Matematik CTH&GU

Tentamen i inledande matematisk analys F/TM (TMA970), 2011-01-13, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Ragnar Freij, tel. 0703 – 088304

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper! Fyll i omslaget ordentligt!

==

1. Visa att $2^m + 1$ är delbart med 3 för alla udda tal $m \in \mathbb{N}$
a) med induktion (4p) **b)** utan induktion (2p). (6p)

2. Beräkna längden av kurvstycket $y = e^x, -\ln 2 \le x \le \ln 2$. (6p)

3. Låt $f(x) = |x| \sinh(2x), x \in \mathbb{R}$.

a) Är f C^1? Är f C^2? (4p)

b) Beräkna arean av det område i 1:a kvadranten som begränsas av y-axeln och kurvorna $y = f(x)$ och $y = \sinh(1)\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$. (5p)

4. Låt $f(x) = \frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{x}, \ D_f =]0, \infty[$.

a) Visa att f är injektiv och strängt konvex. (4p)

b) Bestäm a så att $Df^{-1}(f(a)) = -1$. (3p)

c) Beräkna $\int_1^\infty f(x)\,dx$. (6p)

5. Låt $f(x) = \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{x} - 1\right)$ $\quad$ [$\operatorname{arctanh}(u) = \ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$]

a) Ange D_f och V_f och rita $y = f(x)$ med angivande av konvexitet/konkavitet. (5p)

b) Beräkna $\int_0^4 f(x)\,dx$. (7p)

6. Låt $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Visa att om såväl f som g har ett gränsvärde då x går mot a så har även $f + g$ ett gränsvärde då x går mot a. Gäller omvändningen? (7p)

7. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats för två funktioner. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Tentamen inledande matematisk analys (tma970), 11-01-13, lösningar

uppg. 1

Påstående: $2^m + 1$ är delbart med 3 för varje udda tal $m \in \mathbb{N}$.
ANM: Talen $\frac{2^q+1}{3}$ där q är primtal kallas *Wagstaff* tal.

a) Vi visar med induktion att $2^{2n-1} + 1$ är delbart med 3 för alla $n \in \mathbb{N}$:
I. $n = 1$: $VL = 2+1 = 3$ är delbart med 3 o.k..
II. Föruts.: $2^{2p-1} + 1$ är delbart med 3 för $p \in \mathbb{N}$, $p \leq m_0$ för något $m_0 \in \mathbb{N}$.
Påst.: $2^{2(m_0+1)-1} + 1 = 2^{2m_0+1} + 1$ är delbart med 3.
Bev.: $2^{2m_0+1} + 1 = 4 \cdot \left(2^{2m_0-1} + 1\right) - 3$ är delbart med 3
ty $2^{2m_0-1} + 1$ är delbart med 3 [enligt föruts.]. vsv
III. Induktionsaxiomet ger då att $2^{2n-1} + 1$ är delbart med 3 för alla $n \in \mathbb{N}$. vsv

b) Om m är udda så är $x_0 = -1$ ett nollställe till polynomet $p(x) = x^m + 1$, alltså är (faktorsatsen) $p(x) = (x+1)\, k(x)$ där $k(x)$ $\left(= x^{m-1} + ... + 1\right)$ är ett polynom av grad $m - 1$; för $x = 2$ fås $p(2) = 2^m + 1 = 3k(2)$ $(k(2) \in \mathbb{N})$ vsv.

Eller: om m är udda så är $2^m + 1 = (3-1)^m + 1 = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 3^k (-1)^{m-k} + 1 =$
$= \sum\limits_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^k (-1)^{m-k} + (-1)^m + 1$ delbart med 3 ty $(-1)^m + 1 = 0$ och $\sum\limits_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^k (-1)^{m-k}$ är delbart med 3. **Eller:** för $n \in \mathbb{N}$ är $2^{2n+1} + 1 = 2 \cdot 4^n + 1 =$
$= 2 \cdot (3+1)^n + 1 = 2 \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k + 1 = 2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k + 3$ delbart med 3 ty $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k$ är delbart med 3. vsv

uppg. 2

Kurvan $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x) = (x, e^x)\,, -\ln 2 \xrightarrow{x} \ln 2$ har längden

