Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2001
Datum: 2002-01-15, kl. 14.15-18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Robert Berman, tel. 0740-459022.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Låt f vara en funktion, kontinuerligt deriverbar för alla $x \in \mathbb{R}$, och sådan att dess enda stationära punkt är $x_0 = 3$. Ange om f har lokalt minimum, lokalt maximum eller inflexionspunkt i x_0 i vart och ett av fallen nedan. Motivera! (2p för varje deluppgift)

(a) $f'(1) = 3,\ f'(5) = -1$;

(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$;

(c) $f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(4) = 4,\ f(5) = 5$;

(d) $f'(2) = -1,\ f(3) = 1,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 3$.

2. Bestäm gränsvärdena

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e}{\sin^2 x}$; (5p)

(b) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$. (3p)

3. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4. Bestäm en primitiv funktion till

(a) $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}$; (4p)

(b) $\frac{x^2-1}{(x+3)^2(x^2+3)}$. (4p)

5. Ytan mellan x-axeln och kurvan $y = e^{-x}|\sin x|$, $0 \le x < \infty$, roterar ett varv kring x-axeln. Bestäm rotationskroppens volym. (7p)

6. Funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[0,1]$. Finn $\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^{2\epsilon} \frac{f(x)}{x}dx$. (7p)

7.(a) Definiera begreppet kontinuitet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)

(b) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)

(c) Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt, så är den kontinuerlig i samma punkt. Är det omvända påståendet sant? Motivera! (5p)

8. Formulera integralkalkylens medelvärdessats i dess båda varianter. Bevisa en av varianterna. (7p)

JM

Inledande matematisk analys

F1 TMA 970

15/1 - 2002

Lösningar

1. (a) $x_0 = 3$ är enda nollstället till f'

$f'(1) = 3 > 0 \Rightarrow f' > 0 \quad \forall x < 3$

$f'(5) = -1 < 0 \Rightarrow f' < 0 \quad \forall x > 3$

$\Rightarrow f$ har lokalt maximum i $x_0 = 3$

(b) f måste ha ett minsta värde i $\mathbb{R}$ (eftersom $f \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \infty$) och det måste antas i ett lokalt minimum, som är en stationär pkt $\Rightarrow x_0 = 3$ är ett lokalt minimum (det är den enda stationära pkten)

(c) $f(1) = 1$, $f(2) = 2 \Rightarrow \exists\, \xi \in (1,2)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = 1 > 0 \Rightarrow f' > 0 \ \forall x < 3$$

(som i (a))

analogt $\exists\, \eta \in (4,5)$: $f'(\eta) > 0$

$\Rightarrow f' > 0 \ \forall x > 3 \Rightarrow x_0 = 3$ inflexionspkt

(d) $f' < 0 \quad \forall x < 3$

f kan inte vara avtagande i $(3, \infty)$; $f' \neq 0$ i $(3,\infty)$

$\Rightarrow f$ växande i $(3, \infty)$

$\Rightarrow f$ har lokalt minimum i $x_0 = 3$.

2. (a) $\dfrac{e^{\cos x} - e}{\sin^2 x} =$

$$= e\,\frac{e^{\cos x - 1} - 1}{\sin^2 x} = e\,\frac{e^{\cos x-1}-1}{\cos x - 1}\cdot\frac{\cos x - 1}{1-\cos^2 x} =$$

$$= e\,\underbrace{\frac{e^{\cos x-1}-1}{\cos x - 1}}_{\substack{\downarrow\, x\to 0\\ 1}}\;\underbrace{\frac{1}{-(1+\cos x)}}_{\substack{\downarrow\, x\to 0\\ -\frac{1}{2}}} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{e}{2}$$

(b) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

---

3. $D_f: \quad x \geq 0, \quad x \neq 1$

$f \neq 0 \;\; \forall x \in D_f$, $\quad f > 0 \;\; \forall x \in [0,1)$,
$f < 0 \;\; \forall x \in (1,\infty)$

$\boxed{f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \text{"}\dfrac{2}{+0}\text{"} = +\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \text{"}\dfrac{2}{-0}\text{"} = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$

$\rightarrow$ $x = 1$ är vertikal asymptot
$y = -1$ är vågrät asymptot (i $+\infty$)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}) - \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2} > 0$$

$\rightarrow$ f växande i $[0,1)$ och i $(1,\infty)$
Inga stationära punkter, inga lokala extr.

