Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1
Datum: 2005-08-15, kl. 8.30-12.30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Christoffer Cromvik, tel. 0762-721860, besöker salen ca 9.30 och 11.30.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\text{(a)} \int_0^1 xe^{\frac{1}{x}}dx; \quad \text{(b)} \int_1^\infty e^{\frac{1}{x}}dx; \quad \text{(c)} \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}; \quad \text{(d)} \int_0^1 \frac{\ln x}{x}dx.$$

$$\text{(e)} \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad \text{(f)} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}; \quad \text{(g)} \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{2+x}}; \quad \text{(h)} \int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+16}}.$$

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x^2)}}{1-\cos x} \quad (4p); \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} \quad (4p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = 5x^{\frac{2}{5}}e^x$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = x\ln\frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1,1)$. (4p)

(b) Beräkna $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$. (4p)

5. Finn alla funktioner $f(x)$ sådana att $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$. (5p)

6. Låt $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Visa att om integralen $\int_1^\infty f^2(x)dx$ konvergerar, så konvergerar även integralen $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}dx$. Ge ett exempel som visar att det omvända påståendet inte är sant. (7p)

7.(a) Visa att derivatan av $\sin x$ är $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$. (4p)

(b) Härled derivatan av $\arcsin x$. (3p)

8.(a) Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (inklusive Rolles sats). (7p)

(b) Ge exempel på en funktion som är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall, men endast deriverbar i det öppna intervallet (funktionen betraktas som deriverbar i ändpunkterna om den har vänster/högerderivata i dem). (2p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM

Inledande matematisk analys F

(TMA 970

Lösningar 1/8-2005

1. (a) divergent; (b) divergent;
(c) divergent; (d) divergent;
(e) konvergent; (f) konvergent;
(g) konvergent; (h) divergent.

---

2. (a) $$\frac{\sqrt{1-\cos(x^2)}}{1-\cos x} = \sqrt{\frac{1-\cos^2(x^2)}{1+\cos(x^2)}} \cdot \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2(x^2)}}{\sin^2 x} \cdot \frac{1+\cos x}{\sqrt{1+\cos(x^2)}} = \quad (\sqrt{x^4} = x^2)$$

$$= \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \sqrt{\frac{\sin^2(x^2)}{x^4}} \cdot \frac{1+\cos x}{\sqrt{1+\cos(x^2)}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1\cdot 1\cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(b) $$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} = \frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}+x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\cancel{1}+x-\cancel{1}+x}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{3}{2}$$

---

3. $f(x) = 5x^{2/5}e^x$, $D_f = \mathbb{R}$

inga symmetrier

$f \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$; $f(0) = 0$ ($\Rightarrow$ min i 0)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (standard)

$\Rightarrow$ vågrät asymptot $y = 0$ i $-\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = 5\,\frac{e^x}{x^{3/5}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty \Rightarrow \text{ingen asymptot i } +\infty$$

