Matematik CTH&GU

Tentamen i inledande matematisk analys F/TM (TMA970), 2010-10-23, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Rikard Lärkäng, tel. 0703 – 088304

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper!
Fyll i omslaget ordentligt!

===

1. Visa att för alla $N \in \mathbb{N}$ gäller $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(k+1)2^{k-1} = N2^N$. (4p)

2. Beräkna längden av kurvan $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \left(t+\sin(2t), \cos(2t), \sqrt{8}\cos t\right),\ -\pi \xrightarrow{t} \pi$. (4p)

3. Låt $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av asymptoter och konvexitet/konkavitet. (5p)

b) Visa att $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = a$ för $a \in [0,\infty[$ och beräkna $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$. (5p)

4. Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\left(\arccos(1-x)\right)^2}{x}$ (enbart standardgränsvärden får användas). (4p)

5. Låt $f(x) = \dfrac{2\sinh(x)}{\cosh(2x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av asymptoter och extremvärden. (6p)

b) Beräkna $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$. (5p)

6. Låt $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\sin(x)+\cos(x)\right)^2 + \cos^2(x)}}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Visa att $V_f = \left[\varphi, \frac{1}{\varphi}\right]$ där $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. (7p)

b) Beräkna $\displaystyle\pi\int_0^{\pi} \left(f(x)\right)^2 dx$ och tolka resultatet geometriskt. (6p)

7. Låt $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a en inre punkt i $D_f \cap D_g$ och $f \cdot g : \underset{x}{\mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\to} \underset{f(x)\cdot g(x)}{\mathbb{R}}$.

Bevisa eller motbevisa följande påståenden:

a) Om f och g är deriverbara i a så är $f \cdot g$ deriverbar i a. (5p)

b) Om f är deriverbar i a men g inte är deriverbar i a så är $f \cdot g$ inte deriverbar i a. (2p)

c) Om varken f eller g är deriverbar i a så är $f \cdot g$ inte deriverbar i a. (1p)

8. Formulera supremumaxiomet och visa med hjälp härav att om en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $D_f = [0,\infty[$ är växande och begränsad uppåt så existerar $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$. (6p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Tentamen inledande matematisk analys för F1 och TM (tma970), 10-10-23

uppg. 1

Vi visar med induktion att $\sum\limits_{k=1}^{N}(k+1)\,2^{k-1}=N2^N$ för alla $N\in\mathbb{N}$:

I. $N=1$: $VL=2{\cdot}1=HL$ stämmer.

II. Föruts.: $\sum\limits_{k=1}^{p}(k+1)\,2^{k-1}=p2^p$ gäller för $p\in\mathbb{N},1\le p\le m_0$ för något $m_0\in\mathbb{N}$.

Påst.: $\sum\limits_{k=1}^{m_0+1}(k+1)\,2^{k-1}=(m_0+1)\,2^{m_0+1}$

Bev.: $\sum\limits_{k=1}^{m_0+1}(k+1)\,2^{k-1}=\sum\limits_{k=1}^{m_0}(k+1)\,2^{k-1}+(m_0+2)\,2^{m_0}=$ [enligt föruts.]

$=m_0 2^{m_0}+(m_0+2)\,2^{m_0}=(2m_0+2)\,2^{m_0}=(m_0+1)\,2^{m_0+1}$ vsv

III. Induktionsaxiomet ger då att $\sum\limits_{k=1}^{N}(k+1)\,2^{k-1}=N2^N$ för alla $N\in\mathbb{N}$. vsv

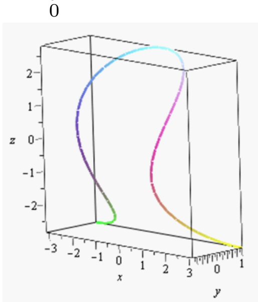
uppg. 2

Kurvan $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\left(t+\sin(2t),\cos(2t),\sqrt{8}\cos(t)\right),\ -\pi\xrightarrow{t}\pi\ \left(C^1!\right)$ har längden $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sqrt{(1+2\cos(2t))^2+(-2\sin(2t))^2+\left(-\sqrt{8}\sin t\right)^2}\,dt=$

$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+4\cos(2t)+4\cos^2(2t)+4\sin^2(2t)+8\sin^2 t}\,dt=$

$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+4\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)+4+8\sin^2 t}\,dt=2\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{5+4\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}\,dt=$

$=2\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{9}\,dt=6\pi.$ **svar**: $\boxed{6\pi}$