(3 forts.) $\qquad f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$

$\Rightarrow$ grafen har vertikal tangent i $(0,1)$

$$f''(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})^{\cancel{2}} + \sqrt{x}\cdot \cancel{2}\cancel{(1-\sqrt{x})}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\right)}{x(1-\sqrt{x})^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= -\frac{1-\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^3} = \frac{3\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^3}$$

$f'' = 0$ för $x = \frac{1}{9}$

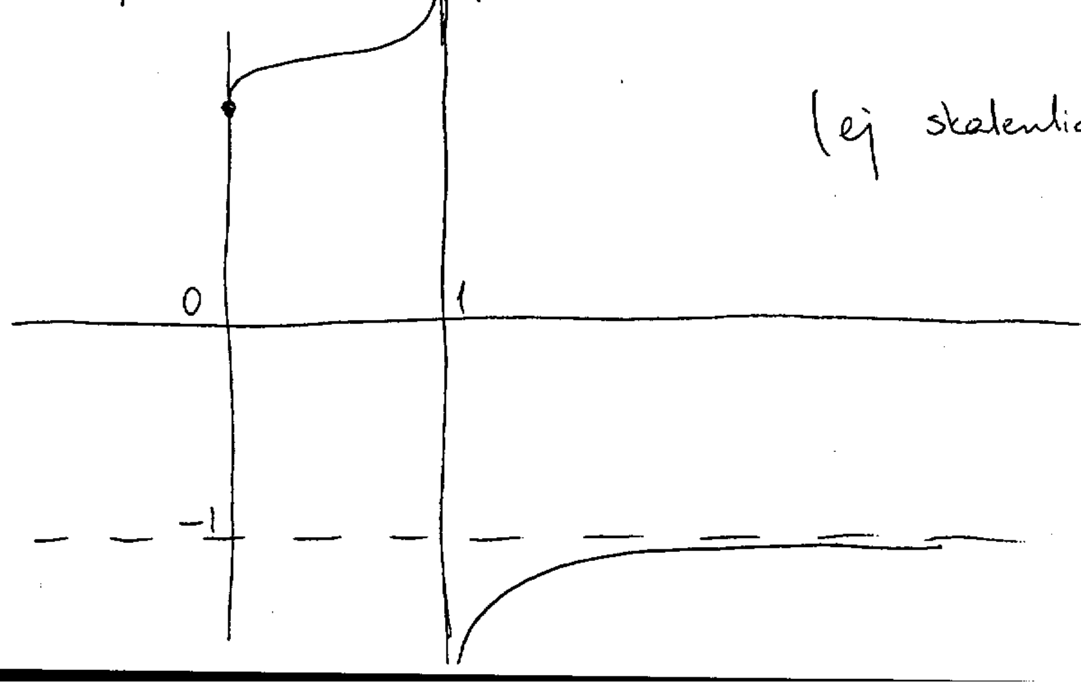
$x \in (0, \frac{1}{9}) \Rightarrow f''(x) < 0$

$x \in (\frac{1}{9}, 1) \Rightarrow f''(x) > 0$

$x \in (1, \infty) \Rightarrow f''(x) < 0$

$\Rightarrow$ inflexionspkt i $x = \frac{1}{9}$

x	0		$1/9$		1				$+\infty$
f	1	$\nearrow$	$\frown$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$		$\nearrow$	$\nearrow$	-1
f'	$+\infty$	$+$		$+$		$+$		$+$	$+$
f''		$-$	0	$+$		$-$		$-$	$-$



(ej skalenligt)

4. (a) $$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx = \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}(\ln x)'\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\ln x = t\\ (\ln x)'dx = dt\end{array}\right] = \int \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,dt =$$

$$= \int \frac{t+1-1}{\sqrt{1+t}}\,dt = \int \sqrt{t+1}\,dt - \int \frac{dt}{\sqrt{1+t}} =$$

$$= \frac{2}{3}(t+1)^{3/2} - 2(t+1)^{1/2}\,(+C) =$$

$$= \frac{2}{3}(\ln x + 1)^{3/2} - 2(\ln x+1)^{1/2}\underbrace{(+C)}_{\text{en primitiva}}$$

