Tentamensskrivning i **Inledande Matematisk Analys (TMA970), F1**, den 20/10-1999, kl 14.15-18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Jakob Hultén, ankn 5323

OBS ! På skrivningsomslaget skall anges namn, personnummer, linje och inskrivningsår.

1. Beräkna rotationsvolymerna, då området $\left\{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1 + x^2\right\}$ roterar (ett varv) kring
   a) x-axeln b) y-axeln (7p)

2. Rita kurvan $y = \sqrt{x^2 + 4x + 13}$ (i sina huvuddrag) med angivande av maxima, minima och asymptoter. (8p)

3. Bevisa att för alla heltal $n \ge 1$ gäller att $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3^k} = \frac{3}{2} - \frac{n^2 + 3n + 3}{2 \cdot 3^n}$. (7p)

4. Beräkna $\int_0^{\infty} \frac{(5x - 1)\,dx}{x^3 + 7x^2 + 17x + 11}$. (8p)

5. En vätska med densiteten ρ blandas med en annan vätska med densiteten ρ_0 (utan att några kemiska reaktioner inträffar). Antag att p och q anger mass respektive volymsandelen av den första vätskan i blandningen, (dvs $100p$ och $100q$ anger mass och volymsprocenterna). Härled en formel för sambandet mellan p och q, samt bestäm maximala skillnaden mellan p och q, (dvs beräkna största värdet för $|\,p - q\,|$). (7p)

6. För vilka reella konstanter α, β och γ konvergerar integralen
   $$\int_0^{\pi} x^{\alpha}\,(\sin x)^{\beta}\,|\cos x|^{\gamma}\,dx \quad ?$$ (7p)

7. Definiera begreppet derivata, samt härled en formel för derivatan av en produkt $f(x)g(x)$. (7p)

8. a) Definiera begreppet "likformigt kontinuerlig funktion". (2p)
   b) Definiera begreppet Riemann-integral, samt bevisa att en kontinuerlig funktion på ett slutet, begränsat intervall $[a,b]$ är Riemann-integrerbar. (7p)

/ RP

Inl. mat. analys F1 20/10 - 1999

1. a) Rot.-volym kring x-axeln $= \int_0^1 \pi y^2 \, dx = \pi \int_0^1 (1+x^2)^2 dx =$

$$= \pi \int_0^1 1 + 2x^2 + x^4 \, dx = \pi \left[x + 2x^3/3 + x^5/5 \right]_0^1 = 28\pi/15.$$

b) Rot.-volym kring y-axeln $= 2\pi \int_0^1 xy \, dx = 2\pi \int_0^1 x(1+x^2) \, dx =$

$$= \pi \left[\frac{(1+x^2)^2}{2} \right]_0^1 = 3\pi/2.$$

2. Eftersom $y = \sqrt{x^2+4x+13} = \sqrt{(x+2)^2+9}$, så är funktionen kontinuerlig på $\mathbb{R}$. Därmed kan inga lodräta asymptoter finnas. Det är också klart att funktionen är strängt avtagande på $(-\infty,2]$ och strängt växande på $[-2,\infty)$. Globalt minimum är alltså $y(-2) = 3$. Eftersom:

$$y/x = \sqrt{x^2+4x+13}/x = \frac{|x|}{x}\sqrt{1+4/x+13/x^2} \to \begin{cases} 1, & x \to +\infty \\ -1, & x \to -\infty \end{cases}$$

så är riktningskoeff. för en asymptot i $\pm\infty$ lika med ± 1 (resp.).

$\underline{+\infty}$: $y - x = \sqrt{x^2+4x+13} - x = \dfrac{x^2+4x+13-x^2}{\sqrt{x^2+4x+13}+x} =$

$$= \frac{4+13/x}{\sqrt{1+4/x+13/x^2}+1} \to 2, \quad x \to +\infty.$$

Alltså är $y = x+2$ en asymptot i $+\infty$.

