Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2003
Datum: 2003-10-22, kl. 14.15-18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Mats Kjaer, tel. 0740-459022.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\textbf{(a)} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x+1}\,dx; \quad \textbf{(b)} \int_1^\infty \frac{dx}{\ln(x^2)+1}; \quad \textbf{(c)} \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{dx}{8x^3-1}; \quad \textbf{(d)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Avgör om funktionerna nedan är deriverbara i $x_0 = 0$. Ge endast svar, d.v.s. deriverbar / ej deriverbar.
(e) $f(x) = |x| + 1$;
(f) $f(x) = x|x| + 1$;
(g) $f(x) = \ln|x|$;
(h) $f(x) = |x|^3 + 1$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos 2x}$; (4p)

(b) $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^6+x^3+1} - \sqrt{x^6-x^3+1})$. (4p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$. (4p)

(b) Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x\,dx$. (4p)

5. Visa att ekvationen $x - a\sin x = 5$, där $0 < a < 1$, har en enda reell rot. (6p)

6. Givet är att funktionen f är deriverbar i intervallet (a, ∞) och sådan att $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Visa att $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. (OBS! Du får inte använda L'Hospitals regel!) (6p) Ge exempel på en funktion g sådan att g är deriverbar, $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$, men för vilken $\lim_{x\to\infty} g'(x)$ inte existerar. (1p)

7.(a) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)
(b) Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (inklusive Rolles sats). (7p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (7p)

Svar till tentor i inledande matematisk analys F1, tma970, ht 06

03-01-14

1.(a),**(b)** konvergent; **(c)**,**(d)** divergent; **(e)**,**(f)**,**(h)** falskt; **(g)** sant

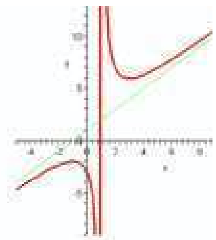
2.(a) 1, **(b)** e^6 **3.** lok. max: 0, lok. min: $\frac{21}{5}$, inflex.pkt: $-\frac{1}{5}, 0$, grafen:

4.(a) $\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + x + c$ **(b)** $\frac{24\pi}{5}$

03-08-18

1.(a),**(b)**,**(e)**,**(f)**,**(h)** konvergent; **(c)**,**(d)**,**(g)** divergent **2.(a)** 3, **(b)** $\frac{3}{4}$

3. asymptoter: $x = 1$, $y = x + 1$, lok. max: -1, lok. min: 3, grafen:



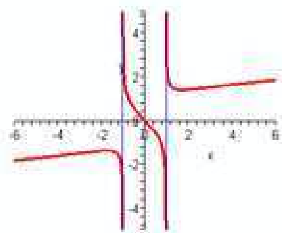
4.(a) $\ln\left(\sin^2 x + \sin x + 1\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\right)$ **(b)** π

5. $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

03-10-22

1.(a),**(d)** konvergent; **(b)**,**(c)** divergent; **(f)**,**(h)** deriverbar; **(e)**,**(g)** ej deriverbar **2.(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** -1 **3.** asymptoter: $x = \pm 1$,

lok. max: $-\sqrt{3}$, lok. min: $\sqrt{3}$, infl. pkt. $-3, 0, 3$, grafen:

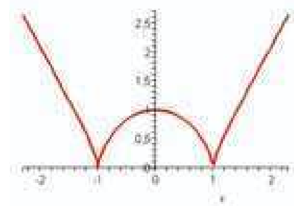


4.(a) $6\left(\sqrt[6]{x} - \arctan\sqrt[6]{x}\right) + c$ **(b)** $\frac{\pi^2 - 8}{32}$

04-01-13

1.(c),**(d)** konvergent; **(a)**,**(b)** divergent; **(e)**,**(g)** finns; **(f)**,**(h)** finns ej

2.(a) ex. ej **(b)** 0 **3.** lok.min: ± 1, infl.pkt: $\pm\sqrt{3}$, grafen:



4.(a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(x^2 + x + 1\right) - 2x + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

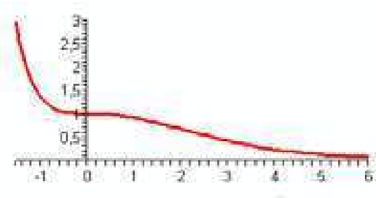
(b) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\arctan\frac{4}{\sqrt{5}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ **5.** $\frac{16}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$

04-08-16

1.(b),**(d)**,**(e)**,**(f)**,**(h)** konvergent; **(a)**,**(c)**,**(g)** divergent

2.(a) 1 **(b)** 1

3. asymptot: $y = 0$ i ∞, infl.pkt: 0 och 2, grafen:



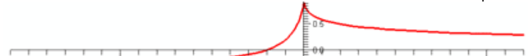
4.(a) $\left(\arctan\sqrt{x}\right)^2$ **(b)** $\frac{\pi - 2}{8}$

05-10-19

1. (c) falsk, övriga sanna **2.** 0 **3.a)** f är deriverbar i alla punkter $x \neq 0$

b) lok. minimum i $x = -3 - 2\sqrt{2}$, maximum i 0, asymptot: $y = 0$

c) $F(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-x} - \ln(1-x) - 2\arctan\sqrt{-x} & \text{om } x < 0 \\ 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$



4.a) $D_f = [0, \infty[$, f är strängt konvex, asymptot: $y = 0$

b) $\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$