Matematik CTH&GU

**Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2008-01-15, kl. 8.30-12.30 i V**

**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa,
**Telefon:** Micke Persson, tel. 0762 – 721860
**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==========================================================

**1.** **a)** Visa med induktion att $(1+x)^n > 1+nx$ för alla $2 \le n \in \mathbb{N}$, $0 \ne x \in [-1,\infty[$. (5p)

**b)** Beräkna $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1 - nx}{x^2}$ $(2 \le n \in \mathbb{N})$ genom att använda binomialteoremet. (4p)

**2.** Låt $f(x) = |\sin x| e^{\cos x}$.

**a)** Är $f$ deriverbar i origo? (3p)

**b)** Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter och inflexionspunkter. (6p)

**c)** Beräkna arean av området $\{(x,y): 0 \le x \le 2\pi, 0 \le y \le f(x)\}$. (4p)

**3.** Beräkna längden av kurvan $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \big(2t - \sin(2t), 4\sin(t), \cos(2t)\big), 0 \xrightarrow{t} 2\pi$. (6p)

**4.** Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då området

$\left\{(x,y): \ln(2) \le x,\ 0 \le y \le \dfrac{1}{\sqrt{\sinh x}}\right\}$ roterar ett varv kring $x$-axeln. (7p)

**5.** Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+3x+2}\right) + \dfrac{3x+4}{x^2+3x+2}$ på $]0,\infty[$ (6p)

och avgör om $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ är konvergent eller divergent (4p). (10p)

**6.** Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $]a,b[ \subseteq D_f$ $(a,b \in \mathbb{R}, a < b)$.

**a)** Visa att om $f$ är strängt avtagande på $]a,b[$ så är $f$ injektiv på $]a,b[$. (2p)

**b)** Visa att om $f$ är deriverbar på $]a,b[$ och $f'(x) < 0$ för varje $x \in ]a,b[$ så är $f$ strängt avtagande på $]a,b[$. Gäller omvändningen? (6p)

**7.** Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats för två funktioner. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

# Tentamen inledande matematisk analys för F1 (tma970), 08-01-15

## uppg. 1

**a)** Påstående: För alla $2 \leq n \in \mathbb{N}$ gäller $P(n) : (1+x)^n > 1 + nx$
("*Bernoulli*s olikhet"; $-1 \leq x \neq 0$ ett reellt tal; för $x = 0$ gäller likhet).

Bevis med induktion:

I. för $n = 2$ gäller: $VL = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \underset{x \neq 0}{>} 1 + 2x = HL$,

$P(2)$ är alltså sant.

II. Föruts.: $(1+x)^m > 1 + mx$ är sant för alla $m \in \mathbb{N}$, $2 \leq m \leq p_0$,
för något $2 \leq p_0 \in \mathbb{N}$.

Påst.: $(1+x)^{p_0+1} > 1 + (p_0+1)x$ är sant (dvs. $P(p_0) \implies P(p_0+1)$).

Bevis: $VL = (1+x)^{p_0+1} = (1+x)^{p_0}(1+x) \underset{\text{föruts.}}{>} (1+p_0x)(1+x) =$

$= 1 + p_0x + x + p_0x^2 \underset{p_0x^2>0}{>} 1 + 1 + (p_0+1)x = HL.$ vsv

III. Induktionsaximet ger då att $P(n)$ är sant för alla $2 \leq n \in \mathbb{N}$. vsv

**b)** $(1+x)^n - 1 - nx \underset{\text{binomialteoremet}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k - 1 - nx = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k$,

alltså är $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x^2} = \lim_{x \to 0} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{k-2} = \binom{n}{2} + 0.$

$\boxed{\textbf{svar: b) } \frac{n(n-1)}{2}}$

## uppg. 2

**a)** $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \frac{-\sin x}{x} e^{\cos x} & \text{då } x < 0 \\ \frac{\sin x}{x} e^{\cos x} & \text{då } x > 0 \end{cases}$, alltså (ty $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} e^{\cos x} = 1 \cdot e^1$)

$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -e \neq e = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$, dvs. $f$ är inte deriverbar i origo
( $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ saknar gränsvärde då $x$ går mot 0).

**b)** $f$ har period $2\pi$ och är jämn, det räcker alltså att studera $f$ på $[0, \pi]$:
för $0 < x < \pi$ är $f'(x) = \left(\cos x - \sin^2 x\right) e^{\cos x} = \left(\cos^2 x + \cos x - 1\right) e^{\cos x} =$

$$= \left(\left(\cos x + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{5}{4}\right) e^{\cos x} = \left(\cos x + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \underbrace{\left(\cos x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) e^{\cos x}}_{>0},$$

det ger med $\alpha_0 = \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$: $f'(x) \begin{cases} > 0 \text{ då } 0 < x < \alpha_0 \\ < 0 \text{ då } \alpha_0 < x < \pi \end{cases}$,

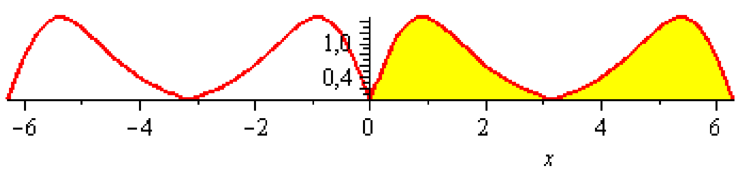
$f$ antar alltså i $\alpha_0$ et strängt lokalt maximum ($f(\alpha_0) = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5} - 1}e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$)
och i 0 och i $\pi$ ett strängt lokalt minimum ($f(0) = f(\pi) = 0$).

$$f''(x) = \left(-2\sin x\cos x - \sin x - \sin x\cos^2 x - \sin x\cos x + \sin x\right)e^{\cos x} =$$

$$= \underbrace{-\sin x\cos x}_{-\frac{1}{2}\sin 2x}\underbrace{(3+\cos x)\,e^{\cos x}}_{>0}\begin{cases} <0 & \text{då } 0<x<\frac{\pi}{2} \\ >0 & \text{då } \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}, \text{ det ger att } f \text{ är}$$

konkav på $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ och konvex på $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, $\frac{\pi}{2}$ är alltså inflexionspunkt.
Eftersom $f$ är jämn så har $f$ ett strängt lok. maximum även i $-\alpha_0$ och är konvex på $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ och konkav på $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.

ANM: $f$ är konvex på $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ men inte konkav på $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$!




**c)** Arean av den skuggade mängden är $\underline{A} = \int_0^{2\pi} |\sin x|\, e^{\cos x} dx =$

$$= \int_0^{\pi} \sin x e^{\cos x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\, e^{\cos x} dx = \left[-e^{\cos x}\right]_0^{\pi} + \left[e^{\cos x}\right]_{\pi}^{2\pi} = \underline{2\left(e - e^{-1}\right)}.$$

$\underline{\text{ANM}}$: eftersom $f$ är symmetrisk kring $x=\pi$ (eller med $\int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\, e^{\cos x} dx =$

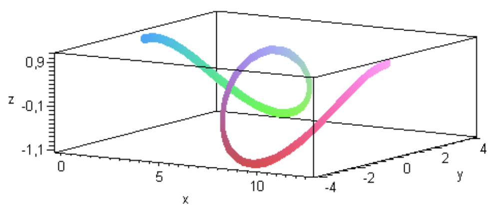
$[x = u + 2\pi] = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin u|\, e^{\cos u} du$) så är $A = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\, e^{\cos x} dx = 2\int_0^{\pi} \sin x e^{\cos x} dx$.

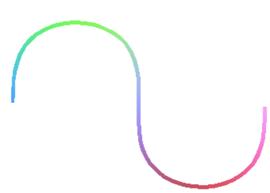
**svar:**

$\boxed{\textbf{a)}\ \text{nej}\ \ \textbf{b)}\ \text{min. i } k\pi,\ \text{max. i } \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} + k\pi,\ \text{infl.pkt. i } \frac{\pi}{2} + k\pi\ \ \textbf{c)}\ 4\sinh 1}$

## uppg. 3

$\boldsymbol{r}(t) = (2t - \sin(2t), 4\sin t, \cos(2t)) \implies$
$|\boldsymbol{r}'(t)| = |(2 - 2\cos(2t), 4\cos t, -2\sin(2t))| =$
$= \sqrt{4 + 4\cos^2(2t) - 8\cos(2t) + 16\cos^2(t) + 4\sin^2(2t)} =$
$= \sqrt{8 - 8\cos(2t) + 16\cos^2(t)} = 4\sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 4$, kurvans längd är
alltså $L = \int_0^{2\pi} |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = 4\int_0^{2\pi} dt = 8\pi$.
Kurvan (och dess projektion på $xy$-planet) ser ut så:

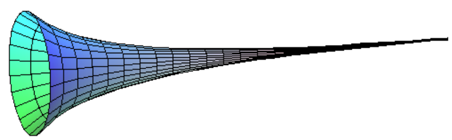


$\boxed{\textbf{svar}: 8\pi}$

## uppg. 4

Volymen av rotationskroppen är $\int\limits_{\ln 2}^{\infty} \pi \left(\frac{1}{\sqrt{\sinh x}}\right)^2 dx = \pi \int\limits_{\ln 2}^{\infty} \frac{2e^x}{e^{2x}-1} dx = [\text{pbud}] =$
$= \pi \int\limits_{\ln 2}^{\infty} e^x \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{e^x+1}\right) dx = \pi \left[\ln \frac{e^x-1}{e^x+1}\right]_{\ln 2}^{\infty} = \pi \left(\lim\limits_{x\to\infty} \ln \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} - \ln \frac{2-1}{2+1}\right) =$
$= \underline{\pi\left(0 - \ln \frac{1}{3}\right)}$.



$\boxed{\textbf{svar} : \boldsymbol{\pi \ln 3}}$

## uppg. 5

$f(x) = \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} + \frac{3x+4}{x^2+3x+2}$. Börja med $\int \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} dx = [\text{integrera partiellt}] =$
$= x \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} - \int x \frac{x^2+3x+2}{x^2} \cdot \frac{2x\left(x^2+3x+2\right) - x^2(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} dx =$
$= x \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} - \int \frac{2x^2+6x+4-2x^2-3x}{x^2+3x+2} dx = x \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} - \int \frac{3x+4}{x^2+3x+2} dx$, alltså
$F(x) = \int f(x)\, dx = \int \left(\ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} + \frac{3x+4}{x^2+3x+2}\right) dx = x \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} + c.$

Ev. blir räkningarna enklare med $\ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} = \ln x^2 - \ln((x+1)(x+2)) =$
$[x > 0] = 2\ln x - \ln(x+1) - \ln(x+2)$; $F$ kan därmed även beräknas så här:
$\underline{F(x)} = \int (2\ln x - \ln(x+1) - \ln(x+2))\, dx + \int \frac{3x+4}{x^2+3x+2} dx = [\text{p.i., pbud}] =$
$2(x \ln -x) - ((x+1)\ln(x+1) - x + (x+2)\ln(x+2) - x) + \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}\right) dx =$
$= 2x \ln x - (x+1)\ln(x+1) - (x+2)\ln(x+2) + \ln(x+1) + \ln(x+2) + c =$
$= \underline{x \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} + c}$ s.o..

Då har vi $\underline{\int\limits_0^{\infty} f(x)\, dx} = \int\limits_0^1 f(x)\, dx + \int\limits_1^{\infty} f(x)\, dx =$
$F(1) - \lim\limits_{x\to 0+} F(x) + \lim\limits_{x\to\infty} F(x) - F(1) = \lim\limits_{x\to\infty} x \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} - \lim\limits_{x\to 0+} x \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} =$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(x \frac{-\ln\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right) - \lim\limits_{x\to 0+} (2x\ln x - x\ln(x+1) - x\ln(x+2)) =$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(-\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} \left(3 + \frac{2}{x}\right)\right) - (2\cdot 0 - 0 - 0) = -1\cdot(3+0) - 0 = \underline{-3}$,
ty $\lim\limits_{x\to 0+} (x \ln x) = 0$ och $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$
($h = \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \to 0$ då $x \to \infty$). $\int\limits_0^{\infty} f(x)\, dx$ är alltså konvergent (med värdet $-3$).

$\boxed{\textbf{svar:}\ \text{En primitiv funktion är } x \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2},\ \int\limits_0^{\infty} f(x)\, dx \ \text{ är konvergent}}$