1^\infty a_k$ konv.

<u>Serier med termer av godtyckligt tecken</u>

<u>Def.</u> Om $\sum_{k=1}^\infty |a_k|$ är konvergent kallas $\sum_{k=1}^\infty a_k$ absolutkonvergent

19

Sats En absolutkonvergent serie är konvergent

Bevis Antag a_k reella. Skriv

$a_k = (a_k + |a_k|) - |a_k|$

$0 \leq a_k + |a_k| \leq 2|a_k|$ $\quad \sum_1^{\infty} 2|a_k|$ konvergent $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_1^{\infty} (a_k + |a_k|)$ konvergent enl. jämförelsekriteriet

$$\sum_1^{\infty} (a_k + |a_k|) \text{ konv. och } \sum_1^{\infty} |a_k| \text{ konv.}$$

$$\Rightarrow \sum_1^{\infty} a_k = \sum_1^{\infty} \left[(a_k + |a_k|) - |a_k| \right] \text{ konv.}$$

Motsvarande gäller för komplexa a_k ■

Om $\sum_1^{\infty} a_k$ är konv., men $\sum_1^{\infty} |a_k|$ är div, kallas $\sum_1^{\infty} a_k$ betingat konvergent

---

Sats Leibnitz kriterium för alternerande serier

En serie kallas alternerande om den är av formen:

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k, \quad a_k \geq 0$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{varannan gång positiv} \\ \text{varannan gång negativ} \end{array} \right.$ term

$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + \ldots$

Antag $a_k > 0$, a_k avtar mot 0 då $k \to \infty$

Då är $\sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ konv.

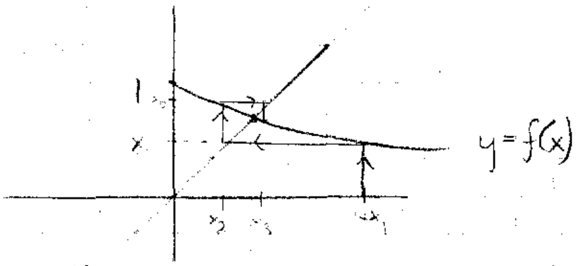
Bevis senare

Storgruppsövning

1818 a) $x_1 = 1$

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} = f(x_n)$$

där $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$



Låt α vara skärningen mellan $y=x$ och $y=\frac{1}{1+x}$

$$x = \frac{1}{1+x}, \quad x^2 + x - 1 = 0, \quad x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = -\frac{1}{2} \overset{+}{(-)} \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\underline{\underline{\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}$$

Låt I vara intervallet $[\frac{1}{2}, 1]$

$$x \in I \Rightarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \leq f(x) < 1, \quad f(x) \in I$$

$$x_n \in I, \ \forall n \geq 1$$

$x, y \in I \Rightarrow f(x) - f(y) = (x-y) f'(\xi)$ för något $\xi \in I$

$$|f(x) - f(y)| = |x-y| \frac{1}{(1+\xi)^2} \leq \frac{4}{9}|x-y|$$

$$|x_n - \alpha| = |f(x_{n-1}) - f(\alpha)| \leq \frac{4}{9}|x_{n-1} - \alpha| \leq \ldots \leq$$

$$\leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |x_1 - \alpha| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Alternativ lösning finns. se utdelat blad!

1820 c) Stirlings formel: $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+\varepsilon_n)$ $\quad \varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \sqrt[n]{\frac{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} (1+\varepsilon_n)^2}{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}(1+\varepsilon_{2n})}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^2}{\left(\frac{2n}{e}\right)^2} \cdot \sqrt[n]{\frac{\sqrt{\pi n}(1+\varepsilon_n)^2}{1+\varepsilon_{2n}}} = \frac{1}{4} \sqrt[n]{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\sqrt[n]{n}} \cdot \sqrt[n]{\alpha_n} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

där $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ vänd

18.18a) Givet är den rekursiva följden

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 1/2 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n} \end{cases}$$

Visa att följden är konvergent och bestäm dess gränsvärde.

• Lösning Om följden är konvergent, så gäller $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = l$

• och vi får

$$l = \frac{1}{1+l} \qquad l^2 + l - 1 = 0$$

$$l_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad l_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad \circledast \left(l = \frac{1-l}{l}\right)$$

Eftersom alla element i följden är positiva får vi att om det finns ett gränsvärde l, så gäller $l = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

• Återstår att visa att följden konvergerar. En metod (som här inte kommer att

• fungera rakt av) är att visa att följden är monoton och begränsad, så det finns anledning att jämföra x_n med det eventuella gränsvärdet: $x_1 < l$;

$$x_{n+1} - l = \frac{1}{1+x_n} - l = \frac{1-l-lx_n}{1+x_n} =$$

$$= \frac{l\left(\frac{1-l}{l} - x_n\right)}{1+x_n} = \frac{\overset{>0}{l}\,(l-x_n)}{\underbrace{1+x_n}_{>0}} \text{ (se } \circledast \text{ ovan)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n < l \Rightarrow x_{n+1} > l \\ x_n > l \Rightarrow x_{n+1} < l \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x_{2k-1} < l \quad \forall k \in \mathbb{N}$
$\quad\quad x_{2k} > l \quad \forall k \in \mathbb{N}$
(eftersom $x_1 < l$, $x_2 > l$, $x_3 < l$ etc)

$\Rightarrow$ det verkar rimligt att försöka visa att elementen med udda nummer bilda en växande följd och att de med jämna nummer bildar en avtagande följd.

$$x_{2k+1} - x_{2k-1} = \frac{1}{1+x_{2k}} - \left(\frac{1}{x_{2k}} - 1\right) =$$

$$= \frac{\cancel{x_{2k}} - (1 + \cancel{x_{2k}}) + x_{2k} + x_{2k}^2}{(1+x_{2k})x_{2k}} = \frac{x_{2k}^2 + x_{2k} - 1}{\underbrace{x_{2k}(1+x_{2k})}_{>0}}$$

$x_{2k} > l$, l det största nollstället till x^2+x-1 $\Rightarrow$ $x_{2k}^2 + x_{2k} - 1 > 0$

$\Rightarrow x_{2k+1} - x_{2k-1} > 0 \Rightarrow \{x_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ är en växande (uppåt begränsad) följd.

På samma sätt (gör det!!!) fås att $\{x_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ är avtagande (nedåt begränsad).

$\Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = l'$, $\exists \lim_{k\to\infty} x_{2k} = l''$

Vi har: $\lim_{k\to\infty}(x_{2k+1} - x_{2k-1}) = l' - l' = 0 =$

$= \frac{(l'')^2 + l'' - 1}{l''(1+l'')}$ och som förut får vi $l''(=l) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

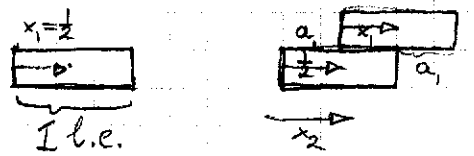
P.s.s.: $l'(=l) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

21 $\sqrt[n]{c} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ $\quad c_1 < a_n < c_2$

$$\Rightarrow \underset{\to 1}{\sqrt[n]{c_1}} < \underbrace{\sqrt[n]{a_n}}_{\to 1} < \underset{\to 1}{\sqrt[n]{c_2}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

1824)

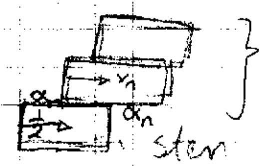


x_n = den gemensamma tyngdpunkten för de n översta stenarna räknat från den n:te stenens vänsterkant

a_n = n:te stenens förskjutning i förhållande till den $(n+1)$:a $\quad n=1$, $x_1 = \frac{1}{2}$

Nätt och jämt balans $\quad a_1 + x_1 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$

$$2 \cdot x_2 = a_1 + x_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



n stenar

sten nr $n+1$

Nätt och jämt balans: $\quad a_n + x_n = 1$

$$(n+1)x_{n+1} = n(a_n + x_n) + \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2} = n+1 - \frac{1}{2}$$

$$x_{n+1} = 1 - \frac{1}{2(n+1)} \qquad a_{n+1} + x_{n+1} = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} \qquad a_n = \frac{1}{2n}, \ \forall n$$

Den översta stenen skjuter ut

$a_1 + a_2 + \dots + a_n$ utanför nr $n+1$

Men $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{1}{2}\big(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}_{\text{divergent talföljd}}\big)$, kan bli hur stort som helst

---

1822) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$

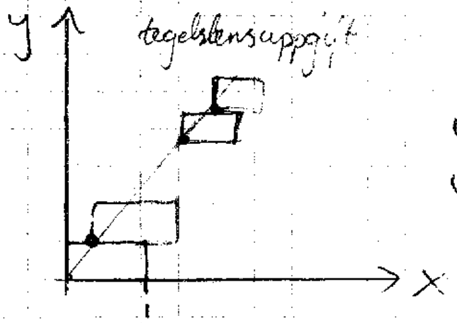
låt $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$ positiv, kontinuerlig, avtagande funktion $x \geq 2$

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \left[t = \ln x,\ dt = \frac{dx}{x} \right] =$$

$$= \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^p}, \quad \text{som är} \begin{cases} \text{konv. för } p > 1 \\ \text{div. för } p \leq 1 \end{cases}$$

Enligt integralkriteriet är den givna serien konvergent för $p > 1$ och divergent för $p \leq 1$

1 Sam Polersie v 49 Reel Matematisk Analys



hörnen ligger ungefär på kurvan

$$y = \ln(1 - e^{-2x})$$

www.math.chalmers.se/~soderst • Matematisk programvara till föreläsning.

Sats (Leibnitz kriterium för alternerande serier)

En serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ där $a_n > 0$

om a_n avtar mot 0 då $n \to \infty$, så är $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konver.

Vi har också en feluppskattning:

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k + r_n = S_n + r_n$$

där $r_n = (-1)^n \delta_n$. $0 \leq \delta_n \leq a_{n+1}$

Bevis $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k = \underbrace{(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots}_{S_{2n-2}} + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\geq 0}$

$\geq S_{2n-2}$, S_{2n} en växande följd

Å andra sidan är

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

S_{2n} uppåt begränsad

Alltså exist. $S = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} S + 0 = S$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = S$, serien konv.

Vänd!

Med samma resonemang

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \dots$$

$$\delta_n = (-1)^n r_n = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \dots =$$

$$= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (\quad) - \dots$$

så att $0 \le \delta_n \le a_{n+1}$

Ex $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ Alt. med $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ som avtar mot 0. Serien konv.

Men $\sum_1^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \right| = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergent

Serien är betingat konv.

Ex $\sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)(-1)^k \right] =$

$= \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ där $a_k = \frac{1}{k}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)(-1)^k\right] > 0$

$a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ Men a_k går inte avtagande mot 0

$$a_{2m+1} - a_{2m} = \frac{1}{2m+1}\left(2 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right) - \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{4m^2} =$$

$$= \frac{1}{2m+1}\left[2 - \frac{1}{(2m+1)^2} - \frac{2m+1}{8m^3}\right] > 0$$

$$\sum_1^{\infty} (-1)^k a_k = \sum_1^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right]$$

$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ är konv. $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konv men $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k}$ div

Alltså är $\sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ div.

3

Sats En omordning av en <u>absolutkonvergent</u> serie ger en ny serie med <u>samma summa</u>

Sats En <u>betingat</u> konv. serie kan **omordnas** så att den nya serien får vilken summa som **helst**! eller så att den divergerar

Potensserier

<u>Taylorserie:</u>
Om f har derivator av alla ordningar, så är

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x) \quad \forall n \geq 0$$

Om $R_{n+1}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, fås

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad \text{(Taylorserie)}$$

<u>Ex</u> (Sats 19.1) $a=0$ (Maclaurinserier)

$f(x) = e^x$, x godtyckligt $\quad R_{n+1}(x) = \frac{x^n}{n!}e^{\theta x}$, $0<\theta<1$

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{|x|^n}{n!} < \frac{|x|^n}{e\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{1}{e}\left(\frac{e|x|}{n}\right)^n \underset{\text{om } n>2e|x|}{<} \frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Analogt för $\sin x$, $\cos x$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x$$

$f(x) = \ln(1+x) \quad R_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ för $-1<x\leq 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} \quad \text{för } -1<x\leq 1$$

<u>Def</u> En potensserie är en serie av formen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \text{eller} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

$a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}$ i allmänhet

<u>Sats</u> (19.3)

Om $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ är konv för något $z_1 \neq 0$

så är serien (abs.) konvergent $\forall z$ med $|z| < |z_1|$

<u>Bevis</u> $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k$ är konv.

$a_k z_1^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \qquad |a_k z_1^k| = |a_k||z_1|^k \leq 1$ för

k tillräckligt stort ($k \geq N$))

$|a_k| \leq \frac{1}{|z_1|^k}$ för $k \geq N$

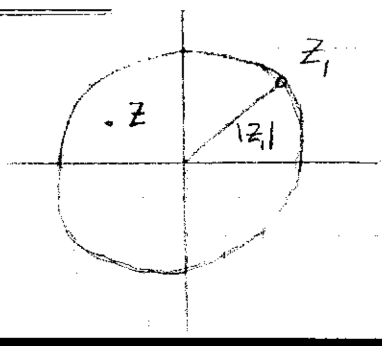
Tag z med $|z| < |z_1|$ För $k \geq N$ är $|a_k||z|^k \leq$

$\leq \frac{|z|^k}{|z_1|^k} = \left(\frac{|z|}{|z_1|}\right)^k = q^k$ där $|q| = \frac{|z|}{|z_1|} < 1$

$\sum_0^{\infty} q^k$ konv. (geometr. serie)

$\Rightarrow \sum_0^{\infty} |a_k z^k|$ konv. (jämf. kriteriet)

$\sum_0^{\infty} a_k z^k$ abs konv, <u>alltså konv</u>



5

1827 c) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + k^2}{4^k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{4^k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4^k+1}$$

1) $$0 < \frac{3^k}{4^k+1} < \frac{3^k}{4^k} = \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$ geometrisk serie $\left|\frac{3}{4}\right| < 1 \implies$

$\implies$ konv. serie enligt jämförelsekriteriet $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{4^k+1}$ konv.

2) $$0 < \frac{k^2}{4^k+1} < \frac{k^2}{4^k} < \frac{2^k}{4^k} \text{ för stora } \underline{\underline{k}}$$

$$0 < \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < 1$$

$\implies \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ konv.

$\implies$ enligt jämförelsekriteriet $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4^k+1}$ konv.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) \quad (*)$$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv. $\implies (*)$ konv.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv, $\sum_{k=1}^{\infty}$ div $\implies (*)$ div

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ div, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ div. $\implies$?

($\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ positiva divergenta $\implies (*)$ div)

1828 d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(3k)!}$

1) Kvotkriteriet
2) Stirlings formel, el. förenklade varianter
3) Förkorta, jämförelsekriteriet

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{(2k+2)!}{(3k+3)!}}{\frac{(2k)!}{(3k)!}} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0<1$$

$\Longrightarrow$ konv.

1829 a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k+\frac{1}{k}}-\sqrt{k}\right)$

$$\frac{\left(\sqrt{k+\frac{1}{k}}-\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+\frac{1}{k}}+\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+\frac{1}{k}}+\sqrt{k}} = \frac{k+\frac{1}{k}-k}{\sqrt{k+\frac{1}{k}}+\sqrt{k}} <$$

$< \dfrac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ konv $\Longrightarrow$ den givna konv.

