Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2001
Datum: 2002-08-19, kl. 8.45-12.45.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Rolf Liljendahl, tel. 0740-459022.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Avgör om gränsvärdena (a) - (d) finns, resp. om integralerna (e) - (h) konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. finns / finns ej resp. konvergent / divergent. (Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2+1}$; **(b)** $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$; **(c)** $\lim_{x\to\infty} (\dfrac{1}{x} + \sin x)$; **(d)** $\lim_{x\to 0} x \sin^2 \dfrac{1}{x}$;

(e) $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{x^2} dx$; **(f)** $\int_0^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; **(g)** $\int_0^\infty \dfrac{dx}{2x^2+1}$; **(h)** $\int_0^1 x(\ln x)^2\, dx$.

2. Bestäm gränsvärdena

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$; (4p)

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$. (4p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Bestäm parametern a så att ekvationen $\ln x - ax^2 = 0$ har exakt en rot. (4p)

(b) Beräkna $\int \sqrt{x} \arctan \sqrt{x}\, dx$. (4p)

5. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx. \qquad (6p)$$

6. Visa att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

är oändligt många gånger deriverbar. (8p)

7.(a) Definiera begreppet kontinuitet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)

(b) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)

(c) Vad finns det för samband mellan deriverbarhet och kontinuitet? Stöd dina påståenden med bevis resp. motexempel. Motivera noga! (5p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens huvudsats. (7p)

Inledande matematisk analys

TMA970 F1

19/8 - 02

Lösningar

1. (a) finns; (b) finns; (c) finns ej; (d) finns; (e) divergent; (f) divergent; (g) konvergent; (h) konvergent

---

2. (a)
$$\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\cancel{1-\cos^2 x}\;1}{\cancel{\sin^2 x}(1+\cos x)}$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} 1\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(b)
$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}}{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$$

---

3. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to -1-0} f(x) = "\frac{1}{-0}" = -\infty$;

$\lim_{x\to -1+0} f(x) = "\frac{1}{+0}" = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Asymptoter: $x=-1$ vertikal asymptot

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^4}{(1+x)^3 x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$$

$$f(x) - 1\cdot x = \frac{x^4}{(1+x)^3} - x =$$

$$= \frac{\cancel{x^4} - x - 3x^2 - 3x^3 - \cancel{x^4}}{(1+x)^3} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -3$$

$$\Rightarrow \quad y = x - 3 \quad \text{sned asymptot i } \pm\infty$$

Nollställen: $f(x) = 0 \iff x = 0$.

Lokala extrema etc:

$$f'(x) = \frac{4x^3(1+x)^{\cancel{3}} - 3\cancel{(1+x)^2}x^4}{(1+x)^{\cancel{6}\,4}} =$$

$$= \frac{x^4 + 4x^3}{(1+x)^4} = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}$$

$f' = 0$ i $x = -4$ & $x = 0$

$f' > 0$ för $x < -4$ & $x > 0$

$f' < 0$ för $x \in (-4, 0) \setminus \{x = -1\}$

f har lok. max i -4 ; lok. min i 0

$\Rightarrow$ f växande i $(-\infty, -4)$ & i $(0, \infty)$

f avtagande i $(-4, -1) \cup (-1, 0)$

Konvexitet etc:

$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 12x^2)(1+x)^{\cancel{4}} - 4\cancel{(1+x)^3}x^3(x+4)}{(1+x)^{\cancel{8}\,5}} =$$

$$= \frac{\cancel{4x^3} + \cancel{4x^4} + 12x^2 + \cancel{12x^3} - \cancel{4x^4} - \cancel{16x^3}}{(1+x)^5}$$