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} |\dot{\boldsymbol{r}}(x)|\, dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} |(1, e^x)|\, dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{\sqrt{1+e^{2x}}}{e^{2x}} e^{2x} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} 1 + e^{2x} = t^2,\ 2e^{2x} dx = 2t dt \\ x = \ln 2 \iff 1 + 4 = t^2,\ x = -\ln 2 \iff 1 + \frac{1}{4} = t^2 \end{array} \right] = \int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t^2}{t^2-1} dt =$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = \int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}} \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt = \int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\right) dt =$$

$$= \left[t + \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1}\right]_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+1}{\frac{\sqrt{5}}{2}-1}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4} \cdot \frac{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}{1}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

En annan lösning:

$$\int \sqrt{1 + e^{2x}} dx = [e^x = \sinh v, e^x dx = \cosh v dv] = \int \frac{\cosh^2 v}{\sinh v} dv =$$

$$= \int \frac{\cosh^2 v}{\cosh^2 v - 1} \sinh v dv = \int \left(\sinh v + \frac{\sinh v}{\cosh^2 v - 1}\right) dv = \cosh v + \frac{1}{2} \ln \frac{\cosh v - 1}{\cosh v + 1} =$$

$= \sqrt{1+e^{2x}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} = t + \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}$ s.o..

En liknande integral fås med parametrisering $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u) = (\ln u, u)\,,\ \frac{1}{2} \xrightarrow{u} 2$:

$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} |\dot{\boldsymbol{r}}(u)|\, du = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left|\left(\frac{1}{u}, 1\right)\right| du = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u} dt = \left[1+u^2 = t^2 ...\right] = \int\limits_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t^2}{t^2-1} dt$ s.o..

svar: $\boxed{\frac{\sqrt{5}}{2} + \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$

uppg. 3

Låt $f(x) = |x| \sinh(2x)$; f är udda.

a) f är C^∞ i alla punkter $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ty $\pm x$ och $\sinh(2x)$ är C^∞ i varje $a \neq 0$.

För $a = 0$: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} -\sinh(2x) & \text{då } x < 0 \\ \sinh(2x) & \text{då } x > 0 \end{cases}$, alltså gäller

$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$, dvs. f är deriverbar även i origo med $f'(0) = 0$.

$f'(x) = \begin{cases} -\sinh(2x) - 2x\cosh(2x) & \text{då } x < 0 \\ \sinh(2x) + 2x\cosh(2x) & \text{då } x > 0 \end{cases}$, alltså gäller

$\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = 0 = f'(0)$, dvs. f' är kontinuerlig även i origo.

$\frac{\Delta f'}{\Delta x} = \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \begin{cases} -\frac{\sinh(2x)}{x} - 2\cosh(2x) & \text{då } x < 0 \\ \frac{\sinh(2x)}{x} + 2\cosh(2x) & \text{då } x > 0 \end{cases}$, alltså gäller

$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\Delta f'}{\Delta x} = 4 \neq \lim\limits_{x\to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -4$, dvs. f' är inte deriverbar i origo.

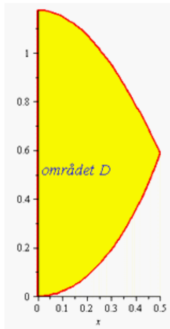
$\left[\frac{\sinh(2x)}{x} = 2\frac{\sinh(2x)-\sinh 0}{2x} \to 2\cosh(0) \text{ då } x \to 0\right]$.