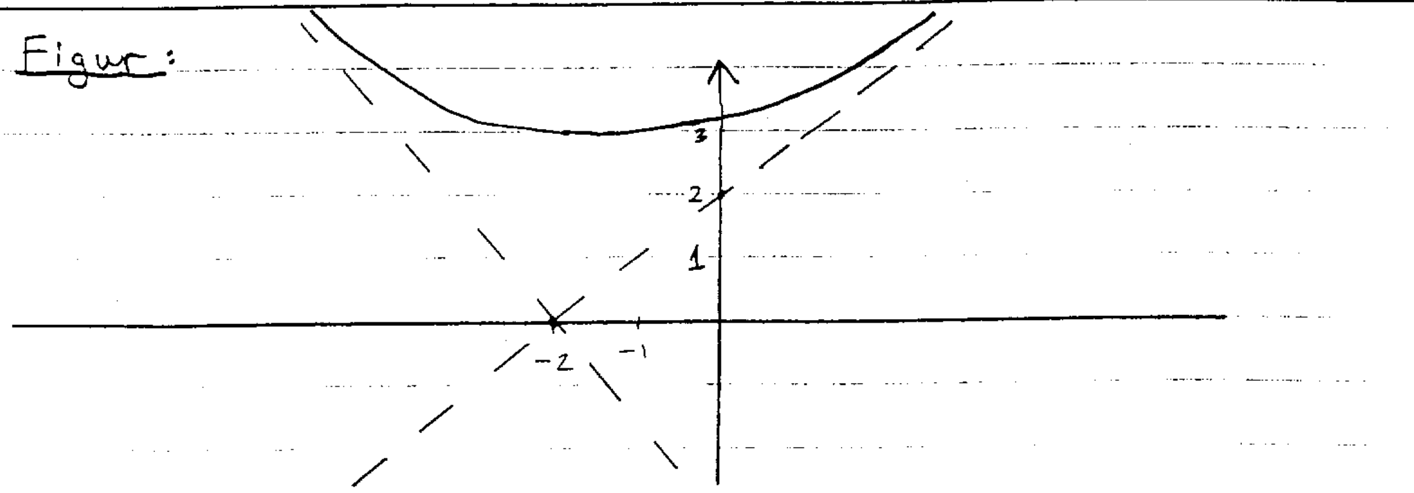
$\underline{-\infty}$: $y + x = \sqrt{x^2+4x+13} + x = \dfrac{x^2+4x+13-x^2}{\sqrt{x^2+4x+13}-x} =$

$$= \frac{4+13/x}{-\sqrt{1+4/x+13/x^2}-1} \to -2, \quad x \to -\infty.$$

Alltså är $y = -x-2$ en asymptot i $-\infty$.

Inl. mat. analys F1 20/10 - 1999

Figur:



3. Vi bevisar påståendet med induktion över n.

Sätt $VL(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2/3^k$ och $HL(n) = \frac{3}{2} - \frac{n^2+3n+3}{2\cdot 3^n}$.

I $VL(1) = \sum_{k=1}^{1} k^2/3^k = \frac{1}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1+3+3}{6} = HL(1)$: OK!

II Antag att $VL(p) = HL(p)$ för något $p \geq 1$.

$$\Rightarrow VL(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1} k^2/3^k = VL(p) + \frac{(p+1)^2}{3^{p+1}} = HL(p) + \frac{p^2+2p+1}{3^{p+1}} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{p^2+3p+3}{2\cdot 3^p} + \frac{p^2+2p+1}{3^{p+1}} = \frac{3}{2} - \left(\frac{3p^2+9p+9-2p^2-4p-2}{2\cdot 3^{p+1}}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{p^2+5p+7}{2\cdot 3^{p+1}} = \frac{3}{2} - \frac{(p+1)^2+3(p+1)+3}{2\cdot 3^{p+1}} = HL(p+1) \text{ : Ok!}$$

III Enligt induktionsaxiomet så gäller att $VL(n) = HL(n)$, $n \geq 1$.

4. $$\frac{5x-1}{x^3+7x^2+17x+11} = \frac{5x-1}{(x+1)(x^2+6x+11)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+11}$$

$$\Leftrightarrow 5x-1 = A(x^2+6x+11) + (Bx+C)(x+1)$$

$x=-1 \Rightarrow A = -1 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow C = 10$

$$\int_0^y \frac{5x-1}{x^3+7x^2+17x+11}\,dx = \int_0^y \frac{-1}{x+1} + \frac{x+10}{x^2+6x+11}\,dx =$$