(b) $$\frac{x^2-1}{(x+3)^2(x^2+3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$x^2-1 = A(x+3)(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)(x+3)^2$$

$x=-3$: $8 = 12B$ $\quad B = \frac{2}{3}$

x^3 : $0 = A + C \Rightarrow C = -A$

x^0 : $-1 = 9A + 3B + 9D \Rightarrow A + D = -\frac{1}{3}$

x^2 : $1 = 3A + B + 6C + D$

$$\Rightarrow 1 = 3A + \frac{2}{3} - 6A - \frac{1}{3} - A \Rightarrow -4A = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{6}, \quad C = \frac{1}{6}, \quad D = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2-1}{(x+3)^2(x^2+3)}\,dx = -\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+3} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x+3)^2} +$$

$$+ \frac{1}{6\cdot 2}\int \frac{(x^2)'dx}{x^2+3} - \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x^2+3} =$$

4 forts.

$$= -\frac{1}{6}\ln|x+3| - \frac{2}{3}\frac{1}{x+3} +$$

$$+\frac{1}{12}\ln(x^2+3) - \frac{1\cdot\sqrt{3}}{6\cdot 3}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\,dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|x+3| - \frac{2}{3}\frac{1}{x+3} + \frac{1}{12}\ln(x^2+3) -$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{18}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} \qquad \text{(en primitiv)}$$

---

5. $$V = \pi\int_0^\infty e^{-2x}\sin^2 x\,dx =$$

$$= \pi\int_0^\infty e^{-2x}\,\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$\int_0^p e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\right]_0^p = -\frac{1}{2}\left(e^{-2p}-1\right) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

$$\int_0^p e^{-2x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2p} e^{-t}\underbrace{\cos t}_{=(\sin t)'}\,dt \overset{\text{p.i.}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-t}\sin t\right]_0^{2p} + \frac{1}{2}\int_0^{2p} e^{-t}\underbrace{\sin t}_{=(-\cos t)'}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2p}\sin 2p - 0 - \frac{1}{2}\left[e^{-t}\cos t\right]_0^{2p} + \frac{1}{2}\int_0^{2p}(-e^{-t}\cos t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2p}\sin 2p - \frac{1}{2}e^{-2p}\cos 2p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{2p} e^{-t}\cos t\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{2p} e^{-t}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\underset{\substack{\downarrow p\to\infty \\ 0}}{e^{-2p}}\underbrace{(\sin 2p - \cos 2p)}_{\text{begr. funktion}} + \frac{1}{2}$$

5 forts.

$$\Rightarrow \int_0^p e^{-2x} \cos 2x \, dx \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$

$$V = \pi \lim_{p\to\infty} \left[\frac{1}{2}\int_0^p e^{-2x} dx - \frac{1}{2}\int_0^p e^{-2x} \cos 2x \, dx \right] =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{8}$$

6.

$$\frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in [\varepsilon, 2\varepsilon] \quad \text{för} \quad \varepsilon > 0$$

$$\frac{1}{x} < 0 \quad \forall x \in [2\varepsilon, \varepsilon] \quad \text{för} \quad \varepsilon < 0$$

$\Rightarrow$ enligt integralkalkylens (generaliserade) medelvärdessats gäller

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx = f(\xi_\varepsilon) \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{dx}{x} =$$

$$= f(\xi_\varepsilon) \left[\ln|x| \right]_\varepsilon^{2\varepsilon} = f(\xi_\varepsilon)\left(\ln|2\varepsilon| - \ln|\varepsilon| \right) =$$

$$= f(\xi_\varepsilon) \ln\left(\left| \frac{2\varepsilon}{\varepsilon} \right| \right) = f(\xi_\varepsilon) \ln 2 ,$$

där ξ_ε ligger mellan ε och 2ε

$\varepsilon \to 0 \Rightarrow 2\varepsilon \to 0$

$$\Rightarrow \xi_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx = f(0) \ln 2$$

(Eftersom det var givet att allt utspelar sig på $[0,1]$ är bara $\varepsilon > 0$ intressant, men jag glömde det ovan.)