b) Låt $g(x) = \sinh(1)\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$; på $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ är f strängt växande och g strängt avtagande, $g(0) > g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sinh 1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right) > f(0)$, alltså är $g(x) \geq f(x)$.
Det inses även så: g är strängt konkav, $h(x) = x\sinh(2x)$ strängt konvex på $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ty $g'' < 0$, $h'' > 0$ på $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, kurvorna $y = g(x)$ resp. $y = h(x)$ ligger alltså över resp. under sekanten mellan $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sinh 1}{2}\right)$ och $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sinh 1}{2}\right)$.
Eller bara på $\left[0, \frac{1}{2}\right]$: $y = g(x)$ ligger över sekanten mellan $(0, \sinh 1)$ och $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sinh 1}{2}\right)$, $y = f(x)$ ligger under sekanten mellan $(0,0)$ och $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sinh 1}{2}\right)$. Eller så: på $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ är $v = g - f$ str. avtagande ty $v' < 0$, alltså är $v(x) \geq v\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
Arean av området D mellan kurvorna $y = g(x)$ och $y = f(x)$ är således

$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} (g(x) - f(x))\, dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\sinh(1)\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) - x\sinh(2x)\right) dx = [\text{p.i.}]$

$= \sinh(1)\left[\frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{1}{2}x\cosh(2x) - \frac{1}{4}\sinh(2x)\right]_0^{\frac{1}{2}} =$

$= \sinh(1)\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{1}{4}(\cosh(1) - \sinh(1)) = \frac{3\sqrt{3}\sinh 1}{4\pi} - \frac{e^{-1}}{4}$.



svar: $\boxed{\textbf{a)}\ f \text{ är } C^1 \text{ men inte } C^2 \quad \textbf{b)}\ \frac{1}{4\pi}\left(3\sqrt{3}\sinh 1 - \frac{\pi}{e}\right)}$

uppg. 4

Låt $f(x) = \frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{x}$ $\left(= \frac{1}{x} + \arctan x - \frac{\pi}{2}\right)$; f är C^∞ (på $D_f =]0, \infty[$!).

a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} < 0$ ty $1 + x^2 > x^2$ eller ty $f'(x) = \frac{-1}{x^2(1+x^2)} < 0$, det ger att f är strängt avtagande alltså injektiv (på D_f !). f är strängt konvex ty $f'(x) = \frac{-1}{x^2(1+x^2)}$ är strängt växande eller ty $f''(x) = \frac{D\left(x^2\left(1+x^2\right)\right)}{\left(x^2(1+x^2)\right)^2} > 0$.

b) $Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{Df(a)} = -a^2\left(1 + a^2\right)$ där $y_0 = f(a) = \frac{1}{a} - \arctan\frac{1}{a}$, $a > 0$.
$Df^{-1}(y_0) = -1 \Leftrightarrow a^4 + a^2 = 1 \Leftrightarrow \left(a^2 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \underset{a^2>0}{\Leftrightarrow} a^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi$
$\underset{a>0}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{\varphi}$ ($\varphi =$ det gyllene snittet !).

c) $\int\left(\frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{x}\right)dx =$[part. int.] $= \ln x - \left(x\arctan\frac{1}{x} + \int\frac{x}{x^2+1}dx\right) =$
$= \ln x - x\arctan\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + c = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1} - x\arctan\frac{1}{x} + c$ och därmed
$\int\limits_1^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1} - \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) - \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 - 1 + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}$
ty $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \ln\left(\frac{1}{1+0}\right) = \ln 1 = 0$ och
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\frac{1}{x}=t\to 0_+}\frac{\arctan t}{t} = \lim\limits_{\arctan t = v\to 0_+}\frac{v}{\tan v} = \lim\limits_{v\to 0_+}\frac{v}{\sin v}\cdot\cos v = 1\cdot\cos(0)$.

<u>ANM</u>: Att $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent inses genom att t.ex. visa (lätt!) att $0 < f(x) < \frac{1}{3x^3}$ för $x \geq 1$.

