

**Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2002**

Datum: 2003-01-14, kl. 14.15-18.15.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefon: Rolf Liljendahl, tel. 0740-459022.

OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

(a)  $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$ ; (b)  $\int_0^1 x \ln x dx$ ; (c)  $\int_0^\infty \frac{(x-1) dx}{\sqrt{x^4+1}}$ ; (d)  $\int_1^\infty \frac{dx}{x \ln x + 1}$ .

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, d.v.s. sant / falskt.

(e) Om funktionerna  $f, g$  är deriverbara på  $I$  och  $f > g$  på  $I$ , så gäller  $f' \geq g'$  på  $I$ .

(f) Funktionen  $\ln |1 - \sqrt{x}|$  är deriverbar i sin definitionsmängd.

(g) Om funktionen  $f$  är udda på  $[-a, a]$ , så är dess derivata  $f'$  jämn på  $[-a, a]$ .

(h) Om  $f$ 's derivata  $f'$  är jämn på  $[-a, a]$ , så är funktionen  $f$  udda på  $[-a, a]$ .

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (utan att använda l'Hospitals regel)

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\tan x}$  (3p); (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}$  (5p).

3. Rita grafen till funktionen  $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ . Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm alla primitiva funktioner till  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$ . (5p)

(b) Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas när det begränsade området mellan kurvorna  $x = y^2$  och  $8y = x^2$  roterar kring  $x$ -axeln. (4p)

5.(a) Visa att funktionen  $\cos \frac{1}{x}$  saknar gränsvärde när  $x \rightarrow 0$ . (3p)

(b) Visa att funktionen  $x \cos \frac{1}{x}$  har gränsvärde när  $x \rightarrow 0$ . (3p)

6.(a) Visa att integralen  $\int_0^1 x^k \ln^n x dx$  är konvergent  $\forall k, n \in \mathbb{N}$ . (2p)

(b) Visa att  $\int_0^1 x^k \ln^n x dx = \frac{(-1)^n n!}{(k+1)^{n+1}} \quad \forall k, n \in \mathbb{N}$ . (6p)

7.(a) Visa att derivatan av  $\sin x$  är  $\cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . (4p)

(b) Härled derivatan av  $\arcsin x$ . (3p)

8. Formulera och bevisa intervallinkapslingssatsen. (7p)

## Svar till tentor i inledande matematisk analys F1, tma970, ht 06

### 03-01-14

1. **(a),(b)** konvergent; **(c),(d)** divergent; **(e),(f),(h)** falskt; **(g)** sant

2. **(a)** 1, **(b)**  $e^6$  3. lok. max: 0, lok. min:  $\frac{21}{5}$ , inflex.pkt:  $-\frac{1}{5}, 0$ , grafen:

4. **(a)**  $\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + x + c$  **(b)**  $\frac{24\pi}{5}$



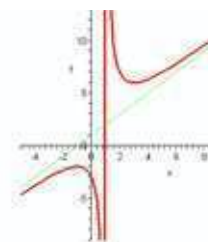
### 03-08-18

1. **(a),(b),(e),(f),(h)** konvergent; **(c),(d),(g)** divergent 2. **(a)** 3, **(b)**  $\frac{3}{4}$

3. asymptoter:  $x = 1, y = x + 1$ , lok. max:  $-1$ , lok. min: 3, grafen:

4. **(a)**  $\ln(\sin^2 x + \sin x + 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin x + \frac{1}{2})\right)$  **(b)**  $\pi$

5.  $\ln(2 + \sqrt{3})$

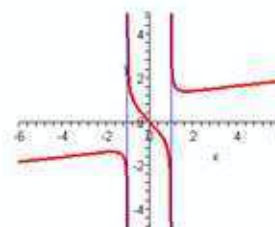


### 03-10-22

1. **(a),(d)** konvergent; **(b),(c)** divergent; **(f),(h)** deriverbar; **(e),(g)** ej deriverbar 2. **(a)**  $\frac{1}{2}$  **(b)**  $-1$  3. asymptoter:  $x = \pm 1$ ,

lok. max:  $-\sqrt{3}$ , lok. min:  $\sqrt{3}$ , infl. pkt.  $-3, 0, 3$ , grafen:

4. **(a)**  $6(\sqrt[6]{x} - \arctan\sqrt[6]{x}) + c$  **(b)**  $\frac{\pi^2 - 8}{32}$



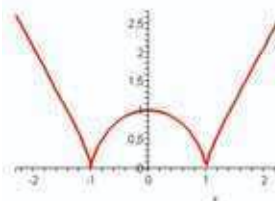
### 04-01-13

1. **(c),(d)** konvergent; **(a),(b)** divergent; **(e),(g)** finns; **(f),(h)** finns ej

2. **(a)** ex. ej **(b)** 0 3. lok.min:  $\pm 1$ , infl.pkt:  $\pm\sqrt{3}$ , grafen:

4. **(a)**  $(x + \frac{1}{2})\ln(x^2 + x + 1) - 2x + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

**(b)**  $\frac{1}{\sqrt{5}}(\arctan\frac{4}{\sqrt{5}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{5}})$  5.  $\frac{16}{27}(10\sqrt{10} - 1)$



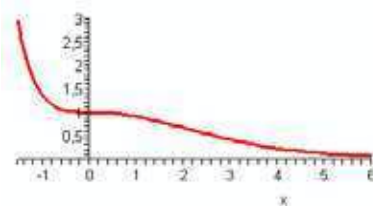
### 04-08-16

1. **(b),(d),(e),(f),(h)** konvergent; **(a),(c),(g)** divergent

2. **(a)** 1 **(b)** 1

3. asymptot:  $y = 0$  i  $\infty$ , infl.pkt: 0 och 2, grafen:

4. **(a)**  $(\arctan\sqrt{x})^2$  **(b)**  $\frac{\pi-2}{8}$



### 05-10-19

1. **(c)** falsk, övriga sanna 2. 0 3. **(a)**  $f$  är deriverbar i alla punkter  $x \neq 0$

**(b)** lok. minimum i  $x = -3 - 2\sqrt{2}$ , maximum i 0, asymptot:  $y = 0$

**(c)**  $F(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-x} - \ln(1-x) - 2 \arctan\sqrt{-x} & \text{om } x < 0 \\ 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$

4. **(a)**  $D_f = [0, \infty[$ ,  $f$  är strängt konvex, asymptot:  $y = 0$

**(b)**  $\ln(3 + 2\sqrt{2})$

