Tentamen i inledande matematisk analys F/TM (TMA970), 2010-08-23, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Aron Lagerberg, tel. 0703 – 088304

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

==

1. Beräkna $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ där $m,n\in\mathbb{N}$. (4p)

2. Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\cosh x}\right)^{\sinh x}$ och $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\sinh x)^{\frac{1}{\cosh x}}$. (6p)

3. Beräkna längden av kurvan $C: y=\ln\sqrt{1+\tan^2(x)},\ |x|\le\frac{\pi}{3}$. (6p)

4. Rita kurvan $C: y=x+2\sqrt{1-x^2},\ -1\le x\le 1$ med angivande av extrempunkter och beräkna arean av området mellan C och linjen $y=x$. (8p)

5. Låt $f(x)=\sin\left(2\arctan\left(e^x\right)\right),\ x\in\mathbb{R}$.

d) Visa att $f(x)=\frac{2e^x}{1+e^{2x}}$ och rita kurvan $y=f(x)$ med angivande av extrempunkter, asymptoter och konvexitet/konkavitet. (7p)

e) Beräkna $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$. (4p)

6. a) Låt $f(0)=1$ och $f(x)=\frac{\sinh x}{\arctan x}$ för $0\ne x\in\mathbb{R}$.
Hur många lösningar har ekvationen $f(x)=A\ (A\in\mathbb{R})$? (6p)

b) Är $\int\limits_0^\infty \frac{\sinh(\sin(x))}{\sqrt{1+x^3}\arctan(\sin(x))}dx$ konvergent eller divergent? Motivera väl! (6p)

7. Motivera varför $\sin x<x<\tan x$ för $0<x<\frac{\pi}{2}$ och visa därmed att $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. (5p)

8. Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (Lagranges sats). (8p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB