Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2007-01-16, kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,
Telefon: Kataryna Iyschenko, tel. 0762 – 721860
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Beräkna gränsvärdena

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sqrt{1+5x} - \sqrt{1+3x}}$ **b)** $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ (enbart standardgränsvärden får användas). (8p)

2. Beräkna $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$. (5p)

3. Låt $f(x) = 1 + x^2 - 2x - 2e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Visa att f är injektiv och beräkna $Df^{-1}\left(-\frac{2}{e}\right)$. (6p)

d) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av konvexitet/konkavitet. (4p)

4. Avgör om $\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx$ är konvergent eller divergent genom att

c) bestämma en primitiv funktion till $\frac{\pi}{2} - \arctan x$ (6p)

d) visa att $\frac{\pi}{2} - \arctan x > \frac{x}{1+x^2}$ för $x \geq 0$. (6p)

5. Beräkna arean av $\left\{(x, y) : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq \frac{\sin 2x}{\cos^2 x - 5\sin x - 7}\right\}$. (6p)

6. Bestäm infimum och supremum av $M = \left\{\frac{\cosh x}{(\cosh x)^2 + 1} : x \in \mathbb{R}\right\}$. (6p)

7. Låt $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Visa att om f och g har ett gränsvärde då x går mot a så har även $f + g$ ett gränsvärde då x går mot a. (6p)

8. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara deriverbar på $]a, b[$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Visa att om $f'(x) > 0$ för varje $x \in]a, b[$ så är f strängt växande på $]a, b[$.
Gäller omvändningen? (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Tentamen inledande matematisk analys för F1 (tma970), 07-01-16

uppg. 1

a) $f(x) = \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1+3x}} = \frac{(\sin 5x - \sin 3x)\left(\sqrt{1+5x}+\sqrt{1+3x}\right)}{2x} =$

$= \frac{\left(\sqrt{1+5x}+\sqrt{1+3x}\right)}{2}\left(\frac{5\sin 5x}{5x} - \frac{3\sin 3x}{3x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}{2}(5-3) = 2$

ty $\sqrt{x}$ är kontinuerlig och $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$. Eller $f(x) = \frac{2\cos 4x \sin x\left(\sqrt{1+5x}+\sqrt{1+3x}\right)}{2x}$...

b) $\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = \frac{1}{e^{x\ln(\ln x)-(\ln x)^2}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ty $x\ln(\ln x) - (\ln x)^2 =$

$= x\ln(\ln x)\left(1 - \frac{1}{\ln(\ln x)}\frac{(\ln x)^2}{x}\right) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ ty $1 - \frac{1}{\ln(\ln x)}\frac{(\ln x)^2}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1-0$

ty $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$.

svar: a) 2 **b)** 0

uppg. 2

Sätt $\alpha = \arctan 2$, $\beta = \arctan 5$ och $\gamma = \arctan 8$; då är $\tan\alpha = 2$, $\tan\beta = 5$, $\tan\gamma = 8$ och vi får $\tan(\beta+\gamma) = \frac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma} = \frac{5+8}{1-5\cdot 8} = -\frac{1}{3}$, alltså

$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan\alpha+\tan(\beta+\gamma)}{1-\tan\alpha\tan(\beta+\gamma)} = \frac{2-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}} = 1$, det ger $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{4}+n\pi$ för något $n\in\mathbb{Z}$; eftersom arctan är strängt växande så gäller

$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} < \alpha < \beta < \gamma < \frac{\pi}{2}$, alltså $\frac{3\pi}{4} < \alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{4}+n\pi < \frac{3\pi}{2}$

vilket ger $n = 1$.

svar: $\frac{5\pi}{4}$

uppg. 3

$f(x) = (x-1)^2 - 2e^{-x}$, $f'(x) = 2(x-1+e^{-x})$,

$f''(x) = 2(1-e^{-x})\begin{cases} <0 & \text{då } x<0 \\ >0 & \text{då } x>0 \end{cases}$, dvs. f' är strängt avtagande (f är strängt konkav) i $]-\infty,0]$, f'är strängt växande (f är strängt konvex) i $[0,\infty[$, alltså har f' ett strängt minimum i 0 (0 är inflexionspunkt), dvs.

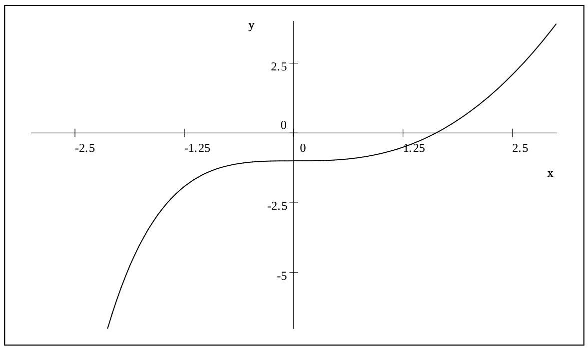
$f'(x) > f'(0) = 0$ för alla $x \neq 0$. Det ger nu:

a) Eftersom f är kontinuerlig så är f strängt växande på $]-\infty,0]$ och på $[0,\infty[$ och därmed injektiv på hela $\boldsymbol{R}$.