Alternativt $\quad \sqrt{k+\frac{1}{k}}-\sqrt{k} = \sqrt{k}\left(\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)$ Taylors formel

$$\sqrt{k}\left(\cancel{1}+\binom{1/2}{1}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^4}B(k)-\cancel{1}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{k^{3/2}}+\frac{1}{k^{7/2}}B(k)$$

1829 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k^3}B(k)\right)$ div. ty $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k}$ div.

Taylors formel: $\arctan x = \boxed{}\,x + x^3B(x)$ $\quad\leftarrow$ arctan udda

$(\arctan x)'\big|_{x=0} = 1$

$\frac{1}{k}$ nära 0 när k stort

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4 \ldots$

1835 a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)\ln k}{k^{\frac{4}{3}}}$ $\quad\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k}\ \text{konv.}\right)$

1) Absolut konvergent
2) Leibnitz: ger konvergens

7

$$0 < \frac{\ln k}{k^{4/3}} < \frac{k^{\frac{1}{100}}}{k^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{k^{\frac{4}{3}-\frac{1}{100}}} \quad \text{för stora } k$$

$\Rightarrow$ serien absolutkonvergent $\Rightarrow$ serien konvergent

---

1836 e)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k^2+1}{k}\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin \frac{\pi}{k}$$

ej absolutkonvergent

$$\left|(-1)^k \sin \frac{\pi}{k}\right| = \sin \frac{\pi}{k} \sim \frac{\pi}{k} \quad \text{div.}$$

när $k \to \infty$

[$f(x) \sim g(x)$ när $x \to \infty$ (x_0)

om $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ när $x \to \infty$ (x_0) asymptotisk ekvivalens]

eller asymptotisk likhet

Leibniz kriterium

1) alternerande OK!

2) $\sin \frac{\pi}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ ok!

3) $\frac{\pi}{k+1} < \frac{\pi}{k} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{k+1} < \sin \frac{\pi}{2}$ avtagande (ty sin växande)

$\Rightarrow$ serien konv.

1837 b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} \quad \text{divergent ty } \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$$

integralkriteriet direkt $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ avtagande ? ≥ 0 OK kont. OK

Leibniz: 1) $a_n = (-1)^n p_n$. $p_n \geq 0$ ok!

2) $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ok!

3) ? avtagande

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \leq 0 \quad \forall x \geq e$$

$\Rightarrow f(x)$ avtagande i $[e, \infty)$

$\Rightarrow \left\{\frac{\ln k}{k}\right\}$ avtagande för $k \geq 3$

Vänd!

$\Rightarrow$ enl. Leibniz konv. kriterium är serien konv.
(ej absolutkonvergent)

---

c) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n n} \cdot \frac{-\sqrt{n} + (-1)^n n}{-\sqrt{n} + (-1)^n n} = \frac{(-1)^n n - \sqrt{n}}{n^2 - n} =$$

$$= \frac{(-1)^n \cancel{n}}{n^{\cancel{2}} - \cancel{n}1} + \frac{-\sqrt{n}}{n^2 - n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1}$$ konv. (enligt Leibniz)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}$$ konv.

$\Rightarrow$ den givna serien konv.

---

d) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1 + (-1)^n \sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{1 + (-1)^n \sqrt{n}} \cdot \frac{-1 + (-1)^n \sqrt{n}}{-1 + (-1)^n \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{(-1)^n \sqrt{n} - 1}{n-1} = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$$ konv. enl. Leibniz (nej!)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$$ divergent

$\Rightarrow$ den givna serien divergent

9

4 korrekta decimaler $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$

$\Longleftrightarrow$ noggrannheten $\varepsilon = 0{,}00005$

1717 e/ $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 2^n \sin\frac{n\pi}{3} = \operatorname{Im}\left(2^n e^{i\frac{\pi n}{3}}\right)$

Homogen $r^2 - 2r + 4 = 0$

$(r-1)^2 + 3 = 0$

$r_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$r_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad r_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$y_{hom}^{(n)} = K_1 2^n e^{i\frac{\pi n}{3}} + K_2 2^n e^{-i\frac{n\pi}{3}} \quad K_1, K_2 \in \mathbb{C}$

Reell: $y_{hom}^{(n)} = C_1 2^n \cos\frac{n\pi}{3} + C_2 2^n \sin\frac{n\pi}{3}$

Partikulär lösn.

$h.l = \operatorname{Im}\left(2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}\right)$ resonans

Ansats: $n^1 A 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} = z_p^{(n)}$

⋮

reell: $y_p^{(n)} = \operatorname{Im} z_p^{(n)}$

Potensserier

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$

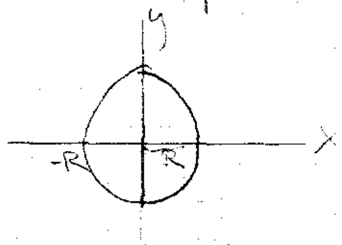
Sats (19.3) om $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ är konvergent för något $z_1 \neq 0$, så är serien (abs) konv $\forall z$ med $|z| < |z_1|$

<u>Sats 19.2</u> Något av följande inträffar:

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ är konv bara för $z = 0$

(2) —"— —"— $\forall z$

(3) $\exists R > 0$ så att serien är konv. för $|z| < R$ och div. för $|z| > R$



R kallas <u>konvergensradie</u>

<u>Bevis</u> Sätt $M = \{ r : \sum_0^{\infty} a_k z^k$ är konv för ngt z med $|z| = r \}$

$M \neq \emptyset$, ty $0 \in M$

Om M ej är begränsad, så finns för varje r_1 ett $r \in M$ med $r > r_1$. Enligt satsen 19.3 så är då serien konv $\forall z$ med $|z| \leq r_1$. Då r_1 är godtyckligt, gäller (2)

Om M är begränsad, sätt

$R = \sup M$

Om $R = 0$, gäller (1)

Antag $R > 0$. Om $|z| > R$

gäller att $z \notin M$, och serien är div. för z.

Om $|z| < R$, så finns $r_1 \in M$

så att $|z| < r_1 < R$ och då är serien konv. för ngt z_1 med $|z_1| = r_1$ och då är serien konv för z (sats 19.3)

<u>Anm.</u> fall (1) är $R = 0$, i fall (2) skriver vi $R = \infty$

11

Sats 19.4

Om $\sqrt[k]{|a_k|} \xrightarrow[k\to\infty]{} H$, så har serien $\sum_0^\infty a_k z^k$

konv. radien $R = \frac{1}{H}$ $\left(\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0 \right)$

Bevis Antag $0 < H < \infty$. Använd rotkriteriet på

$\sum_{k=}^{\infty} b_k$ där $b_k = |a_k z^k| = |a_k||z|^k$

$\sqrt[k]{b_k} = \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z| \xrightarrow[k\to\infty]{} H|z|$

Om $H|z| < 1$, dvs $|z| < \frac{1}{H}$ så är $\sum_0^\infty b_k$ konv.,

dvs $\sum_0^\infty a_k z^k$ är (abs.) konv.

Om $H|z| > 1$ är $b_k > 1$ för k tillräckligt stort

$a_k z^k$ går inte mot 0, $\sum_1^\infty a_k z^k$ är div.

$\therefore R = \frac{1}{H}$

Om $H = 0$, gäller $\sqrt[k]{b_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 < 1$, serien konv.

