Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2003
Datum: 2004-08-16, kl. 8.45-12.45.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Mikael Persson, tel. 0739-779268, Jonas Hartwig, tel. 0762-186654.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

(a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\ln x + 1}$; **(b)** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^{2\ln x} + 1}$; **(c)** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^p}$; **(d)** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Avgör om följderna nedan konvergerar eller divergerar när $n \to \infty$. Ge endast svar, d.v.s. konvergerar / divergerar.
(e) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$;
(f) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \frac{\cos n}{n}$;
(g) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$;
(h) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$; (4p)

(b) $\lim_{x\to\infty} (\frac{x^2}{x^2-1})^x$. (4p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2})\, e^{-x}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$. (4p)

(b) Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x \, dx$. (4p)

5. Visa att $\frac{x-1}{\sqrt{x}} > \ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ för alla $x > 1$. (6p)

6. Givet är den kontinuerliga funktionen $f : [a, b] \to [a, b]$. Visa att ekvationen $x = f(x)$ har åtminstone en rot i intervallet $[a, b]$. (6p)

7.(a) Definiera begreppet kontinuitet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)
(b) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)
(c) Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt, så är den kontinuerlig i sammma punkt. Är det omvända påståendet sant? Motivera! (5p)

8.(a) Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (7p)
(b) Finn $\lim_{n\to\infty} \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} \sin(x^2)\, dx$. (2p)

Inledande matematisk analys F1 (TMA 970)

16/8 - 04

Lösningar

1. (a) divergent; (b) konvergent; (c) divergent; (d) konvergent; (e) konvergerar; (f) konvergerar; (g) divergerar; (h) konvergerar.

---

2. (a)
$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{(\cancel{1}+x-\cancel{1}-x^2)(\sqrt{1+x}+1)}{(\cancel{1}+x-\cancel{1})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} =$$
$$= \frac{(1-x)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1\cdot 2}{2} = 1$$

(b)
$$\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x = \left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^x =$$
$$= e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)} = e^{\underbrace{\frac{x}{x^2-1}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2-1}}}_{\to 1}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$$

---

3. $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2+2x+2)e^{-x} = \frac{1}{2}\left((x+1)^2+1\right)e^{-x}$$
$$\Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{(standardgränsvärde)}$$

2

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty \Rightarrow \text{ingen asymptot i } -\infty$$

(horisontell i $+\infty$)

$$f'(x) = (1+x)e^{-x} - \left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x} = -\frac{x^2}{2}e^{-x}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$; $f' \leq 0 \quad \forall x \in R$

$\Rightarrow f$ avtagande i $\mathbb{R}$

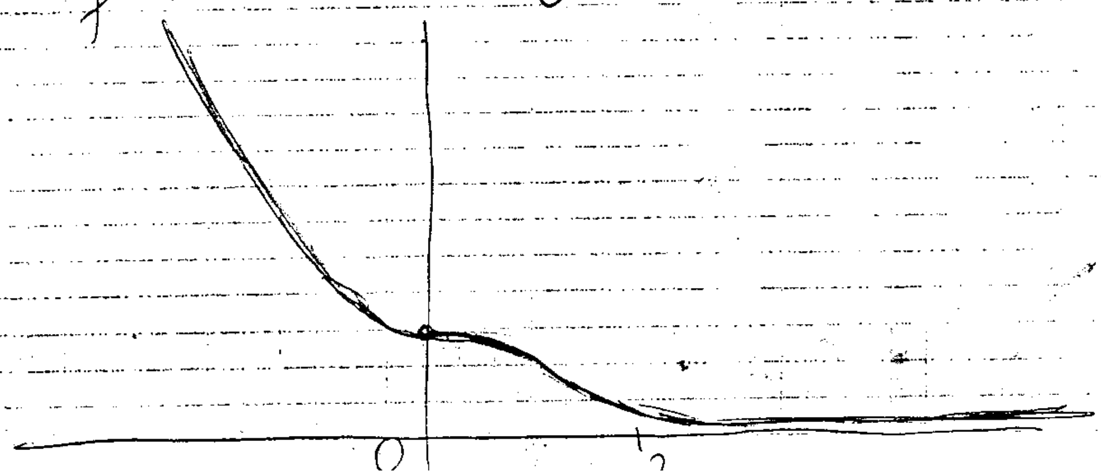
inga lokala extrema

$$f''(x) = -xe^{-x} + \frac{x^2}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}e^{-x}x(x-2)$$

x		0		2	
f''	+	0	−	0	+

$\Rightarrow x_1 = 0$ & $x_2 = 2$ inflexionspkter

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$		$\searrow$	0
f'	−	−	0	−		−	
f''	+	+	0	−	− 0	+	+



4. (a) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx =$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{\arctan t}{\cancel{t}\,(1+t^2)} \cdot 2\cancel{t}\,dt =$$

$$= 2\int \arctan t \,(\arctan t)'\,dt =$$

$$= (\arctan t)^2 \;(+C) = (\arctan\sqrt{x})^2 \;(+C)$$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\left[x^2\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} +$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x\cos 2x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{16}\cdot 0 + 0 + \frac{1}{2}\left[x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\cdot\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 1 - 0 +$$

$$+ \frac{1}{4}\left[\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + 0 - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 2}{8}$$

---

5. Tag $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$. Då

$$f(1) = 0 - 0 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2(x+1) - 1\cdot 2(x-1)}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(x+1)^2 - 4x}{x(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0 \quad \forall x > 1$$

$$\Rightarrow f > 0 \quad \forall x > 1$$

(4)

Tag $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} - \ln x = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln x$

Då

$$g(1) = 0 \qquad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} x^{-3/2} - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{x+1-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}} > 0 \quad \forall x > 1$$

$$\Rightarrow g > 0 \quad \forall x > 1$$

$$\Rightarrow \frac{2(x-1)}{x+1} < \ln x < \frac{x-1}{\sqrt{x}} \quad \forall x > 1$$

(6.) Sätt $F(x) = f(x) - x$

$$F(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$$

$$F(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$$

Om $F(a) = 0$ eller $F(b) = 0$ har vi hittat (åtminstone) en rot till $x = f(x)$ i $[a,b]$. Om $F(a) > 0$ och $F(b) < 0$ kommer ekvationen $F(x) = 0$ ($\Leftrightarrow x = f(x)$) att ha åtminstone en rot i (a,b) enligt satsen om mellanliggande värden.

---

(8) (b)

$$\left| \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} \sin(x^2)\, dx \right| = \left| \sin(\xi_n^2)\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \right| \qquad \sqrt{n} \leq \xi_n \leq \sqrt{n+1}$$

$$\leq 1 \cdot \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Svar till tentor i inledande matematisk analys F1, tma970, ht 06

03-01-14

1.(a),(b) konvergent; **(c),(d)** divergent; **(e),(f),(h)** falskt; **(g)** sant

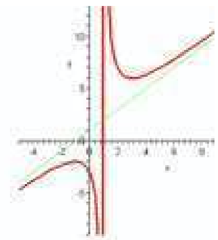
2.(a) 1, **(b)** e^6 **3.** lok. max: 0, lok. min: $\frac{21}{5}$, inflex.pkt: $-\frac{1}{5}, 0$, grafen:

4.(a) $\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + x + c$ **(b)** $\frac{24\pi}{5}$

03-08-18

1.(a),(b),(e),(f),(h) konvergent; **(c),(d),(g)** divergent **2.(a)** 3, **(b)** $\frac{3}{4}$

3. asymptoter: $x = 1$, $y = x + 1$, lok. max: -1, lok. min: 3, grafen:



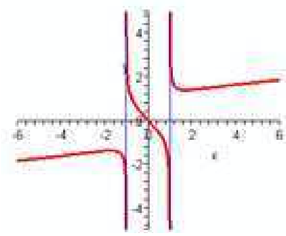
4.(a) $\ln\left(\sin^2 x + \sin x + 1\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\right)$ **(b)** π

5. $\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$

03-10-22

1.(a),(d) konvergent; **(b),(c)** divergent; **(f),(h)** deriverbar; **(e),(g)** ej deriverbar **2.(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** -1 **3.** asymptoter: $x = \pm 1$,

lok. max: $-\sqrt{3}$, lok. min: $\sqrt{3}$, infl. pkt. $-3, 0, 3$, grafen:

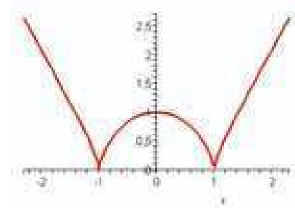


4.(a) $6\left(\sqrt[6]{x} - \arctan\sqrt[6]{x}\right) + c$ **(b)** $\frac{\pi^2 - 8}{32}$

04-01-13

1.(c),(d) konvergent; **(a),(b)** divergent; **(e),(g)** finns; **(f),(h)** finns ej

2.(a) ex. ej **(b)** 0 **3.** lok.min: ± 1, infl.pkt: $\pm\sqrt{3}$, grafen:



4.(a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(x^2 + x + 1\right) - 2x + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

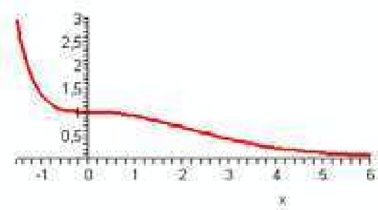
(b) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\arctan\frac{4}{\sqrt{5}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ **5.** $\frac{16}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$

04-08-16

1.(b),(d),(e),(f),(h) konvergent; **(a),(c),(g)** divergent

2.(a) 1 **(b)** 1

3. asymptot: $y = 0$ i ∞, infl.pkt: 0 och 2, grafen:



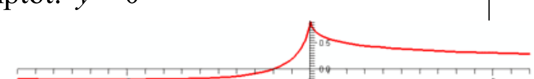
4.(a) $\left(\arctan\sqrt{x}\right)^2$ **(b)** $\frac{\pi - 2}{8}$

05-10-19

1. (c) falsk, övriga sanna **2.** 0 **3.a)** f är deriverbar i alla punkter $x \neq 0$

b) lok. minimum i $x = -3 - 2\sqrt{2}$, maximum i 0, asymptot: $y = 0$

c) $F(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-x} - \ln(1-x) - 2\arctan\sqrt{-x} & \text{om } x < 0 \\ 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1 + \sqrt{x}\right) & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$



4.a) $D_f = [0, \infty[$, f är strängt konvex, asymptot: $y = 0$

b) $\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$