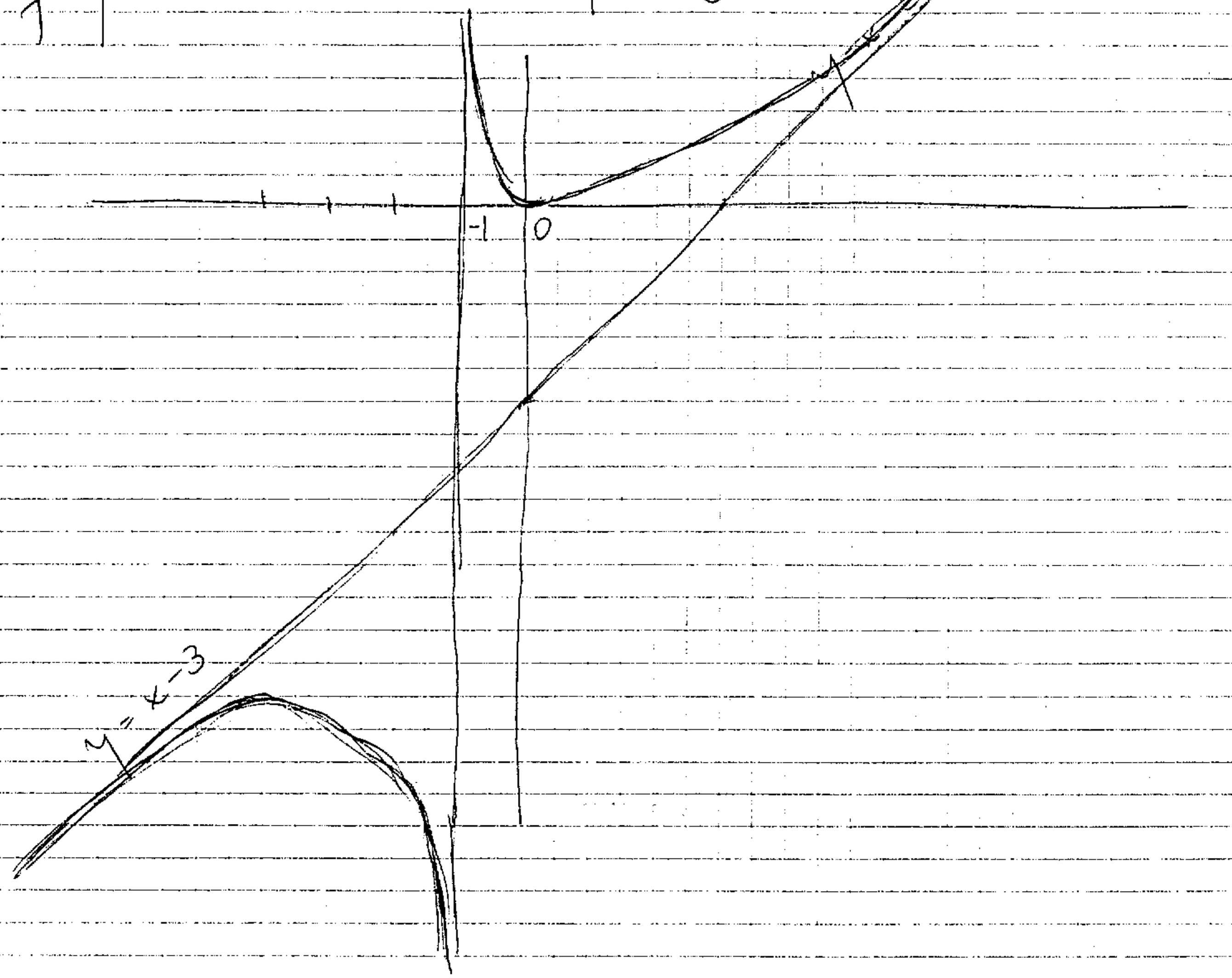
$f'' = 0 \iff x = 0$; $f'' < 0$ i $(-\infty, -1)$

$f'' \geq 0$ i $(-1, \infty)$

$\Rightarrow$ f konkav i $(-\infty, -1)$; konvex i $(-1, \infty)$

3

x	$-\infty$		-4		-1		0			$+\infty$
f	$y=x-3$, $-\infty$	$\nearrow$	lok. max <0	$\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$y=x-3$, $+\infty$
f'	$+$		0	$-$		$-$	0	$+$	$+$	
f''	$-$		$-$	$-$		$+$	0	$+$	$+$	$+$