$\forall z$

Om $H = \infty$, gäller att $\sqrt[k]{b_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ $\forall z \neq 0$

Serien div. $\forall z \neq 0$; $R = 0$

$\blacksquare$

Anm. Satsen gäller allmänt med $H = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

$=$ (största hopningningspunkten till följden $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$)

Sats 19.5

Om $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} K$ så är $R = \frac{1}{K}$

Ex $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ (Maclaurinserien för $\ln(1+x)$)

$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$ ∴ $R = \frac{1}{1} = 1$

Alt. $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$ ∴ $R = \frac{1}{1} = 1$

$x = 1$: $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ är konv. enligt Leibnitz kriterium

$x = -1$: $-\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är div

Serien är konv för $\underline{-1 < x \leq 1}$

Ex. $\sum_{0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ (Maclaurinserien för arctan)

Serien är $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ där $a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2k+1} & \text{om } n = 2k+1 \text{ (udda)} \\ 0 & \text{'' } n = 2k \text{ (jämn)} \end{cases}$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, & n \text{ udda } (2k+1) \\ 0 & n \text{ jämn} \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existerar ej, men

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$; $R = \frac{1}{1} = 1$

Alt Sätt $t = x^2$

Serien blir $x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^2}{2k+1} = x \sum_{0}^{\infty} b_k t^k$

$b_k = \frac{(-1)^k}{2k+1}$ $\sqrt[k]{|b_k|} = \frac{1}{\sqrt[k]{2k+1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{1} = 1$

13

Alt.

$$\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \frac{2k+1}{2k+3} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$$

Serien är konv. för $|t|<1$ och div. för $|t|>1$, dvs. konvergens för $|x|<1$ $(x=t^2)$ och divergens för $|x|>1$ $\therefore R=1$

$x=\pm 1$ ger $\pm\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1}$ som är konv enligt Leibnitz

Den givna serien är konv. för $\underline{\underline{-1\leq x\leq 1}}$

Ex. $$\sum_1^\infty \frac{x^{n^2}}{n} = \sum_1^\infty a_k x^k$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} & \text{då } k=n^2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[k]{\sqrt{k}}}, & \text{då } k=n^2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1, \quad R=1$$

$x=1$: $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ är div

$x=-1$: $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n^2}}{n} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ konv. (Leibnitz)

Den givna serien är konv. för $\underline{\underline{-1\leq x<1}}$

Ex 1902 h

$$\sum_{1}^{\infty} a_k x^k \quad \text{där} \quad a_k = \frac{(k!)^2}{k^{2k}} = \left(\frac{k!}{k^k}\right)^2$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \left(\frac{\sqrt[k]{k!}}{k}\right)^2$$

enl. tidigare $e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$\sqrt[n]{e}\cdot\frac{n}{e} < \sqrt[n]{n!} < \sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{e}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)$$

$$\sqrt[n]{e} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad \sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{e^2} = \frac{1}{R}, \quad R = e^2$$

Serien konv för $|x| < e^2$, div för $|x| > e^2$

$x = \pm e^2$ ger serien $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}(\pm 1)^k\left(\frac{k!}{k^k}\right)^2 e^{2k} =$

$$= \sum_{1}^{\infty}(\pm 1)^k\left(k!\left(\frac{e}{k}\right)^k\right)^2$$ Men $k!\cdot\left(\frac{e}{k}\right)^k > e$ enl. ovan

Allmänna termen går ej mot 0 divergens!

Serien konvergerar då $|x| < e^2$ div. f.ö.

Alt. $$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left[\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\cdot\frac{k^k}{k!}\right]^2 = \left[\frac{k!(k+1)k^k}{(k+1)(k+1)^k k!}\right]^2 =$$

$$\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\right]^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{e^2}, \quad R = e^2$$

15

Sats 19.6

Antag att $\sum_0^\infty a_k x^k$ har konv. radien $R > 0$

för $-R < x < R$ är

$f(x) = \sum_0^\infty a_k x^k$ kontinuerlig och deriverbar och det

gäller att $f'(x) = \sum_1^\infty k a_k x^{k-1}$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_0^\infty a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad \text{för } |x| < R$$

Bevis senare

Anm. De deriverade och integrerade serierna har också konv. radien R, ty

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|ka_k|} = \limsup_{k\to\infty} \left(\sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{|a_k|}\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$

Ex $\frac{1}{1+x} = \sum_0^\infty (-1)^k x^k, \quad |x| < 1$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_0^\infty (-1)^k \int_0^x t^k =$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

Ex $\sum_0^\infty x^k = \frac{1}{1-x} = f(x)$ för $|x| < 1$

$$f'(x) = \sum_1^\infty k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{—— // ——}$$

$$\sum_1^\infty k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Jmfr. med 1803 6/

Spec. $x = \frac{1}{2}$ ger $\sum_1^\infty k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_1^\infty \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$

Ex. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{(2k+1)!}$

Betrakta hjälpserien $\sum_0^{\infty} \frac{t^k}{(2k+1)!} = \sum_0^{\infty} b_k t^k$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(2k+1)!}{(2k+3)!} = \frac{1}{(2k+2)(2k+3)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad R = \infty$$

Serien är konv $\forall x$

$$f'(x) = \sum_0^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$f''(x) = \sum_1^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \left[\underset{\text{indexskifte}}{k \to k+1}\right] =$$

$$= \sum_0^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = f(x)$$

$f''(x) - f(x) = 0$ Diff ekv. för $f(x)$ med lösn.

$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Vi har $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = 1 \end{cases} \quad C_2 = -C_1 \quad 2C_1 = 1 \quad \begin{matrix} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \underline{\underline{\sinh x}}$$

Ex Lös diff. ekv.

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' + xy' - y = 0 \\ y(0) = 1, \; y'(0) = 2 \end{cases}$$

i form av potensserie

Ansätt en lösning $y = \sum_0^{\infty} a_n x^n$

Om konv radien är $R > 0$, fås

$$y' = \sum_1^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_2^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = [n \to n+2]$$

$$= \sum_0^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$$

17 Sätt in i diff. ekv. ger

$$\sum_0^\infty (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_2^\infty n(n-1)a_n x^n + \sum_1^\infty n\cdot a_n x^n - \sum_0^\infty a_n x^n = 0$$

Identifiera koeff. för x^n:

$n=0 \quad 2\cdot 1\cdot a_2 - a_0 = 0$

$n=1 \quad 6a_3 + \cancel{a_1} - \cancel{a_1} = 0$

$n \geq 2: \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n + na_n - a_n = 0$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = (\underbrace{n^2-n-n+1}_{n^2-2n+1})a_n = (n-1)^2 a_n$$

$$a_{n+2} = \frac{(n-1)^2}{(n+2)(n+1)}a_n$$

$a_3 = 0$

$a_3 = a_5 = \dots = 0$

$$a_2 = \frac{a_0}{2} \quad a_4 = \frac{1^2}{2\cdot3\cdot4}a_0 \quad a_6 = \frac{3^2}{5\cdot6}a_4 = \frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}a_0 =$$

$$= \frac{(1\cdot3)^2}{6!}a_0$$

semifakultet

Allmänt: $a_{2k} = \dfrac{(1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-3))^2}{(2k)!}a_0 = \dfrac{[(2k-3)!!]^2}{(2k!)}a_0$ för $k\geq 2$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{2}x^2 + a_0\sum_{k=2}^\infty \frac{[(2k-3)!!]^2}{(2k)!}x^{2k}$$

Sätt $x^2 = t \quad b_k = a_{2k}$

Se på serien $\sum_1^\infty b_k t^k$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} \overset{\uparrow}{=} \frac{(2k-1)^2}{(2k+2)(2k+1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$$

enligt rekursionsformeln

konv. för $|t|<1$, dvs. $|x|<1$

$y(0) = a_0 = 1$

$y'(0) = a_1 = 2$

$$y = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{k=2}^\infty \frac{[(2k-3)!!]^2}{(2k)!}x^{2k} \quad \text{för } |x|<1$$

Anm. $y = 2x + \sqrt{1-x^2} + x\arcsin x$

902) c) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ där $a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$

$a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k \cdot k} = \left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^k$,

$\sqrt[k]{|a_k|} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} e$

$\therefore R = \frac{1}{e}$, dvs. serien är konv. för $|x| < \frac{1}{e}$

och div för $|x| > \frac{1}{e}$

$x = \pm\frac{1}{e}$ ger serien

$$\sum_1^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\left(\pm\frac{1}{e}\right)^k = \sum_1^{\infty} (\pm 1)^k b_k$$

där $b_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} \cdot e^{-k} = e^{k^2 \ln(1+\frac{1}{k})} \cdot e^{-k} =$

$= \left[\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right] = e^{k^2\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right] - k} =$