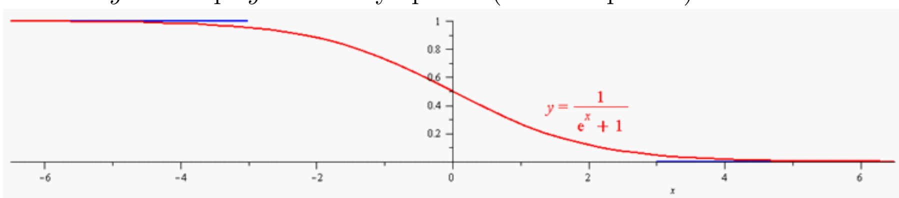
uppg. 3

a) $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$ är C^∞ och strängt avtagande på hela $\mathbb{R}$, $f'(x)=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}=$ $=-\frac{1}{2(\cosh x+1)}$, f' är strängt avtagande på $]-\infty,0]$ och strängt växande på $[0,\infty[$, ty f' är jämn och $\cosh x$ strängt växande på $[0,\infty[$, alltså är f strängt konkav på $]-\infty,0]$ och strängt konvex på $[0,\infty[$. Det fås även med f'':

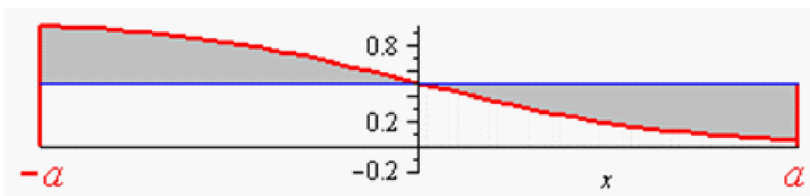
$f''(x) = \frac{\sinh x}{2(\cosh x+1)^2} \begin{cases} < 0 \text{ då } x < 0 \\ > 0 \text{ då } x > 0 \end{cases}$, eller $f''(x) = -\frac{e^x(e^x+1)^2 - 2e^x(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4} =$

$= \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3} \begin{cases} < 0 \text{ då } x < 0 \\ > 0 \text{ då } x > 0 \end{cases}$ (0 är inflexionspunkt).

Vidare är $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{0+1}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x+1} = 0$ (ty $e^x+1 \to \infty$ då $x \to \infty$), det visar att $y = 1$ resp. $y = 0$ är asymptoter (i $-\infty$ resp. i ∞).



b) Att $\int\limits_{-a}^{a} \frac{1}{e^x+1} dx =$ "arean under $y = f(x)$" $= 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2}$ kan man se direkt (rita!):



$g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ är udda $\left[g(-x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{2} = -g(x)\right]$, alltså har de skuggade områdena lika stor area $\left[\int\limits_{-a}^{a} \left(f(x) - \frac{1}{2}\right) dx = 0 \Rightarrow \int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int\limits_{-a}^{a} \frac{1}{2} dx = a\right]$.

Beräkning: $\int \frac{1}{e^x+1} dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx = x - \ln(e^x+1) + c = \ln \frac{e^x}{e^x+1} + c =$

$= -\ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) + c$. För $a \geq 0$ har vi alltså $\int\limits_{-a}^{a} \frac{1}{e^x+1} dx = [x - \ln(e^x+1)]_{-a}^{a} =$

$= 2a - \ln \frac{e^a+1}{e^{-a}+1} = 2a - \ln\left(e^a \frac{1+e^{-a}}{e^{-a}+1}\right) = 2a - \ln e^a = a$; vidare är

$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x+1} dx = \lim_{x\to\infty} \left(-\ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{e^0}\right) = 0 + \ln 2.$

Eller med substitutionen $e^x = t, dx = \frac{1}{t} dt$: $\int\limits_{-a}^{a} \frac{1}{e^x+1} dx = \int\limits_{e^{-a}}^{e^a} \frac{1}{(t+1)t} dt =$

$= \int\limits_{e^{-a}}^{e^a} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = [\ln t - \ln(t+1)]_{e^{-a}}^{e^a} = \ln \frac{e^a(e^{-a}+1)}{(e^a+1)e^{-a}} = \ln e^a = a$ och

$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x+1} dx = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{(t+1)t} dt = \left[\ln \frac{t}{t+1}\right]_1^{\infty} = \lim_{t\to\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{t+1}\right) - \ln \frac{1}{2} = 0 + \ln 2$. **svar**:

