Matematik CTH&GU

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2006-08-21, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Jonas Hartwig, tel. 0762 – 721860

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Avgör om följande integraler konvergerar eller divergerar. Motiver väl!

a) $\int_1^3 \frac{1}{|x-2|}\,dx$ **b)** $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx$ **c)** $\int_1^3 \ln|x-2|\,dx$. (8p)

2. Visa att $\arctan\frac{2x}{5} + \arctan\frac{2x}{x^2+1} = \arctan\frac{2x(x^2+6)}{x^2+5}$ för alla $x \in \mathbb{R}$. (6p)

3. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av

$D_f = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(0) = 0$ och $f(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x}$ för $0 \neq x \in D_f$.

a) Visa att f är C^1 (dvs. f är deriverbar och f' är kontinuerlig). (8p)

b) Visa att f är injektiv och beräkna $Df^{-1}(0)$. (8p)

4. Låt $f(x) = \frac{\cosh x}{e^x \cosh 2x}$.

a) Rita funktionskurvan $y = f(x)$ med angivande av asymptoter och extrempunkter. (7p)

b) Motivera varför integralen $\int_0^\infty f(x)\,dx$ är konvergent (2p) och beräkna den (6p). (8p)

5. Låt $a \in \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ och $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Vad menas med "a är inre punkt i D" och vad är "supremum av D"? (3p)

b) Visa att om f är deriverbar i a så är f även kontinuerlig i a. (4p)

6. Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (Lagrange's sats). (8p)

Betygsgränser:

24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Tentamen inledande matematisk analys för F1 (tma970), 06-08-21

uppg. 1

Alla integraler är generaliserade i $x = 2$; vi betraktar med $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_1^{2-\frac{1}{n}} f(2-x)\,dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{3} f(x-2)\,dx:$$

a) Redan $\displaystyle\int_1^{2-\frac{1}{n}} \frac{1}{2-x}dx = \left[-\ln(2-x)\right]_1^{2-\frac{1}{n}}$ saknar gränsvärde då $n \to \infty$.

b) $\displaystyle\int_1^{2-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{3} \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx = \left[-2\sqrt{2-x}\right]_1^{2-\frac{1}{n}} + \left[2\sqrt{x-2}\right]_{2+\frac{1}{n}}^{3}$

har ett gränsvärde då $n \to \infty$.

c) $\displaystyle\int_1^{2-\frac{1}{n}} \ln(2-x)\,dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{3} \ln(x-2)\,dx = [\text{part. int.}] =$

$= \left[-(2-x)\ln(2-x) - x\right]_1^{2-\frac{1}{n}} + \left[(x-2)\ln(x-2) - x\right]_{2+\frac{1}{n}}^{3}$

har ett gränsvärde då $n \to \infty$ ty $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} = 0$.

svar: **a)** divergent, **b)** och **c)** konvergent

uppg. 2

Sätt $f(x) = \arctan\frac{2x}{5} + \arctan\frac{2x}{x^2+1} - \arctan\frac{2x\left(x^2+6\right)}{x^2+5}$; f är deriverbar på $\mathbb{R}$.

lösning 1: Visa $f' = 0$: det ger $f = c$ och $f(0) = 0$ ger då påståendet $f \equiv 0$:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{5}}{1+\left(\frac{2x}{5}\right)^2} + \frac{\frac{2\left(x^2+1-2x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}}{1+\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2} - \frac{\frac{2\left(\left(3x^2+6\right)\left(x^2+5\right)-2x^2\left(x^2+6\right)\right)}{\left(x^2+5\right)^2}}{1+\left(\frac{2x\left(x^2+6\right)}{x^2+5}\right)^2} =$$

$$= \frac{2\cdot 5}{25+4x^2} + \frac{2\left(1-x^2\right)}{x^4+6x^2+1} - \frac{2\left(x^4+9x^2+30\right)}{x^4+10x^2+25+4x^2(x^4+12x^2+36)} =$$

