Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2001
Datum: 2001-10-24, kl. 14.15-18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Per Hörfelt, tel. 0740-459022.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent. (Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^3+1}\,dx; \quad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{x+1}{x^4+1}\,dx; \quad \text{(c)} \int_1^\infty \frac{x^2\ln x}{x^4+1}\,dx; \quad \text{(d)} \int_2^\infty \frac{dx}{\ln x};$$

$$\text{(e)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad \text{(f)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}; \quad \text{(g)} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}; \quad \text{(h)} \int_0^1 x\ln x\,dx.$$

2. Bestäm gränsvärdena

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$; (4p)

(b) $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$. (4p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Beräkna $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$. (4p)

(b) Beräkna arean av det begränsade område, som innesluts av kurvorna $y=x$ och $y=x+\sin^2 x$, $0\le x\le \pi$. (4p)

5. Rita grafen till funktionen $\arccos(\cos x)$. (6p)

6. Funktionen f är deriverbar och obegränsad på det begränsade öppna intervallet (a,b). Visa att f' också är obegränsad på (a,b). (6p) Ge ett exempel som visar att det omvända inte gäller, d.v.s. ge exempel på en deriverbar begränsad funktion (på ett öppet och begränsat intervall), vars derivata är obegränsad. (1p) Ge också ett exempel som visar att påståendet inte är sant för obegränsade intervall. (1p)

7.(a) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)

(b) Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (inklusive Rolles sats). (7p)

8.(a) Formulera regeln för derivata av en produkt. (1p)

(b) Formulera och bevisa satsen om partiell integration (för obestämda integraler). (5p)

/JM

TMA970

Inledande matematisk analys F1

24/10 – 01

Lösningar

1. (a) divergent, (b) konvergent
(c) konvergent, (d) divergent,
(e) konvergent, (f) konvergent
(g) konvergent, (h) konvergent.

---

2. (a) $\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{2\cancel{\sin^2\frac{x}{2}}}{4\cancel{\sin^2\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$

alternativ lösning:

$$\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin^2 x\,(1+\cos x)} = \frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{=\sin^2 x}}{\sin^2 x\,(1+\cos x)}$$

$$= \frac{1}{1+\cos x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2};$$

(b) $\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} =$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + x \cancel{+1} - \cancel{x^2} + x \cancel{-1}}{|x|\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}_{\xrightarrow[x\to-\infty]{} 1} + \underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}_{\xrightarrow[x\to-\infty]{} 1}\right)} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$$

$\boxed{2}$

3. $f(x) = (x+2)\, e^{\frac{1}{x}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

Nollställen: endast $x = -2$ $\quad$ $f < 0 \ \forall x < -2$, $\ f > 0 \ \forall x > -2 \ (\neq 0)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) \ (= \text{"}-\infty \cdot e^0\text{"}) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) \ (= \text{"}+\infty \cdot e^0\text{"}) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) \ (= \text{"}2 \cdot e^{-\infty}\text{"}) = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) \ (= \text{"}2 \cdot e^{+\infty}\text{"}) = +\infty$

Asymptoter: $x = 0$ är vertikal asymptot

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x+2}{x} e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1 \cdot e^0 = 1 \ (= k)$$

$$f(x) - x = (x+2)e^{\frac{1}{x}} - x = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + 2e^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{e^{1/x} - 1}{\underset{x \to \pm\infty}{1/x \to 0}} + 2e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1 + 2 = 3 \ (= m)$$

$\Rightarrow$ $y = x + 3$ asymptot (sned) i $\pm\infty$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1/x} - \frac{x+2}{x^2} e^{1/x} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2} e^{1/x} =$$