$\boxed{\textbf{a}) \text{ asymptoter: } y = 1 \text{ och } y = 0\text{; konkav på }]-\infty, 0]\text{, konvex på } [0, \infty[\quad \textbf{b}) \ln 2}$

uppg. 4

$\lim_{x\to0+} \frac{(\arccos(1-x))^2}{x} = \lim_{\arccos(1-x)=t\to0+} \frac{t^2}{1-\cos t} = \lim_{t\to0+} \frac{t^2(1+\cos t)}{\sin^2 t} = 1 \cdot 2$ ty

$\lim\limits_{v\to 0}\frac{\sin v}{v}=1$ (standard). **Eller** (rita en rätvinklig triangel med vinkeln $\alpha=\arccos(1-x)$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, närkateden $1-x$ och hypotenusan 1):

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(\arccos(1-x))^2}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\arcsin\sqrt{2x-x^2}\right)^2}{x}=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\arcsin\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2\cdot\frac{2x-x^2}{x}=1\cdot 2$$

ty $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{\arcsin t}{t}=\lim\limits_{v=\arcsin t\to 0+}\frac{v}{\sin v}=1.$ **svar**: $\boxed{2}$

uppg. 5

$$f(x)=\frac{2\sinh x}{\cosh(2x)}=\frac{2\sinh x}{2\sinh^2 x+1}\left(\sinh^2(x)=\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}=\frac{1}{2}(\cosh(2x)-1)\right)$$

är C^∞ på hela $\mathbb{R}$ och udda, vi studerar alltså f bara på $[0,\infty[$:

a) $f(x)=2\frac{e^x-e^{-x}}{e^{2x}+e^{-2x}}=2\frac{e^{-x}-e^{-3x}}{1+e^{-2x}}\to 0$ då $x\to\infty$, dvs. $x-$axeln är asymptot.

$$f'(x)=2\frac{\cosh(x)\cosh(2x)-2\sinh(x)\sinh(2x)}{(\cosh(2x))^2}=\frac{2\cosh x\left(2\sinh^2(x)+1-4\sinh^2 x\right)}{\cosh^2(2x)}=$$

$$=\frac{4\cosh x}{\cosh^2 x}\left(\frac{1}{2}-\sinh^2 x\right)\begin{cases}>0 \text{ då } \sinh x<\frac{1}{\sqrt{2}}\\ <0 \text{ då } \sinh x>\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\text{, det visar att } f \text{ antar i}$$

$x_0=\operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ett strängt maximum $f(x_0)=\frac{2\sinh(x_0)}{2\sinh^2(x_0)+1}=\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left[x_0=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}+1}\right)=\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\right.$ men det behövs ej$\left.\right]$.

Eller $f'(x)=2\frac{\cosh(x)\cosh(2x)-2\sinh(x)\sinh(2x)}{(\cosh(2x))^2}=\frac{2\cosh x\left(\cosh^2 x+\sinh^2 x-4\sinh^2 x\right)}{\cosh^2(2x)}=$

$$=\frac{6\cosh^3 x\left(\frac{1}{3}-\tanh^2 x\right)}{\cosh^2(2x)}\begin{cases}>0 \text{ då } \tanh x<\frac{1}{\sqrt{3}}\\ <0 \text{ då } \tanh x>\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}\text{, det visar att } f \text{ antar i}$$

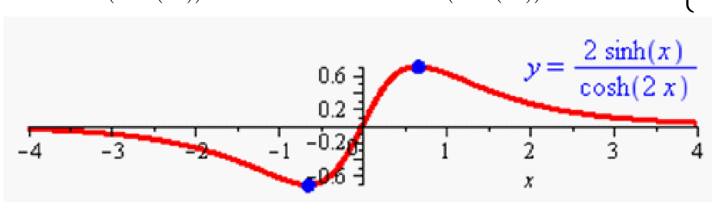
$x_1=\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ett strängt maximum $f(x_1)=\frac{2\sinh(x_1)}{\sinh^2(x_1)+\cosh^2(x_1)}=$

$$=\frac{2\tanh(x_1)\sqrt{1-\tanh^2(x_1)}}{1+\tanh^2(x_1)}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left[x_1=\ln\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}}\right)=\ln\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}\right)=\ln\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)=\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)=x_0\right].$$