$$= 2\frac{5x^4+30x^2+5+\left(1-x^2\right)\left(25+4x^2\right)}{(25+4x^2)(x^4+6x^2+1)} - 2\frac{x^4+9x^2+30}{4x^6+49x^4+154x^2+25} =$$

$$= 2\frac{x^4+9x^2+30}{4x^6+49x^4+154x^2+25} - 2\frac{x^4+9x^2+30}{4x^6+49x^4+154x^2+25} = 0 \quad \text{vsv}$$

lösning 2: Visa $\tan(VL) = \tan(HL)$, det ger $f(x) = n\pi$, $f(0) = 0$

[eller $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2} = 0$] ger då påståendet.

Sätt $\alpha = \arctan\frac{2x}{5}$ och $\beta = \arctan\frac{2x}{x^2+1}$, då är $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} =$

$= \frac{\frac{2x}{5}+\frac{2x}{x^2+1}}{1-\frac{4x^2}{5\left(x^2+1\right)}} = \frac{2x\left(x^2+1+5\right)}{5x^2+5-4x^2} = \frac{2x\left(x^2+6\right)}{x^2+5} = \tan\left(HL\right)$ vsv.

Anm: f är udda, det räcker alltså att betrakta $x \geq 0$.

uppg. 3

$f\left(x\right) = \frac{\ln(\cos x)}{x}$ för $0 \neq x \in D_f = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ och $f\left(0\right) = 0$.

a) f är C^1 i alla punkter $0 \neq x \in D_f$ ty f är sammansatt av C^1 funktioner ($\cos x > 0$ i D_f). För origo gäller

$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\ln(\cos x)-0}{x^2} = \frac{\ln\left(\sqrt{1-\sin^2 x}\right)}{-\sin^2 x} \cdot \frac{-\sin^2 x}{x^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln\left(1-\sin^2 x\right)}{-\sin^2 x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2,$

alltså är f deriverbar även i 0 med $f'\left(0\right) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$,

ty $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Vidare gäller för $0 \neq x \in D_f$:

$f'\left(x\right) = \frac{-x\tan x - \ln(\cos x)}{x^2} = -\frac{\sin x}{x\cos x} - \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1-\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} = f'\left(0\right),$

det visar att f' är kontinuerlig även i 0.

b) Eftersom f är udda, så räcker det att betrakta endast $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$f'\left(x\right) = -\frac{1}{x^2}\left(x\tan x + \ln\left(\cos x\right)\right)$; vi visar nu att

$g\left(x\right) = x\tan x + \ln\left(\cos x\right) > 0$ för $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, det ger nämligen $f'\left(x\right) < 0$ för $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ och det ger i sin tur att f är strängt avtagande, alltså injektiv (på hela D_f): $g'\left(x\right) = x\left(1+\tan^2 x\right) + \tan x - \tan x = x\left(1+\tan^2 x\right) > 0$,

alltså är g strängt växande och således $g\left(x\right) > g\left(0\right) = 0$ för $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$Df^{-1}\left(0\right) = \frac{1}{Df(a)}$ då $f\left(a\right) = 0$, alltså $a = 0$ och $Df^{-1}\left(0\right) = \frac{1}{Df(0)} = -2$.

$\boxed{\underline{\textbf{svar}}\text{: } \textbf{b)}\ Df^{-1}\left(0\right) = -2}$

uppg. 4

$f\left(x\right) = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)} = \frac{e^{2x}+1}{e^{4x}+1}$.

a) $f'\left(x\right) = \frac{2e^{2x}\left(e^{4x}+1\right)-\left(e^{2x}+1\right)4e^{4x}}{\left(e^{4x}+1\right)^2} = 2e^{2x}\frac{e^{4x}+1-2e^{4x}-2e^{2x}}{\left(e^{4x}+1\right)^2} =$

$= -\frac{2e^{2x}}{\left(e^{4x}+1\right)^2}\left(e^{4x}+2e^{2x}-1\right) = -\frac{2e^{2x}}{\left(e^{4x}+1\right)^2}\left(\left(e^{2x}+1\right)^2-2\right) =$

