Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1
Datum: 2004-10-20, kl. 14.00-18.00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Erik Broman, tel. 0739-779268, besöker tentamen ca 15.00 och ca 17.00.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

---

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\textbf{(a)} \int_{-\infty}^{0} x^9 e^x\,dx; \quad \textbf{(b)} \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^3+1}}; \quad \textbf{(c)} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}; \quad \textbf{(d)} \int_0^1 \ln x\,dx.$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, d.v.s. sant / falskt. (Funktionen f antas vara deriverbar i $\mathbb{R}$.)

(e) Om f är strängt växande i $\mathbb{R}$, så gäller $f' > 0$ i $\mathbb{R}$.
(f) Om $f' > 0$ i $\mathbb{R}$, så är f strängt växande i $\mathbb{R}$.
(g) Om $\lim_{x\to\infty} f(x) = \text{const}$, så gäller $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
(h) Om $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, så gäller $\lim_{x\to\infty} f(x) = \text{const}$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger −1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to 0+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad (4p); \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} \quad (4p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^4}{x^3-1}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$. (4p)

(b) Beräkna $\int_1^2 \sin(\ln x)\,dx$. (4p)

5. Rita grafen till funktionen $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} - \arctan x$. (6p)

6. Funktionen f är två gånger deriverbar i $\mathbb{R}$ och sådan att $f'' \geq 0$ i $\mathbb{R}$. Visa att

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \qquad (7p)$$

7.(a) Formulera och bevisa satsen om derivatan av en invers funktion. (6p)
(b) Härled derivatan av $\arctan x$ (givet derivatan av tan). (3p)

8.(a) Formulera regeln för derivata av en produkt. (1p)
(b) Formulera och bevisa satsen om partiell integration (för obestämda integraler). (5p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM

Inledande matematisk analys F
TMA 970
20/10 - 2004
Lösningar

1. (a) konvergent ; (b) divergent ;
(c) konvergent ; (d) konvergent ;
(e) falskt ; (f) sant ;
(g) falskt ; (h) falskt

OBS! $\sqrt{3-x^2}$

---

2. (a) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e^{x(\ln(x+1)-\ln x)} =$

$= e^{x\ln(x+1)} \cdot e^{-x\ln x} \xrightarrow[x\to 0_+]{} e^0 \cdot e^0 = 1,$

ty $x\ln x \xrightarrow[x\to 0_+]{} 0$.

(b) $\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} = \dfrac{(9+2x-25)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt{9+2x}+5)} =$

$= \dfrac{2\cancel{(x-8)}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{(x-8)}(\sqrt{9+2x}+5)} \xrightarrow[x\to 8]{} \dfrac{24}{10} = \dfrac{12}{5}$

---

3. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3-1}$, D_f : $x \neq 1$

$f(x) = 0$ endast för $x = 0$

$f(x) > 0$ för $x > 1$; $f(x) \leq 0$ för $x < 1$

($\Rightarrow$ f har lok. max i 0)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^4}{x^3-1} = \pm\infty$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \text{"}\frac{1}{-0}\text{"} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \text{"}\frac{1}{+0}\text{"} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x = 1$ är vertikal asymptot

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^4}{x^4 - x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$$

$$f(x) - x = \frac{\cancel{x^4} - \cancel{x^3 \cdot x} + x}{x^3 - 1} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ f har sned asymptot $y = x$ i $\pm\infty$

f är varken jämn eller udda; ej heller periodisk

$$f'(x) = \frac{\cancel{4}x^6 - 4x^3 - \cancel{3x^6}}{(x^3-1)^2} = \frac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}$$

x		0		1		$\sqrt[3]{4}$	
f'	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$

$f' = 0$ i $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[3]{4}$

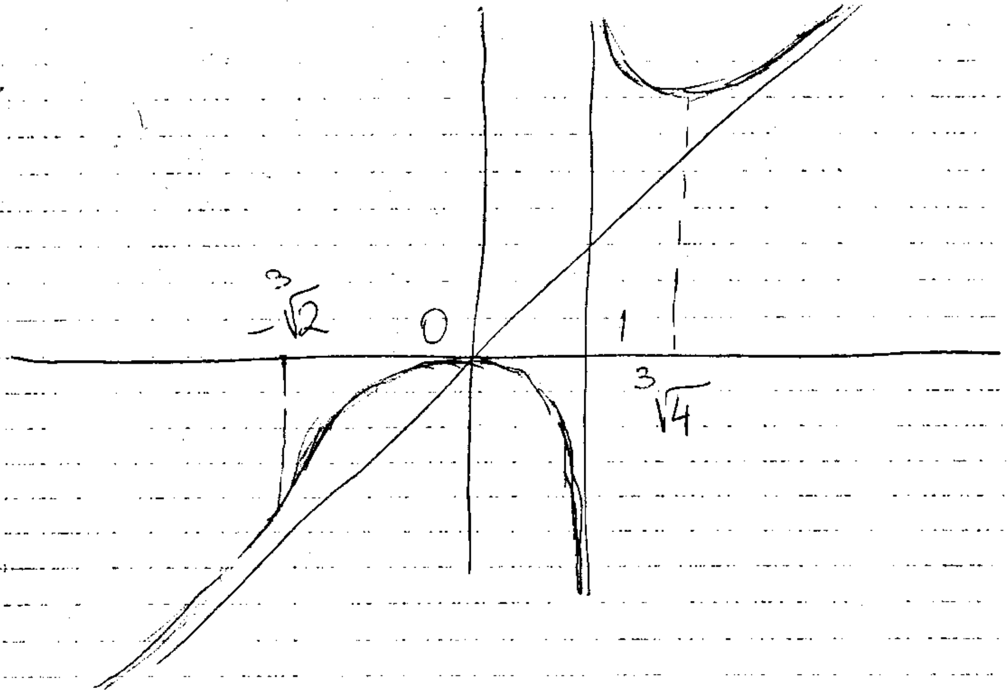
$\Rightarrow$ f har lok. max i 0, lok. min i $\sqrt[3]{4}$

$$f''(x) = 6\,\frac{x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}$$

x		$-\sqrt[3]{2}$		0		1	
f''	$+$	0	$-$	0	$-$	|	$+$

$\Rightarrow$ inflexion i $-\sqrt[3]{2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		0		1		$\sqrt[3]{4}$		$+\infty$
f	$-\infty$ $y=x$		infl.		lok.max 0	$-\infty$	| $+\infty$		lok. min		$+\infty$ $y=x$
f'		$+$	$+$		0	$-$	|	$-$	0	$+$	
f''		$+$	0	$-$	0	$-$	|	$+$		$+$	



4 (a) $$\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} =$$

$$= \frac{1}{(x-2)^2(x^2-4x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-4x+5}$$

$$1 = A(x-2)(x^2-4x+5) + B(x^2-4x+5) + $$
$$+ (Cx+D)(x-2)^2$$

$x=2$: $\quad 1 = B$

x^3: $\quad 0 = A + C \Rightarrow C = -A$

x^2: $\quad 0 = -6A + B - 2C + D$

$x^0\ (x=0)$: $\quad 1 = -10A + 5B + 4D$

$$\left| \begin{array}{l} 4A - D = 1 \\ 10A - 4D = 4 \end{array} \right| \cdot (-4) \quad +$$

$$-6A = 0 \quad A = 0 \quad D = -1$$
$$C = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x-2)^2(x^2-4x+5)} = \int \frac{dx}{(x-2)^2} -$$
$$- \int \frac{dx}{(x-2)^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{x-2} - \arctan(x-2) \quad (+C)$$

(b) $\int_1^2 1 \sin(\ln x)\,dx = \Big[x \sin(\ln x)\Big]_1^2 -$

$$- \int_1^2 \cancel{x} \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx =$$

$$= 2\sin(\ln 2) - 0 - \Big[x\cos(\ln x)\Big]_1^2 -$$

$$- \int_1^2 \cancel{x} \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \sin(\ln x)\,dx = \sin(\ln 2) - \cos(\ln 2) + \frac{1}{2}$$

---

5. $f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan x$

$D_f: \; x \neq 1$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$

$\lim_{x\to 1-} f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$; $\lim_{x\to 1+} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1-\cancel{2x}+x^2+1+\cancel{2x}+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \equiv 0 \quad \text{i } (-\infty, 1) \text{ och i } (1, \infty)$$

$$\Rightarrow f \equiv C_1 = \frac{\pi}{4} \text{ i } (-\infty, 1); \quad f \equiv C_2 = -\frac{3\pi}{4} \text{ i } (1, \infty)$$

(c) $\circledast = \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) =$ 5

$$= \frac{1}{2}\left(f(x_1) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} f'(\xi_1)\left(x_1 - \frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{2} f'(\xi_2)\left(x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}\right) =$$

(Medelvärdessatsen)

$$= \frac{1}{2} f'(\xi_1)\,\frac{x_1-x_2}{2} + \frac{1}{2} f'(\xi_2)\,\frac{x_2-x_1}{2},$$

där ξ_1 är mellan x_1 och $\frac{x_1+x_2}{2}$
ξ_2 — " — $\frac{x_1+x_2}{2}$ och x_2

(vi antar att $x_1 \neq x_2$, eftersom olikheten uppenbarligen gäller då $x_1 = x_2$)

Utan inskränkning $x_1 < x_2$; då har vi att $x_1 < \xi_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < \xi_2 < x_2$

$f'' \geq 0 \Rightarrow f'$ växande $\Rightarrow f'(\xi_2) \geq f'(\xi_1)$

$$\Rightarrow \circledast = \frac{1}{4}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0}\underbrace{\left(f'(\xi_2) - f'(\xi_1)\right)}_{\geq 0} \geq 0$$

$\Rightarrow$ olikheten är sann $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$