svar: $\boxed{\textbf{b)}\ a = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \sqrt{\varphi} \qquad \textbf{c)}\ \frac{\pi + 2\ln 2 - 4}{4}}$

uppg. 5

Kom ihåg: $\operatorname{arctanh}(u) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+u) - \ln(1-u)\right)$, $D_{\operatorname{arctanh}} =]-1, 1[$ och $D\operatorname{arctanh}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{1-u}\right) = \frac{1}{1-u^2}$. Vi skall studera funktionen
$f(x) = \operatorname{arctanh}(\sqrt{x} - 1) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln x - \ln(2 - \sqrt{x})\right)$:

a) $D_f = \{x : x \geq 0 \text{ och } -1 < \sqrt{x} - 1 < 1\} = \{x : x \geq 0 \text{ och } 0 < \sqrt{x} < 2\}$,
alltså är $D_f =]0, 4[$, $f(x) \to \begin{cases} -\infty & \text{då } x \to 0_+ \\ \infty & \text{då } x \to 4\text{-} \end{cases}$, f är C^∞ ty $\ln$ och $\sqrt{x} - 1$ är C^∞ på $]0, \infty[$, satsen om mellanliggande värden ger $V_f =]-\infty, \infty[$.

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2-\sqrt{x}+\sqrt{x}}{4x\left(2-\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2x\left(2-\sqrt{x}\right)} > 0$
[eller $f'(x) = \frac{1}{1-\left(\sqrt{x}-1\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$], det ger att f är strängt växande;
vidare är $f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{\left(2x-x^{\frac{3}{2}}\right)^2}\right) = \frac{3\left(\sqrt{x}-\frac{4}{3}\right)}{4\left(2x-x^{\frac{3}{2}}\right)^2} \begin{cases} < 0 \text{ då } x < \frac{16}{9} \\ > 0 \text{ då } x > \frac{16}{9} \end{cases}$, det ger att f är strängt konkav på $\left]0, \frac{16}{9}\right]$ och strängt konvex på $\left[\frac{16}{9}, 4\right[$ ($\frac{16}{9}$ är en inflexionspunkt), $f\left(\frac{16}{9}\right) = [\text{sätt in } \sqrt{x} = \frac{4}{3}] = \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{4}{3}}{2-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}\ln 2$.

b) $\int_0^4 f(x)\,dx$ är generaliserad i 0 och i 4, $f \leq 0$ på $]0,1]$ och $f \geq 0$ på $[1,4[$, man kan beräkna $\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^4 f(x)\,dx$, men det behövs inte.
Vi beräknar först en primitiv funktion till f på $]0,4[$:
<u>lösninga 1</u> (först part. int.):
$F(x) = \int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\right) - \int \frac{x}{2x\left(2-\sqrt{x}\right)}dx =$

$= \frac{x}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\right) - \int \frac{x}{2x\left(2-\sqrt{x}\right)}dx =$

$$\left[\begin{array}{c} \int \frac{1}{2\left(2-\sqrt{x}\right)}dx = \int \frac{\sqrt{x}-2+2}{2\left(2-\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{-1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{\left(2-\sqrt{x}\right)2\sqrt{x}}\right)dx = \\ = -\sqrt{x} - 2\ln\left(2-\sqrt{x}\right) \quad \text{(eller substituera } x = t^2\text{...)} \end{array}\right]$$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\ln x - x\ln\left(2-\sqrt{x}\right) + 2\sqrt{x} + 4\ln\left(2-\sqrt{x}\right)\right) + c,$
eller $F(x) = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}\ln x - \ln\left(2-\sqrt{x}\right)\right)dx =$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x\ln x - x) - \left(x\ln\left(2-\sqrt{x}\right) + \int \frac{x}{\left(2-\sqrt{x}\right)2\sqrt{x}}dx\right)\right) =$

$$\left[\begin{array}{c} \int \frac{x}{\left(2-\sqrt{x}\right)2\sqrt{x}}dx = \left[\begin{array}{c} \sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \end{array}\right] = \int \frac{t^2}{2-t}dt = \int \frac{t^2-4+4}{2-t}dt = \\ = \int\left(-2-t+\frac{4}{2-t}\right)dt = -2t - \frac{1}{2}t^2 - 4\ln(2-t) \end{array}\right]$$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x\ln x - x) - x\ln\left(2-\sqrt{x}\right) + 2\sqrt{x} + \frac{x}{2} + 4\ln\left(2-\sqrt{x}\right)\right) + c =$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\ln x + 2\sqrt{x} + (4-x)\ln\left(2-\sqrt{x}\right)\right) + c$, därmed är
$\int_0^4 f(x)\,dx = [F(x)]_0^4 = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 4-} F(x) - \lim_{x\to 0+} F(x)\right) =$
$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 4-}\left(\frac{1}{2}x\ln x + 2\sqrt{x} + (4-x)\ln\left(2-\sqrt{x}\right)\right) -$
$\quad -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{2}x\ln x + 2\sqrt{x} + (4-x)\ln\left(2-\sqrt{x}\right)\right) =$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\ln 2}{2} + 4 + 0\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 0 + 0 + 4\ln 2\right) = 2.$