(4) (a) Låt $f(x) = \ln x - ax^2 \quad (x>0)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1-2ax^2}{x}$$

$$f' = 0 \iff 2ax^2 = 1 \quad (x>0)$$

$$\iff x = \frac{1}{\sqrt{2a}} \quad \text{om } \boxed{a>0} \qquad \boxed{a \neq 0}$$

$$f' > 0 \ ; \ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$$
$$f' < 0 \ ; \ \left(\frac{1}{\sqrt{2a}}, \infty\right) \qquad (\text{för } a>0)$$

$f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$

$f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \begin{cases} -\infty & \text{för } a>0 \\ +\infty & \text{för } a\leq 0 \end{cases}$

$a \leq 0$: $f' > 0$ i $(0,\infty)$

$\Rightarrow$ för $a\leq 0$ är $f(x)$ strängt växande; f antar negativa värden nära 0, positiva för stora x

$\Rightarrow$ f har ett enda nollställe (d.v.s. exakt ett nollställe) $\forall\, a \leq 0$.

$a>0$: f har lok. max i $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$

$f \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x\to+\infty}]{} -\infty$

$\Rightarrow$ f har exakt ett nollställe i det fallet omm $f_{max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = 0$,

d.v.s. $\ln\frac{1}{\sqrt{2a}} - \cancel{a}\cdot\frac{1}{2\cancel{a}} =$

$= -\frac{1}{2}\left(\ln(2a) + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\ln(2a) = -2 \Leftrightarrow 2a = e^{-1}$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2e^{1}} = \frac{1}{2e}$

$\Rightarrow$ ekvationen har exakt en rot för $a \leq 0$ samt för $a = \frac{1}{2e}$.

(b) $\int \sqrt{x}\arctan\sqrt{x}\,dx =$ 5

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\arctan\sqrt{x} - \frac{\cancel{2}^{1}}{3}\int x^{\cancel{3/2}^{1}}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{\cancel{2\sqrt{x}}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} - \frac{1}{3}\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\ln(1+x) + C$$

---

5. $\displaystyle\int_\varepsilon^N \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_\varepsilon^N \frac{\ln x\,(1+x^2)'\,dx}{(1+x^2)^2}$

$$= -\frac{1}{2}\int_\varepsilon^N \ln x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x}{1+x^2}\right]_\varepsilon^N + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^N \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x}{1+x^2}\right]_\varepsilon^N + \frac{1}{4}\int_\varepsilon^N \frac{(x^2)'}{x^2(1+x^2)}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x}{1+x^2}\right]_\varepsilon^N + \frac{1}{4}\int_\varepsilon^{N}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)d(x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x}{1+x^2}\right]_\varepsilon^N + \frac{1}{4}\left[\ln x^2\right]_\varepsilon^N - \frac{1}{4}\left[\ln(1+x^2)\right]_\varepsilon^N =$$

$$= \underbrace{\left[\ldots\right]_\varepsilon^1}_{=A_\varepsilon} + \underbrace{\left[\ldots\right]_1^N}_{=B_N}$$

$$B_N = -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x}{1+x^2}\right]_1^N + \frac{1}{4}\left[\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right]_1^N \xrightarrow[N\to\infty]{} -\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\ln 2$$

$$A_\varepsilon = +\frac{1}{2}\left[\frac{\cancel{1}+x^2-\cancel{1}}{1+x^2}\ln x\right]_\varepsilon^1 -$$ ⑥

$$-\frac{1}{4}\left[\ln(1+x^2)\right]_\varepsilon^1 \longrightarrow 0 - \frac{1}{4}\ln 2$$

$$\Rightarrow \quad A_\varepsilon + B_N \xrightarrow[\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}]{} 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = 0.$$

---

6. $f(x)$ är uppenbarligen oändligt många ggr deriverbar för $x<0$ och $x>0$; återstår att bevisa deriverbarhet i "skarven" $x=0$.

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \left[t=\frac{1}{h}\right] = te^{-t^2} \xrightarrow[\substack{h\to 0_+ \\ (t\to+\infty)}]{} 0$$

$\Rightarrow$ f:s högerderivata i 0 är lika med f:s vänsterderivata i 0 $(=0)$

Induktivt inses att $f^{(k)}(x)$ för $x>0$ för alla k blir lika med polynom av $\frac{1}{x}$ gånger e^{-1/x^2}; precis som ovan blir då alla högerderivator i 0 lika med vänsterderivatorna i 0 $(=0)$.