$= e^{k - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right) - k} \quad e^{-\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right)} \xrightarrow[k\to\infty]{} e^{-\frac{1}{2}}$

den allmänna termen går inte mot 0

Divergens för $x = \pm\frac{1}{e}$

den givna serien konv för $|x| < \frac{1}{e}$

---

f) $a_k = \frac{k^k}{k!}$

stirlings formel: $k! = \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k(1+\varepsilon_k) \qquad \varepsilon_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{k}{\sqrt[k]{k!}} = \frac{\cancel{k}}{\underbrace{\sqrt[k]{\sqrt{2\pi}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt[k]{\sqrt{k}}}_{\to 1}\ \frac{\cancel{k}}{e}\ \underbrace{\sqrt[k]{1+\varepsilon_k}}_{\to 1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} e$$

$\therefore$ konvergensradien $\underline{\underline{R = \frac{1}{e}}}$

För $x = \pm\frac{1}{e}$ fås serien $\sum_1^\infty (\pm 1)^k a_k \left(\frac{1}{e}\right)^k =$

$= \sum_1^\infty (\pm 1)^k b_k$, där $b_k = a_k \cdot e^{-k} =$

$$= \frac{k^k}{k!\,e^k} = \frac{\left(\frac{k}{e}\right)^k}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k(1+\varepsilon_k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}\,(1+\varepsilon_k)}$$

$x = \frac{1}{e}$ ger serien $\sum_1^\infty b_k$

Jämför med $c_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$: $\frac{b_k}{c_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > 0$

$\sum_1^\infty c_k = \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{k}}$ är div.

$\Rightarrow \sum_1^\infty b_k$ är div

$x = -\frac{1}{e}$ $\quad \sum_1^\infty (-1)^k b_k$ $\quad$ <u>Alternerande serie</u>

$b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, Är b_k avtagande?

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\frac{a_{k+1}}{e^{k+1}}}{\frac{a_k}{e^k}} = \frac{a_{k+1}\cdot e^k}{e^{k+1}\cdot a_k} = \frac{a_{k+1}}{a_k}\cdot\frac{1}{e}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{k+1}k!}{(k+1)!\,k^k} = \frac{\cancel{(k+1)}(k+1)^k k!}{\cancel{(k+1)!}\,k^k} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k e^{-1} = e^{k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-1} \qquad \left[\ln(1+x) < x\right]_{x>0}$$

$$e^{k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-1} < e^{k\cdot\frac{1}{k}-1} = e^0 = 1$$

$b_{k+1} < b_k \quad \forall k \Rightarrow b_k$ avtagande

Enligt Leibniz konvergenskriterium för alternerande serier $\Rightarrow$ serien konv. för $x = -\frac{1}{e}$

Den givna serien är konv. för $\underline{\underline{-\frac{1}{e} \leq x < \frac{1}{e}}}$

2) a) $a_k = \sqrt{\dfrac{2k+1}{k^2+1}}$

$\sqrt[k]{c} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$, $\sqrt[k]{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$, $\sqrt[k]{k^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

$\sqrt[k]{\text{polynom i } k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt{\dfrac{\sqrt[k]{2k+1}}{\sqrt[k]{k^2+1}}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

$\therefore R = \frac{1}{1} = 1$

$x=1$: ger $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2k+1}{k^2+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Jämför med $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ $\qquad \dfrac{a_k}{b_k} = \sqrt{\dfrac{k(2k+1)}{k^2+1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \sqrt{2}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ är div $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{1}^{\infty} a_k$ är div.

$x=-1$: ger $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^k a_k$, $a_k > 0$ <u>alternerande serie</u>

$a_k \to 0$

a_k är avtagande ty $\dfrac{2k+1}{k^2+1}$ är avtagande.

Detta inses genom att studera $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$ och

$f'(x) = \dfrac{-2(x^2+x-1)}{(x^2+1)^2} < 0$ för $x \geq 1$

$f(x)$ avtagande $\Rightarrow \displaystyle\sum^{\infty} (-1)^k a_k$ avtagande

$\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent i $x=-1$ enligt <u>Leibniz</u>

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2k+1}{k^2+1}}\, x^k$ konvergerar för

$$\underline{\underline{-1 \leq x < 1}}$$

(1) Sam Polesie Veckoblad v 50 Reell del A

funktionsföljder och funktionsserier

$f_n(x)$, $n = 1, 2 \dots$ funktioner på ett intervall I

Om $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existerar för varje $x \in I$, så kallas följden punktvis konvergent mot $f(x)$

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ är en funktionsserie

Den är punktvis konvergent om

$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ konvergerar punktvis mot $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$

- Om $u_k(x)$ är kontinuerliga på $[a, b]$ och $\sum_1^{\infty} u_k(x)$ punktvis konv. mot $f(x)$, är $f(x)$ kontinuerlig

och $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx$

- Om $u_k(x)$ är deriverbara, är då

$f'(x) \underset{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$?

Svaren på dessa frågor är i allmänhet nej!

Ex $f_n(x) = x^n$ är kontinuerlig på $[0, 1]$

$f_n(x)$ konvergerar punktvis mot $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{om } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{om } x = 1 \end{cases}$

$f(x)$ inte kontinuerlig på $[0, 1]$

$f_n(x) = n^2(1-x)x^n$ på $[0, 1]$

$f_n(1) = 0 \ \forall n$ $\therefore f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

Om $0 \le x < 1$ gäller att $n^2 x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

vänd

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^2\int_0^1 (x^n - x^{n+1})\,dx =$$

$$= n^2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = n^2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$$

Ex. $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx \qquad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = 0$

$f'(x) = 0$ men $f_n'(x) = \cos nx$ går inte mot $f'(x)$

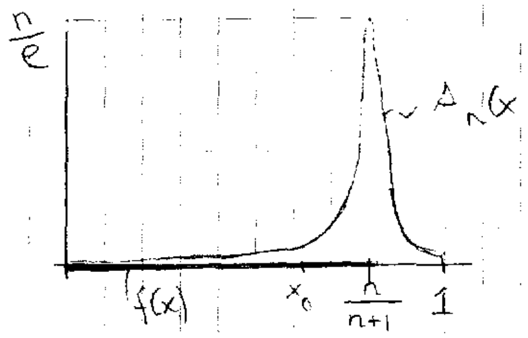
$$f_n(x) = n^2(1-x)x^n = n^2(x^n - x^{n+1})$$

$$f_n'(x) = n^2(nx^{n-1} - (n+1)x^n) =$$

$$= n^2 x^{n-1}(n - (n+1)x)$$

$f_n(x)$ har max då $x = \frac{n}{n+1}$

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^2\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = n^2\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \sim \frac{n}{e}$$



"Avståndet" mellan $f_n(x)$ och $f(x)$ på $[a,b]$, är

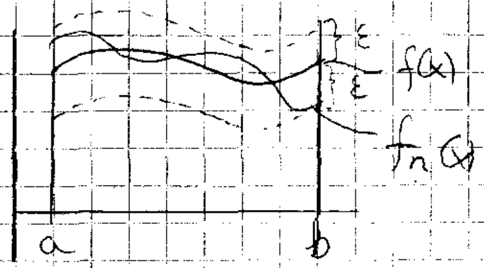
$$\max_{x\in[0,1]}(f_n(x) - f(x)) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

3

<u>Def</u> $f_n \longrightarrow f$ likformigt på I, om

$$\sup_{x\in I} |f_n(x)-f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

dvs. $\forall \varepsilon>0\ \exists N=N_\varepsilon : |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \forall x\in I$ då $n\geq N_\varepsilon$



Ex. Låt $0<a<1$ och betrakta $f_n(x)=n^2(1-x)x^n$ på $[a,b]$. Om $\frac{n}{n+1}\geq a$, dvs. $n\geq \frac{a}{1-a}$ är

$$\max_{0\leq x\leq a} f_n(x) = f_n(a) = n^2(1-a)a^n$$

vilket $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Alltså går $f_n(x)$ mot $f(x)$ likformigt på $[0,a]$ $\forall a$ $(0<a<1)$ men inte på $[0,1]$.