<u>lösning 2</u> (först substitution):
$\int_0^4 \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{x}-1\right)dx = \left[\begin{array}{c} x = (1+t)^2 \\ dx = 2(1+t)\,dt \end{array}\right] = \int_{-1}^1 2(1+t)\operatorname{arctanh}(t)\,dt =$

$$\left[\begin{array}{l} \int 2(1+t)\operatorname{arctanh} t\,dt = [\text{part. int.}] \;= (1+t)^2 \operatorname{arctanh} t - \int \frac{(1+t)^2}{1-t^2}\,dt = \\ = (1+t)^2 \operatorname{arctanh} t + \int \frac{t^2-1+2t+2}{t^2-1}\,dt = (1+t)^2 \operatorname{arctanh} t + \int \left(1+\frac{2}{t-1}\right) dt = \\ = (1+t)^2 \operatorname{arctanh} t + t + 2\ln(1-t) + c \end{array}\right]$$

$= \left[\frac{1}{2}(1+t)^2(\ln(1+t)-\ln(1-t)) + t + 2\ln(|t-1|)\right]_{-1}^{1} =$

$= \lim\limits_{t\to 1\text{-}} \left(t + \frac{1}{2}(1+t)^2\ln(1+t) + \frac{1}{2}\left(4-(1+t)^2\right)\ln(1-t)\right) -$

$\quad - \lim\limits_{t\to -1_+} \left(t + \frac{1}{2}(1+t)^2\ln(1+t) + \frac{1}{2}\left(4-(1+t)^2\right)\ln(1-t)\right) =$

$\quad \left[4-(1+t)^2 = (2+1+t)(2-1-t) = (3+t)(1-t)\right]$

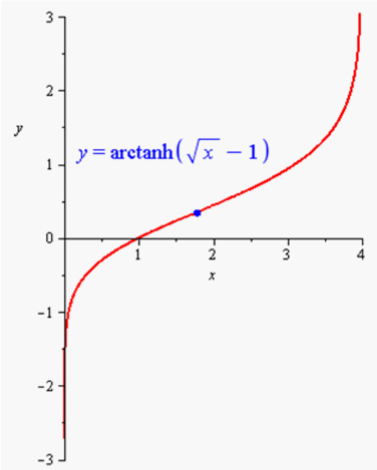
$= \lim\limits_{t\to 1\text{-}} \left(t + \frac{1}{2}(1+t)^2\ln(1+t) + \frac{1}{2}(3+t)(1-t)\ln(1-t)\right) -$

$\quad - \lim\limits_{t\to --1_+} \left(t + \frac{1}{2}(1+t)^2\ln(1+t) + \frac{1}{2}\left(4-(1+t)^2\right)\ln(1-t)\right) =$

$= 1 + \frac{4\ln 2}{2} - \frac{4}{2}\cdot 0 - \left(-1+0+\frac{1}{2}(4-0)\ln 2\right) = 2.$

Vi utnyttjade standardgränsvärdet $\lim\limits_{u\to 0_+} u\ln u = 0.$ **svar**:

a) $D_f =]0,4[$, $V_f = \mathbb{R}$, f är konkav på $\left]0, \frac{16}{9}\right]$, konvex på $\left[\frac{16}{9}, 4\right[$ **b)** 2



6: Omvändningen gäller ej, motex: $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $g(x) = \operatorname{sgn}(-x)$, $a = 0$
eller $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) = \frac{1}{1-x}$, $a = 1$ ...