$Df^{-1}\left(-\frac{2}{e}\right) = \frac{1}{Df(a)}$ där $f(a) = (a-1)^2 - 2e^{-a} = -\frac{2}{e}$, vi "ser" $a = 1$,

alltså är $Df^{-1}\left(-\frac{2}{e}\right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2e^{-1}}$.

b) $f(x) = (x-1)^2 - 2e^{-x} \longrightarrow \infty$ då $x \to \infty$ och
$f(x) = -e^{-x}\left(2 - e^{x}(x-1)^2\right) \longrightarrow -\infty$ då $x \to -\infty$ (ty $e^{x}(x-1)^2 \longrightarrow 0$ då $x \to -\infty$). Vidare saknar $\frac{f(x)}{x}$ gränsvärde då $x \to \pm\infty$, alltså saknas sneda asymptoter.



svar: $f^{-1}\left(-\frac{2}{e}\right) = \frac{e}{2}$ **b)** f str. konkav i $]-\infty, 0]$, str. konvex i $[0, \infty[$

uppg. 4

a) $\int \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx =$[p.i]$= \frac{\pi}{2}x - x\arctan x + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$
$= \frac{\pi}{2}x - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c$, en primitiv funktion är alltså
$\underline{F(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)}$.
$F(x) \longrightarrow \infty$ då $x \to \infty$, ty $\frac{\pi}{2} - \arctan x > 0$ och $\ln\left(1+x^2\right) \longrightarrow \infty$ då $x \to \infty$, dvs. $\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx$ är <u>divergent</u>.

b) Visa att $g(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{x}{1+x^2} > 0$ för $x \geq 0$:
$g'(x) = -\frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{2}{(1+x^2)^2} < 0$, g är alltså strängt avtagande och därmed $g(x) > \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0 = 0$. vsv

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^\infty$$ är divergent, jämförelsekriteriet ger att då även $\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx$ är <u>divergent</u> ty $\frac{\pi}{2} - \arctan x > \frac{x}{1+x^2} > 0$.

svar: $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx$ är divergent

uppg. 5

$\frac{\sin 2x}{\cos^2 x - 5\sin x - 7} \geq 0$ för $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$, ty $\sin 2x \leq 0$ och $\cos^2 x - 5\sin x - 7 \leq 0$ $(7 > \left|\cos^2 x\right| + 5\left|\sin x\right|)$, alltså är arean

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x - 5\sin x - 7} dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x \cos x}{-\sin^2 x - 5\sin x - 6} dt = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{bmatrix} =$$

$$= 2\int_{-1}^{0} \frac{-t}{t^2+5t+6} dt = [\text{pbu}] = 2\int_{-1}^{0} \left(\frac{2}{t+2} - \frac{3}{t+3}\right) dt = 2\left[2\ln(t+2) - 3\ln(t+3)\right]_{-1}^{0} =$$

$$= 2(2\ln 2 - 3\ln 3 + 3\ln 2) = 2(5\ln 2 - 3\ln 3) = \underline{2\ln\frac{32}{27}}.$$

$$\boxed{\textbf{svar}\text{: } 2\ln\frac{32}{27}}$$

uppg. 6

Sätt $f(x) = \frac{\cosh x}{\cosh^2 x + 1}$, då är $M = V_f$. f är jämn, det räcker alltså att studera f för $x \geq 0$:

$f'(x) = \frac{\sinh x\left(\cosh^2 x + 1\right) - 2\cosh^2 x \sinh x}{(\cosh^2 x + 1)^2} = \frac{\sinh x\left(1 - \cosh^2 x\right)}{(\cosh^2 x + 1)^2} < 0$ för $x > 0$,

f är således strängt avtagande på $[0, \infty[$ och strängt växande på $]-\infty, 0]$, antar alltså i 0 ett strängt maximum och vi har

$\underline{\sup M} = f(0) = \underline{\frac{1}{2}}$ ($= f$:s största värde) och

$\underline{\inf M} = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2\left(e^x + e^{-x}\right)}{e^{2x} + e^{-2x} + 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\left(e^{-x} + e^{-3x}\right)}{1 + e^{-4x} + 6e^{-2x}} = \underline{0}$

(sats: f avtagande och begränsad nedåt på $[0, \infty[\implies \inf V_f = \lim_{x\to\infty} f(x)$).

Eller: s.o.m.v. ger att $\underline{V_f = \left]0, \frac{1}{2}\right]}$, alltså $\inf M = \inf\left]0, \frac{1}{2}\right] = 0$

och $\sup M = \sup\left]0, \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\textbf{svar}\text{: } \inf M = 0, \ \sup M = \frac{1}{2}}$$