<u>Sats 19.7</u> Antag att f_n är kontinuerliga på I och att $f_n \longrightarrow f$ likformigt på I.
Då är f kontinuerlig på I.

<u>Bevis</u> Fixera $x_0 \in I$. Giv $\varepsilon>0$.
Då $f_n \to f$ likformigt finns N_ε så att

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x\in I \text{ om } n\geq N_\varepsilon$$

Fixera $p\geq N_\varepsilon$. Då f_p är kont. (i x_0) finns $\delta>0$ så att $|f_p(x)-f_p(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$ $\forall x$: $|x-x_0|<\delta$ $(x\in I)$

för $|x-x_0|<\delta$ är $|f(x)-f(x_0)| =$

$$\left|[f(x)-f_p(x)]+[f_p(x)-f_p(x_0)]+[f_p(x_0)-f(x_0)]\right| \leq$$

$$\leq |f(x)-f_p(x)|+|f_p(x)-f_p(x_0)|+|f_p(x_0)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Alltså är f kontinuerlig i x_0. Men x_0 är godtyckligt valt i I $\blacksquare$

<u>Sats 19.8</u> Om $u_k(x)$ kontinuerlig på I och om $\sum_1^\infty u_k(x)$ är likformigt konv på I så är summan $S(x) = \sum_1^\infty u_k(x)$ kont på I

<u>Bevis</u>

$S_n(x) = \sum_1^n u_k(x)$ är kont. och $S_n(x) \to S(x)$ likf. på I

Enl. sats 19.7 så är $S(x)$ kont. $\blacksquare$

<u>Sats 19.9</u> (Weierstrass Majorantsats)

Om $|u_k(x)| \leq a_k \quad \forall x \in I,\ k \geq I$ och om $\sum_1^\infty a_k$ är konv.

så är $\sum_1^\infty u_k(x)$ är <u>likformigt konv.</u> på I

<u>Bevis</u> Enligt jämförelsekriteriet så är $\sum_1^\infty u_k(x)$ absolutkonv $\forall x \in I$

så summan $S(x)$ existerar

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \sum_{k=n+1}^\infty a_k < \varepsilon \quad \text{för } n \geq N$$

$$|S(x) - S_n(x)| \leq \left| \sum_{k=1}^\infty u_k(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^\infty u_k(x) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^\infty |u_k(x)| \underset{\text{enl förutsättn.}}{\leq} \sum_{k=n+1}^\infty a_k < \varepsilon \quad \text{för } n \geq N \ \forall x$$

Alltså går S_n mot S <u>likformigt på I</u> då $n \to \infty$

$\blacksquare$

5

Räkneövning

6c) 1) $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+x} - \frac{x}{1+x}\right)^2$

2) $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 = \left(-1 + \frac{2}{1+x}\right)^2 = 1 - \frac{4}{1+x} + \frac{4}{(1+x)^2}$

3) $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 = (1-x)^2 \cdot \frac{1}{(1+x)^2} = (1-2x+x^2) \cdot \frac{1}{(1+x^2)}$

Kring 0 i potenser av x

1) $\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$ binomialutv.

2) $\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x} = (1-x+x^2-\dots)(1-x+x^2-\dots) =$

$= 1 + (-1-1)x + (1+1+1)x^2 + \dots$

3) $\frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -(1-x+x^2-\dots)' = \underline{\underline{1-2x+3x^2-\dots}}$

$|x|<1$

$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 = 1 - 4(1-x+x^2-\dots) + 4(1-2x-3x^2-4x^3+\dots) =$

$= 1 - 4x + 8x^2 - \dots + (-4(-1)^n + 4(-1)^n(n+1))x^n + \dots$

6e) $\frac{1}{x^2-3x+2} =$ [Partialbråksuppdela!] $=$

$= \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \dots$ $\underline{\underline{|x|<1}}$

$|x|<1$

$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -(1+x+x^2+\dots+x^n+\dots)$

$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\dots+\frac{x^n}{2^n}+\dots\right)$ $\left|\frac{x}{2}\right|<1$

7) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}(-x^2) + \binom{-\frac{1}{2}}{2}(-x^2)^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n$

$= 1 + \binom{-1/2}{1}x^2 + \binom{-1/2}{2}x^4 - \dots + (-1)^n\binom{-1/2}{n}x^{2n} + \dots$

$\arcsin x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + C = C + x - \frac{1}{3}\binom{-1/2}{1}x^3 + \dots + (-1)^n\frac{1}{2n+1}\binom{-1/2}{n}x^{2n+1}$

$$\binom{-1/2}{1} = \frac{-1/2}{1} = -1/2$$

$$\binom{-1/2}{2} = \frac{(-1/2)(-1/2-1)}{1\cdot 2} = \frac{3}{8}$$

$$\binom{-1/2}{3} = \frac{(-1/2)(-1/2-1)(-1/2-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = -\frac{5}{16}$$

konvergensradie: $|x^2| < 1$
$\iff |x| < 1 \quad R = 1$

8b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$ Konvergensintervall? Summa?

Konvergensradie: Kvotkriteriet

$$\left| \frac{(-1)^n \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)}}{(-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)(2n)}} \right| = x^2 \frac{2n(2n-1)}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x^2$$

$$x^2 \begin{cases} < 1 & \text{konv.} \\ > 1 & \text{div.} \\ = 1 & ? \end{cases}$$

Serien är konv. i $(-1, 1)$
div. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$x = \pm 1$ samma i båda ± 1 (x^{2n})

$x = \pm 1$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n(2n-1)}$ absolut konv. n^2 i nämnaren

$\Rightarrow$ konvergensintervall $\underline{\underline{-1 \le x \le 1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} = S(x)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots$$

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \dots =$$

7

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n} = 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{2n}$$

$$\int x^{2n+2}\,dx = \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \ (+C)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{2n} = \frac{\ln(1+x)}{2x^2} \quad \Big| \int$$

$$C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n(2n+1)} = \int \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2x} \ln(1+x^2) + \int \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}(1+x^2)}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \arctan x$$

jämn

$$\underbrace{2Cx}_{=0} + \underbrace{2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}}_{=S(x)} = 2x\arctan x - \ln(1+x^2)$$

$C = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} = S(x)$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x^2}$$

9f) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+2)3^{n+2}} \qquad \boxed{x = \frac{1}{3}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n(n+2)} = S(x)$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n} = x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

$$\left(\frac{S'(x)}{x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1} = -1 + x - x^2 - \dots = -\frac{1}{1+x}$$

$$\frac{S'(x)}{x} = -\ln(1+x) + C$$

$$S'(x) = -x\ln(1+x) + Cx$$

$$S(x) = -\int x\ln(1+x)\,dx + \frac{Cx^2}{2} + C_1 =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\ln(1+x) + \int \frac{x^2}{2}\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\text{polynomdivision}}\,dx + C\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} nx^n, \quad x = \frac{1}{2}$$

9 d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n!}x^{n-1} = S(x)$, $x = 1$

$$\int S(x)\,dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}x^n = C + x\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!}} = (e^x)' = e^x$$

$$\Rightarrow \left(\int S(x)\,dx\right)' = (C + xe^x)'$$

$$S(x)\Big|_{x=1} = (e^x + xe^x)\Big|_{x=1} = 2e$$

10 $\quad f(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$ lösn till $y'' + y' + y = e^x$

$R = \infty$

kvotkriteriet

$r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow y_{hom}$

$y_{part} = Ae^x = \frac{1}{3}e^x$

$y(0) = 1 = f(0)$, $y'(0) = 0 = f'(0)$ begynnelsevillkor

Weierstrass Majorantsats

Om $|u_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in I,\ n \geq 1$

där $\sum_1^\infty a_n$ konv, så är

$\sum_1^\infty u_n(x)$ likformigt konvergent

Ex. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 x}$ $\quad \forall a > 0$ är för $x \geq a$

$$e^{-k^2 x} \leq e^{-k^2 a} \leq e^{-ka} = a_k$$

$\sum_1^\infty a_k = \sum_1^\infty (e^{-a})^k$ är konv. (geometrisk serie med kvot $e^{-a} < 1$)

Alltså är serien likformigt konv för $x \geq a$.

Alltså är $f(x)$ kontinuerliga för $x > 0$

Sats 19.10

Om $f_n(x)$ är kontinuerliga och

$f_n(x) \to f(x)$ likformigt på $[a,b]$, så är

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

Bevis $f(x)$ blir kontinuerlig (sats 19.7)

så existerar $\int_a^b f(x)\,dx$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \leq \left| \int_a^b \big(f(x) - f_n(x)\big)\,dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \leq (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

enl. def. av likformig konvergens ■

Anm. Motsvarande gäller för serier (sats 19.12)

Ex $f(x) = \sum_{1}^{\infty} e^{-k^2 x}$

Låt $[a, b]$ med $0 < a < b < \infty$

vara godtyckligt

Konv. är likformig på $[a, b]$, så

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_1^{\infty} e^{-k^2 x}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b e^{-k^2 x} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-k^2 x}}{-k^2} \right]_a^b = \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} e^{-k^2 a} - \frac{1}{k^2} e^{-k^2 b} \right) =$$

$$= \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{-k^2 a} - \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{-k^2 b} \quad \text{(båda serierna konv.)}$$

Eftersom $e^{-k^2 a} \leq 1$, $e^{-k^2 b} \leq e^{-b}$ och

$\sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konv, kan vi låta $a \to 0$

och $b \to \infty$ och få

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{(sats 19.9, och 19.7)}$$

$$\left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$$

Sats 19.14

Antag $\sum_1^{\infty} u_k(x)$ är punktvis konv. och

$\sum_1^{\infty} u_k'(x)$ är likformigt konv. på I

($u_k(x)$ förutsätts kont) då är

$$\frac{d}{dx} \sum_1^{\infty} u_k(x) = \sum_1^{\infty} u_k'(x) \quad \text{på } I$$

11

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{n}{2}} \sin(2^n x)$$

Serien är likformigt konv. och $f(x)$ kontinuerlig

$f(x)$ är ingenstans deriverbar (fraktal mängd) (oändligt taggig)

Tillämpningar på potensserier

Sats 19.15 och Sats 19.16

Antag $\sum_0^{\infty} a_k x^k$ har konv. radien $R > 0$

För $|x| \leq r < R$ är $f(x) = \sum_0^{\infty} a_k x^k$ likformigt konv.

och det gäller

$$f'(x) = \sum_1^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad \text{och} \quad \int_0^x f(t)\,dt = \sum_0^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

för $|x| < R$

<u>Ex</u> (1938) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = [\, t = 1-x \,] =$

$$= -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt \,;$$

$$-\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt \overset{\text{Maclaurin}}{=} \int_0^{1-\varepsilon} \left(\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \right) dt =$$

$$= \int_0^{1-\varepsilon} \sum_1^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n}\,dt = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n} \text{ konv. radie } 1 \right] =$$

$$= \sum_1^{\infty} \frac{(1-\varepsilon)^n}{n^2}$$

$\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ konv. likformigt för $|x| \leq 1$ och ty $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konv., Weierstrass alltså kont.

$$\therefore \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{\varepsilon \to 0} -\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\ln(1-t)}{t} = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_1^{\infty} \frac{(1-\varepsilon)^n}{n^2} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 x}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Repetition

Ex Lös $xy' - y = y^2$, $y(1) = 2$

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 + y \iff \frac{dy}{y^2+y} = \frac{dx}{x} \quad \text{för } x \neq 0$$
$$y \neq 0, -1$$

Separabel ekv.

$$\int \frac{dy}{y(y+1)} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C = \ln C|x| \quad (C>0)$$

$$\int \frac{dy}{y(y+1)} = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy = \ln|y| - \ln|y+1| =$$

$$= \ln\left|\frac{y}{y+1}\right|$$

$$\therefore \quad \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \ln C|x| \; ; \quad \Big| \, e^{\cdots}$$

$$\left|\frac{y}{y+1}\right| = C|x|$$

$$\frac{y}{y+1} = \underbrace{\pm C}_{C_1}x = C_1 x$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow \frac{2}{3} = C_1 \quad \underline{y = \frac{2x}{3-2x}} \quad \forall x < \frac{3}{2}$$

13

Ex $xy' + 2y = e^{-x}$, $x > 0$

Linjär ar 1:a ordn.

Division med x :

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x} e^{-x}$$

I.f. $e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln x} = x^2$

Multiplicera ekv. med x^2 :

$$x^2 y' + 2xy = xe^{-x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^2 y\right] = xe^{-x} \qquad \Big| \int \ldots dx$$

$$x^2 y = \int xe^{-x}\, dx = -xe^{-x} + \int 1 \cdot e^{-x} = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

$$y = \frac{C}{x^2} - \frac{x+1}{x^2} e^{-x}$$

Ex $y'' + 2y' - 3y = e^x \sin 2x$, $y(0), y'(0) = 0$

Linjär ar 2:a ordn med konstanta koeff.

homogena: kar. ekv.: $r^2 + 2r - 3 = 0$

$r = -1 \pm \sqrt{1+3}$ $\quad r_1 = 1 \quad r_2 = -3$

$y_{hom} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$

part.lösning y_p

betrakta hjälpekv. $u'' + 2u' - 3u = e^x e^{i2x} = e^{(1+2i)x}$

om u_p är en part. lösn. till denna, så är $y_p = \operatorname{Im} u_p$

Ansätt $u_p = ae^{(1+2i)x}$ Ej resonans! $(1+2i)$ ej rot till kar. ekv.

Insättning ger

$$u_p'' + 2u_p' - 3u_p = \left[a(1+2i)^2 + 2a(1+2i) - 3a\right] e^{(1+2i)x} =$$

$$= a(\cancel{1} - 4 + \cancel{4i} + \cancel{2} + \cancel{4i} - \cancel{3})\, e^{(1+2i)x} = a(-4+8i)\cancel{e^{(1+2i)x}} = \cancel{e^{(1+2i)x}}\ 1$$

$$a(-4+8i) = 1$$

$$4a(-1+2i) = 1 \qquad a = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{-1+2i} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(-1-2i)}{5} =$$

$$u_p = -\frac{1}{20}(1+2i)\, e^{(1+2i)x} =$$

$$= -\frac{1}{20}(1+2i)e^{x}\left(\cos 2x + i\sin 2x\right)$$

$$y_p = \operatorname{Im} u_p = -\frac{1}{20}e^{x}\left(\sin 2x + 2\cos 2x\right)$$

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{20}e^{x}\left(\sin 2x + 2\cos 2x\right)$$

Derivera!

$$y' = C_1 e^{x} - 3C_2 e^{-3x} - \frac{1}{20}e^{x}(\sin 2x + 2\cos 2x) - \frac{1}{20}e^{x}\left(2\cos 2x - 4\sin 2x\right)$$

Beg. villkor:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 - \frac{1}{10} = 1 \\ y'(0) &= C_1 - 3C_2 - \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{7}{8} \\ C_2 &= \frac{9}{40} \end{aligned}$$

$$y = \frac{7}{8}e^{x} + \frac{9}{40}e^{-3x} - \frac{1}{20}e^{x}\left(\sin 2x + 2\cos 2x\right)$$

<u>Ex</u> Lös $\quad y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 1 + 2^n$

Kar ekv $\quad r^2 + r - 2 = 0 \qquad r_1 = 1 \quad r_2 = -2$

Homogen: $\quad y_n^{(h)} = C_1 + C_2(-2)^n$

2/ <u>a</u> En part lösn $y_n^{(1)}$ till $\quad y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 1$

Då $r = 1$ är en kar. rot ansätt $\quad y_n^{(1)} = n\,a$

Insättning ger:

$$a(n+2) + a(n+1) - 2an = 1 \qquad 3a = 1,\ a = \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow y_n^{(1)} = \frac{1}{3}n$$

<u>b</u> En part. lösn. $y_n^{(2)}$ till $\quad y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 2^n$

15

Då $r=2$ ej är en kar rot ansätts

$y_n^{(2)} = b \cdot 2^n$ Insättning ger:

$$b \cdot 2^{\cancel{n}+2} + b\, 2^{\cancel{n}+1} - 2b\cancel{2^n} = \cancel{2^n}$$

$$4b + 2b - 2b = 1 \qquad 4b = 1 \quad b = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y_n^{(2)} = \frac{1}{4} 2^n$$

$$y = C_1 + C_2(-2)^n + \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}2^n$$

Ex Bestäm konstanterna a, b så att

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-\cos x} + \frac{a}{x^2} + b\right) \Big/ x^2$$

$$\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^4 + \underbrace{O(x^6)}_{x^6 B(x)}, \quad x\to 0$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^6)$$

$$1-\cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - O(x^6)\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)$$

$$\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-\cos x} + \frac{a}{x^2} + b\right)\Big/ x^2 = \frac{x^2\sqrt{1+x^2} + (a+bx^2)(1-\cos x)}{x^4(1-\cos x)} =$$

$$= \frac{x^2\left[1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^6)\right] + (a+bx^2)\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + O(x^8)\right]}{x^4\left[\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right]} =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{a}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{24} + \frac{b}{2}\right)x^4 + \left(-\frac{1}{8} + \frac{a}{720} - \frac{b}{24}\right)x^6 + O(x^8)}{x^6\left[\frac{1}{2} + O(x^2)\right]}$$

Gränsvärde då $x \to 0$ existerar omm

$$1 + \frac{a}{2} = 0 \qquad \frac{1}{2} - \frac{a}{24} + \frac{b}{2} = 0 \qquad \begin{cases} a = -2 \\ b = -\frac{7}{6} \end{cases}$$

Med dessa värden på a och b fås

$$\frac{\left(-\frac{1}{8}+\frac{a}{720}-\frac{b}{24}\right)x^6+O(x^8)}{x^6\left[\frac{1}{2}+O(x^2)\right]} = \frac{-\frac{19}{120}+O(x^2)}{1+O(x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{}$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{19}{120}$$

Storgruppsövn. 11/12-03

1914) a) $xy''+y'-y=0 \qquad y(0)=1$

Ansätt $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Antag konv. radien $R>0$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n x^{n-1}$$

$$xy''+y'-y = \sum_0^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_0^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_0^{\infty} a_n x^n =$$

$$= \sum_0^{\infty}\left[n(n+1)a_{n+1}+(n+1)a_{n+1}-a_n\right]x^n = 0$$

Koefficientidentifiering:

$$n(n+1)a_{n+1}+(n+1)a_{n+1}-a_n = 0$$

$$(n+1)(n+1)a_{n+1} = a_n$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)^2}, \qquad y(0)=a_0=1$$

$$a_1 = \frac{a_0}{(0+1)^2} = \frac{1}{1^2}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2^2} = \frac{1}{1^2 2^2}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3^2} = \frac{1}{1^2 2^2 3^2}$$

Allmänt $a_n = \frac{1}{1^2 2^2 \cdots n^2} = \frac{1}{(n!)^2}$

17) Då $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

så konv. serien $\underline{\underline{\forall x}}$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

1919) a) $f_n(x) = e^{-nx}$, $x \geq 0$, $n \geq 1$

För $x > 0$ gäller $nx \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ $\quad e^{-nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

För $x = 0$ $\quad f_n(0) = 1 \quad \forall n$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

b) $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $-\infty < x < \infty$, $n \geq 1$

$x^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \qquad |x| > 1$

$x^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad |x| < 1$

$x^{2n} = 1 \qquad |x| = 1$ då $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } |x| > 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{om } |x| = 1 \\ 0, & \text{om } |x| < 1 \end{cases}$$

1920 Om $0 \leq x < 1$ gäller $nx^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(ty $nx^{n-1} = ne^{(n-1)\ln x \, (<0)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} nx^{n-1}\right) dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \left(\lim_{n\to\infty} x^{n-1}\right) dx = \lim_{\varepsilon\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^{n-1}\, dx = \left[x^n\right]_0^1 \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^{n-1}\, dx = 0 \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} nx^{n-1}\, dx = 0$$

1922) b $\quad S_n(x) = \frac{1}{n}\arctan nx$

$$|S_n(x)| < \frac{\frac{\pi}{2}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right] = 0 \quad \forall x$$

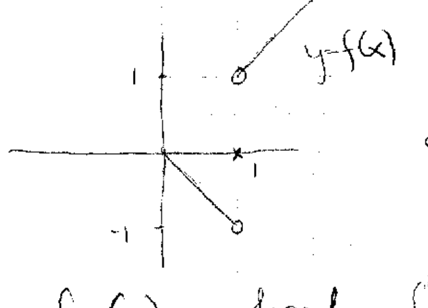
$$S_n'(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n'(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

1924) a) $\quad f_n(x) = x\frac{x^n-1}{x^n+1} \quad , n \geq 1, \quad x \geq 0$

$$x^n \longrightarrow \begin{cases} 0, & \text{om } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{om } x = 1 \\ \infty, & \text{om } x > 1 \end{cases}$$

$$f_n(x) = \left\{\begin{matrix} -x & \text{om} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{om} & x = 1 \\ x & \text{om} & x > 1 \end{matrix}\right\} = f(x)$$



grafen till $f(x)$

b) $f_n(x)$ kont för $x \geq 0$

om konvergensen vore likformig på $[0, \infty)$ skulle $f(x)$ vara kontinuerlig där, enligt satsen om gränsfunktionens kontinuitet

Så är inte fallet. Därför är konv. <u>ej</u> likformig på $[0, \infty)$

19)

På $[2,\infty)$ är $f_n(x) - f(x) = x\dfrac{x^n-1}{x^n+1} - x =$

$$= \frac{\cancel{x^{n+1}} - x - \cancel{x^{n+1}} - x}{x^n+1} = -\frac{2x}{x^n+1}$$

Om $n \geq 2$ är $\dfrac{x}{x^n+1}$ är avtagande för $x \geq 2$,

ty $$\frac{d}{dx}\frac{x}{x^n+1} = \frac{(x^n+1)\cdot 1 - x\,n x^{n-1}}{(x^n+1)^2} = \frac{(1-n)x^n+1}{(x^n+1)^2} \leq \frac{1-x^n}{(x^n+1)^2}$$

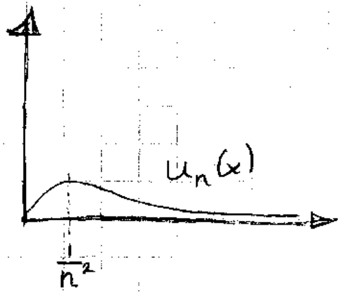
< 0 $\therefore$ avtagande

$$\sup_{x\geq 2} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \geq 2} \frac{2x}{x^n+1} = \frac{4}{2^n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Alltså $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ likformigt på $[2,\infty)$

1929) $$\sum_{n=1}^{\infty} x e^{-n^2 x} = \sum_{1}^{\infty} u_n(x)$$

$$u_n'(x) = e^{-n^2x} - x\cdot n^2 e^{-n^2 x} = (1-n^2x)e^{-n^2x}$$



$u_n(x)$ har max för $x = \dfrac{1}{n^2}$

maxvärdet är $u_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}e^{-1}$

$|u_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \geq 0, n \geq 1$

$$\sum_1^{\infty} a_n = \frac{1}{e}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$$ är konv.

enligt Weierstrass Majorantsats är

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ likformigt konv. på $[0,\infty)$

Slut på kursen!