Jobbigare är det med e^x: $f'(x)=\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)-2\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)}{2(\cosh(2x))^2}=$

$$=\frac{-\left(e^{6x}-3e^{4x}-3e^{2x}+1\right)}{2e^{3x}(\cosh(2x))^2}=\frac{-\left(e^{2x}+1\right)\left(e^{2x}-(2-\sqrt{3})\right)\left(e^{2x}-(2+\sqrt{3})\right)}{2e^{3x}(\cosh(2x))^2}\begin{cases}>0 \text{ då } x<x_0\\ <0 \text{ då } x>x_0\end{cases}.$$



b) $\int f(x)\,dx=\int\frac{2\sinh x}{2\sinh^2 x+1}dx=\int\frac{2\sinh x}{2\cosh^2 x-1}dx=\int\frac{\sinh x}{\left(\cosh x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cosh x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}dx=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{\cosh x-\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{\cosh x+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\sinh(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left(\cosh x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\ln\left(\cosh x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)+c\text{, alltså}$$

$\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cosh x-1}{\sqrt{2}\cosh x+1}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right)$

ty $\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cosh x-1}{\sqrt{2}\cosh x+1}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}-\frac{1}{\cosh x}}{\sqrt{2}+\frac{1}{\cosh x}}\right) \to \ln\frac{\sqrt{2}-0}{\sqrt{2}+0}$ då $x\to\infty$.

Anm: en annan (dock jobbigare) lösning fås med substitution: $\int\limits_0^\infty \frac{2\sinh x}{\cosh(2x)}dx =$

$= \int\limits_0^\infty \frac{2\left(e^x-e^{-x}\right)}{e^{2x}+e^{-2x}}dx = \int\limits_0^\infty \frac{2\left(e^{2x}-1\right)}{e^{4x}+1}e^x dx = \left[\begin{array}{c} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array}\right] = \int\limits_1^\infty \frac{2\left(t^2-1\right)}{t^4+1}dt =$

$\left[\frac{2\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)\left(t^2-\sqrt{2}t-1\right)} = \frac{\sqrt{2}t-1}{t^2-\sqrt{2}t-1} - \frac{\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t-1}\right] = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right]_1^\infty =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$ **svar**:

a) minsta värdet är $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, största värdet är $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=0$ är asymptot **b**) $\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

uppg. 6

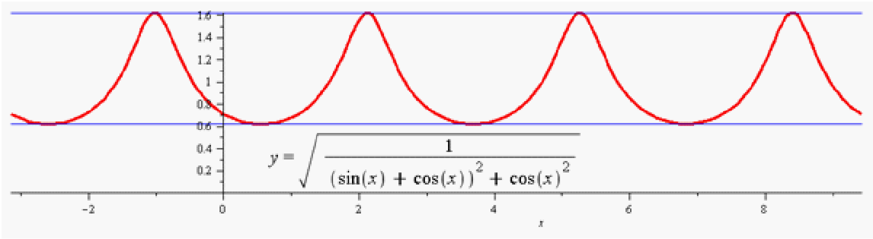
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2+\cos^2 x}}$ har period π och är deriverbar på hela $\mathbb{R}$ ty f är sammansatt av deriverbara funktioner och $(\sin x+\cos x)^2+\cos^2 x =$
$= 1 + 2\sin x\cos x + \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2}\left(3+2\sin(2x)+\cos(2x)\right) > 0.$

a) f är kontinuerlig, antar alltså på det slutna, begränsade intervallet $[0, 2\pi]$ (t. ex.) ett minsta värde m och ett största värde M och enligt satsen om mellanliggande värden alla värden mellan m och M, dvs. $V_f = [m, M]$.
Det minsta resp. största värde som nämnaren $\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+2\sin(2x)+\cos(2x)\right)} =$
$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\cos(2x+\beta)\right)}$ antar är $\sqrt{\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}$ resp. $\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}$, alltså är $m = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}}$ och $M = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}}$. Det kan man även räkna fram så här:

Eftersom f är deriverbar så är extrempunkterna stationära:
$f'(x) = -\frac{2(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)-2\cos x\sin x}{2\left((\sin x+\cos x)^2+\cos^2 x\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos x\sin x-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}{\left((\sin x+\cos x)^2+\cos^2 x\right)^{\frac{3}{2}}} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin(2x) - 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \tan(2x) = 2$ (ty $\cos(2x)=0$ ej lösning!), alltså $2x = \alpha + k\pi$ där $\alpha = \arctan 2$, och då är $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$
[Eller $2\cos(2x) - \sin(2x) = \sqrt{5}\cos(2x+\gamma)$ där $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$,
och $\cos(2x+\gamma) = 0$ för $2x = \pm\frac{\pi}{2} - \gamma + 2k\pi = \alpha + k\pi$].