$$= \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} e^{1/x}$$

$f' = 0$ för $x = -1$ och $x = 2$

Teckenstudie: $f' > 0 \ \forall x < -1 \ \& \ \forall x > 2$

$f' < 0 \ \forall x \in (-1, 0) \ \& \ \forall x \in (0, 2)$

$\left(\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0\right)$

$$f''(x) = e^{1/x} \; \frac{5x+2}{x^4}$$

$f'' = 0$ för $x = -\frac{2}{5}$

$f'' < 0 \quad \forall x < -\frac{2}{5}$

$f'' > 0 \quad \forall x \in (-\frac{2}{5}, 0) \;\&\; \forall x \in (0, \infty)$

$\Rightarrow$ f har lok max i $x = -1$

f har lok. min i $x = 2$

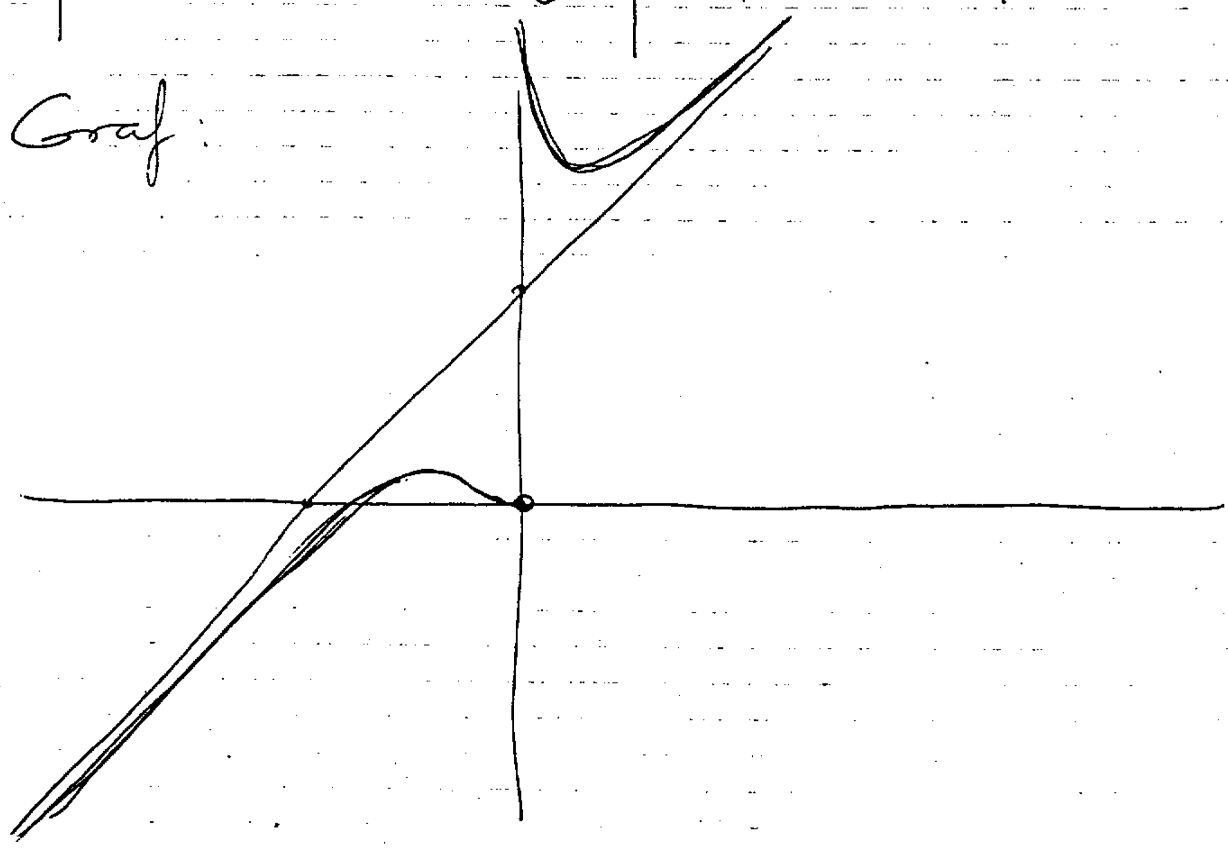
f har inflexionspkt i $x = -\frac{2}{5}$

konvex : i $(-\frac{2}{5}, 0)$ och $(0, \infty)$

konkav : i $(-\infty, -\frac{2}{5})$

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{5}{2}$	0		2		$+\infty$
f	$y=x+3$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	lok max $1/e$	infl. $\searrow$		0 | $+\infty$	$\searrow$	lok. min $4\sqrt{e}$	$\nearrow$	$y=x+3$ $+\infty$
f'		$+$			0	$-$		(0) |	$-$	0	$+$	
f''		$-$					0 $+$	|	$+$		$+$	

Graf:



4. (a) $\int 1 \cdot \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) dx =$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx =$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}}\, dx =$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1} + C$$

(b) Arean $\overset{*}{=} \int_0^{\pi} \left((x+\sin^2 x) - x \right) dx =$

$$= \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

(* eftersom $x + \sin^2 x \geq x \quad \forall x$)

---

5. $\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$

$\arccos(\cos(-x)) = \arccos(\cos x) \quad \forall x$

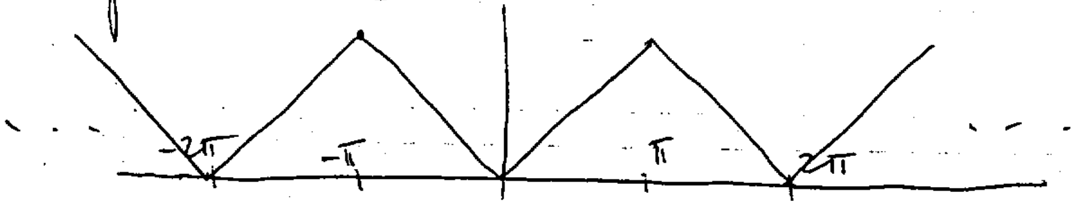
$\Rightarrow$ funktionen är jämn

$\Rightarrow \arccos(\cos x) = |x| \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$

$\arccos(\cos(x+2\pi)) = \arccos(\cos x) \quad \forall x$

$\Rightarrow$ funktionen är periodisk med perioden 2π

Graf



6. Låt $x_0 \in (a,b)$; $\forall x \in (a,b)$ (5)

(Lagranges sats)

$$\exists \xi_x : f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x)(x - x_0)$$

ξ_x mellan x_0 och x

Antag att $|f'(x)| \leq A \quad \forall x \in (a,b)$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \underbrace{|f(x_0)|}_{\text{const}} + A|x - x_0| <$$

$$< |f(x_0)| + A(b-a)$$

$\Rightarrow f$ begränsad på (a,b)

Motsägelse!

$\Rightarrow f'$ obegränsad på (a,b)

$f(x) = \arcsin x$ begränsad på $(-1, 1)$, men dess derivata är obegränsad

---

$f(x) = x$ har begränsad derivata, men är själv obegränsad på $(0, \infty)$