$= -\frac{2e^{2x}}{\left(e^{4x}+1\right)^2}\left(e^{2x}+1+\sqrt{2}\right)\left(e^{2x}+1-\sqrt{2}\right)$, alltså

$f'\left(x\right)\begin{cases} > 0, \text{ då } e^{2x} < \sqrt{2}-1 \text{ (dvs då } x < \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\text{)} \\ < 0, \text{ då } e^{2x} > \sqrt{2}-1 \text{ (dvs då } x > \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\text{)} \end{cases},$

f antar alltså i $x_0 = \ln\sqrt{\sqrt{2}-1}$ ett strängt maximum $f\left(x_0\right) = \frac{\sqrt{2}-1+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2+1} =$

$= \frac{\sqrt{2}+1}{2}$; vidare gäller $f\left(x\right) = \frac{e^{-2x}+e^{-4x}}{1+e^{-4x}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ och

$f\left(x\right) = \frac{e^{2x}+1}{e^{4x}+1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{0+1}{0+1} = 1$, dvs $y = 1$ och $y = 0$ är asymptoter (i $-\infty$ resp. i ∞).

b) Eftersom $f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{4x}+1} < \frac{2e^{2x}}{e^{4x}}$ för $x \geq 0$ och $\int\limits_0^\infty \frac{2}{e^{2x}} dx$ konvergerar,

så konvergerar även $\int\limits_0^\infty f(x)\, dx$. En primitiv funktion till f fås t. ex.

med substitutionen $e^{2x} = t$ $\left(2e^{2x}dx = dt\right)$: $\int \frac{e^{2x}+1}{e^{4x}+1} dx = \int \frac{t+1}{t^2+1} \frac{1}{2t} dt =$

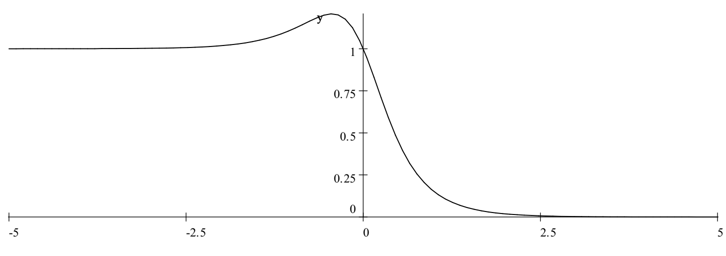
[pbu]$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1-t}{1+t^2} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\ln t + \arctan t - \frac{1}{2} \ln \left(1+t^2\right) + c \right)$,

en primitiv funktion till f är alltså $F(x) = \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{4x}}} \right) + \arctan \left(e^{2x}\right) \right)$

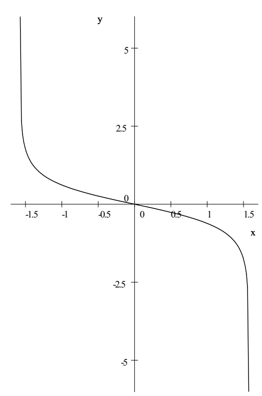
och därmed $\int\limits_0^\infty f(x)\, dx = \lim\limits_{x\to\infty} F(x) - F(0) = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{\pi}{2} + \ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} \right) =$

$= \underline{\frac{\pi + 2\ln 2}{8}}$ $\left(\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{4x}}} = \frac{1}{\sqrt{e^{-4x}+1}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1 \right)$.

$\boxed{\underline{\textbf{svar}}\text{: } \textbf{a)} \text{ maximipunkt } \left(\frac{\ln\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2} \right) \text{, asympt.: } y = 1,\ y = 0,\ \textbf{b)}\ \frac{\pi+2\ln 2}{8}}$



$y = f(x)$ i uppg. 4a



$y = \frac{\ln(\cos x)}{x}$ (uppg.3)