Extremvärdena finns alltså bland
$f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(3+2\sin(\alpha)+\cos(\alpha))}} = \sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{4}{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi$ och

$f\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(3-2\sin(\alpha)-\cos(\alpha))}} = \sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{4}} = \sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{4}} =$
$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\varphi} = \phi$, alltså $m = \varphi$, $M = \phi$ och $V_f = [\varphi, \phi]$. vsv



b) $V = \pi \int\limits_0^{\pi} f^2(x)\,dx$ är volymen av den rotationskropp som uppkommer då området $\{(x,y) : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le f(x)\}$ roterar kring x-axeln.
Vi bestämmer en primitiv funktion till f^2:
$F(x) = \int f^2(x)\,dx = \int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2+\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x+2\sin x\cos x}dx =$
$= \int \frac{1}{(\tan^2 x+2+2\tan x)\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\left((1+\tan x)^2+1\right)\cos^2 x}dx = \arctan(1+\tan x)+c.$

Då är [obs: generaliserad i $\frac{\pi}{2}$!] $V = \pi \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^2(x)\,dx \right) =$

$= \pi \left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \arctan(1+\tan x) - \arctan 1 + \arctan 1 - \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \arctan(1+\tan x) \right) =$
$= \pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = \pi^2.$

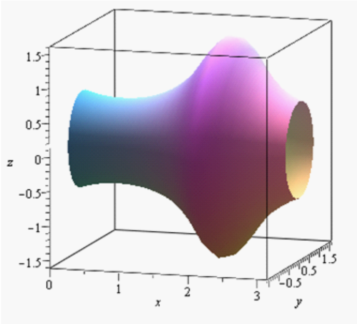
Anm: en primitiv funktion F till f^2 på t.ex. $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ är t. ex.

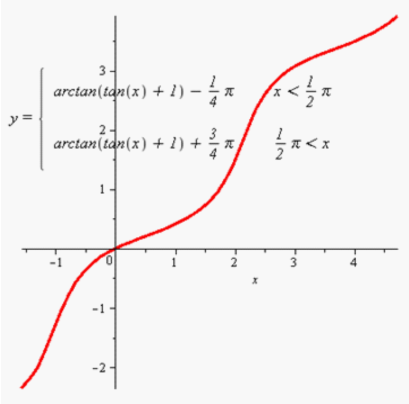
$F(x) = \begin{cases} \arctan(\tan x+1) - \frac{\pi}{4} & \text{då } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4} & \text{då } x = \frac{\pi}{2} \\ \arctan(\tan x+1) + \frac{3\pi}{4} & \text{då } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ ty

$F(x) = \begin{cases} \arctan(\tan x+1) + c_1 & \text{då } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \arctan(\tan x+1) + c_2 & \text{då } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, F skall vara kontinuerlig

på $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ alltså måste $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} F(x) = \frac{\pi}{2} + c_1 = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} F(x) = -\frac{\pi}{2} + c_2$, dvs.
$c_2 = \pi + c_1$; om vi t. ex. väljer $F(0) = 0 = \frac{\pi}{4} + c_1$ så är $c_1 = -\frac{\pi}{4}$. **svar**:

b) $\pi^2 =$ volymen av den kropp som alstras då området $\{(x,y) : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le f(x)\}$ roterar kring x-axeln





uppg. 7

a) Visa $(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$.

b) falskt: $a = 0$: $f(x) = x$ är deriverbar i 0, $g(x) = |x|$ är inte deriverbar i 0, men $f{\cdot}g$ är deriverbar i 0 ($f{\cdot}g$ är C^1 men ej 2 gånger deriverbar!):
$f(x)\,g(x) = x\,|x|$ är deriverbar i 0 ty $\frac{x|x|-0}{x-0} = |x| \underset{x\to 0}{\to} 0$.

c) falskt: $a = 0$: $f(x) = g(x) = |x|$ är inte deriverbar i 0, men $f{\cdot}g$ är deriverbar i 0 $\left(f(x)\,g(x) = x^2 \text{ är } C^\infty\right)$.

ANM: Gränsvärdesreglerna är ej omvändbara, t. ex.:

Om $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ och $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ (båda) existerar så existerar även $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x))$, men ej omvänt!

Ex: $f(x) = \ln(|1-x|)$, $g(x) = \ln\left(\frac{ex}{|1-x|}\right)$:
både $f(x)$ och $g(x)$ saknar gränsvärde då $x \to 1$, men
$\lim\limits_{x\to 1} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to 1} \ln(ex) = 1$!