$$f'(x) = x^{-3/5} e^x (2+5x) \qquad x \neq 0$$

$f' = 0$: $x = -2/5$

x		$-2/5$		0	
f'	$+$	0	$-$	|	$+$

$\Rightarrow f$ har lok. max i $-2/5$
lok. (globalt) min i 0

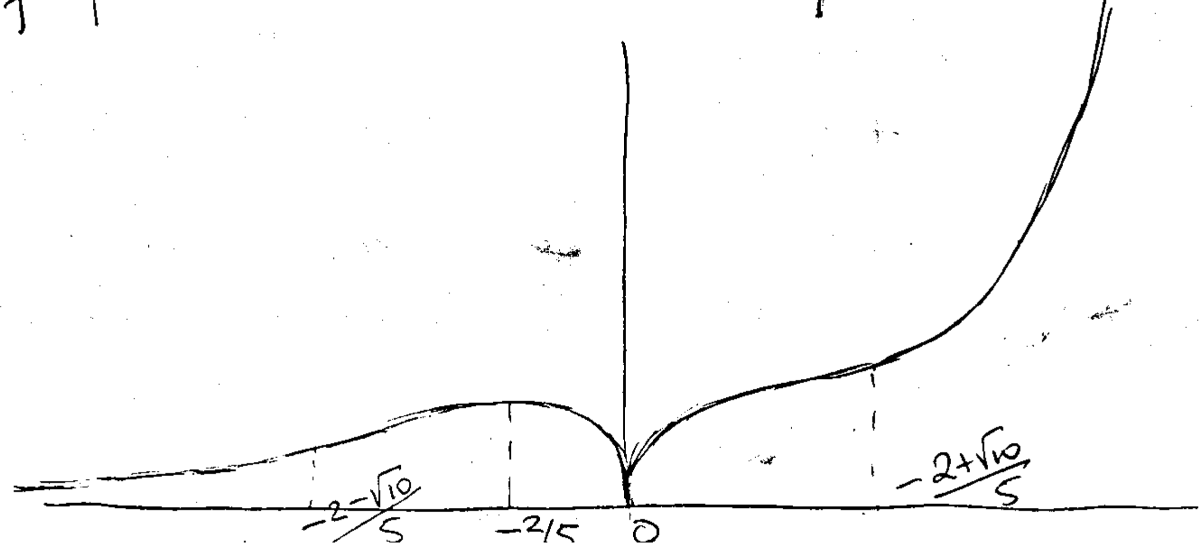
$$f''(x) = \frac{1}{5} x^{-8/5} e^x (-6 + 20x + 25x^2), \; x \neq 0$$

$f'' = 0$: $\frac{-2 \pm \sqrt{10}}{5}$

x		$\frac{-2-\sqrt{10}}{5}$		0		$\frac{-2+\sqrt{10}}{5}$	
f''	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ inflexion i $\frac{-2 \pm \sqrt{10}}{5}$

x	$-\infty$		$\frac{-2-\sqrt{10}}{5}$		$-2/5$		0		$\frac{-2+\sqrt{10}}{5}$		$+\infty$
f	$\to 0$	$\nearrow$		$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	0 lok. min	$\nearrow$		$\nearrow$	
f'		$+$		$+$	0	$-$	$-\infty$ | $+\infty$	$+$		$+$	
f''		$+$	0	$-$		$-$	|	$-$	0	$+$	



4. (a) $\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx =$

$$= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{1-x}}{1+x} \cdot \frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{(1-x)^{\cancel{2}}}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2 \overset{\pm 1}{}}{1-x^2}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x - \int \frac{dx}{1-x^2} \overset{*}{=}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (+C)$$

(* notera att vi ovan behövde derivera $\ln \frac{1+x}{1-x}$ och fick $2 \cdot \frac{1}{1-x^2}$; annars kan man partialbråksuppdela)

(b) $$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \begin{bmatrix} 1-x = t^2 \\ x = 1-t^2 \\ dx = -2t\,dt \\ x=0 : t=1 \\ x=1 : t=0 \end{bmatrix} =$$

$$= -2 \int_1^0 \frac{\cancel{t}}{(1+t^2)\cancel{t}}\, dt = 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\Big[\arctan t\Big]_0^1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

---

5. Sätt $t = \sin^2 x \in [0,1]$; vi får då

$$f'(t) = 1 - t$$

$$f(t) = t - \frac{t^3}{2} + C \quad \text{för } t \in [0,1]$$

Notera att f kan vara godtycklig utanför $[0,1]$, det enda kravet är att den är deriverbar i "skarvpunkterna" 0 o 1, samt i $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

6. $(a-b)^2 \geq 0 \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$

$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{2}f^2(x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$

Eftersom både $\int_1^\infty f^2(x)\,dx$ och $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konvergerar, får vi att den givna integralen är absolut-konvergent, och därmed även konvergent (enligt jämförelsekriteriet).

Betrakta $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$:

$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ konvergent,

men $\int_1^\infty f^2(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x}$ divergent.