Inl. mat. analys F1 20/10 – 1999

$$= \int_0^y \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{2x+6}{x^2+6x+11} + \frac{7}{x^2+6x+11}\,dx$$

$$= \int_0^y \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{2x+6}{x^2+6x+11} + \frac{7}{2}\frac{1}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \Big[-\ln|x+1| + \tfrac{1}{2}\ln|x^2+6x+11| + \tfrac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\tfrac{x+3}{\sqrt{2}}\right)\Big]_0^y =$$

$$= -\ln|y+1| + \tfrac{1}{2}\ln|y^2+6y+11| + \tfrac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\tfrac{y+3}{\sqrt{2}}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}\ln(11) - \tfrac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\tfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \ln\left|\frac{(y^2+6y+11)^{1/2}}{y+1}\right| + \tfrac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\tfrac{y+3}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{1}{2}\ln(11) - \tfrac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\tfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \ln\left|\frac{(1+6/y+11/y^2)^{1/2}}{1+1/y}\right| + \tfrac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\tfrac{y+3}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{1}{2}\ln(11) - \tfrac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\tfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{7\pi}{2\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2}\ln(11) - \tfrac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\tfrac{3}{\sqrt{2}}\right), \quad y \to \infty.$$

<u>Slutsats</u>: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{5x-1}{x^3+7x^2+17x+11}\,dx = \frac{7\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\ln(11)}{2} - \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$

<u>5.</u> Vätska I : $\rho = m/V$ (m = massan, V = volym)

Vätska II : $\rho_0 = m_0/V_0$ (m_0 = massan, V_0 = volym)

Efter blandning : $p = \frac{m}{m+m_0}$ och $q = \frac{V}{V+V_0}$.

<u>Sambandet</u>: $q = \frac{V}{V+V_0} \Rightarrow q(V+V_0) = V \Rightarrow V_0 = V(1-q)/q$

$$\Rightarrow p = \frac{m}{m+m_0} = \frac{\rho V}{\rho V + \rho_0 V_0} = \frac{\rho V}{\rho V + \rho_0 V(1-q)/q} = \frac{\rho}{\rho + \rho_0 \frac{1-q}{q}}.$$

$$|p-q| = \left|\frac{\rho V}{\rho V + \rho_0 V_0} - \frac{V}{V+V_0}\right| = \left|\frac{\rho}{\rho+\rho_0 t} - \frac{1}{1+t}\right| =$$

$$= \left|\frac{\rho + \rho t - \rho - \rho_0 t}{(\rho+\rho_0 t)(1+t)}\right| = \frac{t|\rho-\rho_0|}{(\rho+\rho_0 t)(1+t)}, \quad \text{där} \quad t = V_0/V > 0.$$

Sätt nu $f(t) = \dfrac{t}{(\rho+\rho_0 t)(1+t)}$.

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{(\rho+\rho_0 t)(1+t) - t(\rho_0(1+t)+\rho+\rho_0 t)}{(\rho+\rho_0 t)^2(1+t)^2} =$$

$$= \frac{\rho-\rho_0 t^2}{(\rho+\rho_0 t)^2(1+t)^2} = \begin{cases} >0 \iff 0<t<\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \\ =0 \iff t=\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \\ <0 \iff t>\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}. \end{cases}$$

Alltså är det största värdet av $|p-q|$:

$$f\left(\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}\right)|\rho-\rho_0| = \frac{\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}|\rho-\rho_0|}{\left(\rho+\rho_0\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}\right)} = \frac{|\sqrt{\rho}-\sqrt{\rho_0}|}{\sqrt{\rho}+\sqrt{\rho_0}}.$$

---

6. Integralen är generaliserad i $x=0$, $x=\pi/2$ och $x=\pi$. Därför gör vi uppdelningen:

$$\int_0^{\pi} x^\alpha(\sin x)^\beta|\cos x|^\gamma = \underbrace{\int_0^{\pi/4} x^\alpha(\sin x)^\beta(\cos x)^\gamma\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2} x^\alpha(\sin x)^\beta(\cos x)^\gamma\,dx}_{I_2} +$$

$$+ \underbrace{\int_{\pi/2}^{3\pi/4} x^\alpha(\sin x)^\beta(-\cos x)^\gamma\,dx}_{I_3} + \underbrace{\int_{3\pi/4}^{\pi} x^\alpha(\sin x)^\beta(-\cos x)^\gamma\,dx}_{I_4}.$$

Nu behandlar vi I_1, I_2, I_3 och I_4 separat.

$\underline{I_1}$: Eftersom $x^\alpha(\sin x)^\beta(\cos x)^\gamma = x^{\alpha+\beta}\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\beta(\cos x)^\gamma}_{\text{Begr. på } (0,\pi/4) \text{ och } >0 \text{ i en omgivning till } x=0,}$

så är I_1 konvergent $\iff \int_0^{\pi/4} x^{\alpha+\beta}\,dx$ konvergent $\iff \alpha+\beta>-1$.

$\underline{I_2} = [t=\pi/2-x] = \int_0^{\pi/4}(\pi/2-t)^\alpha(\cos t)^\beta(\sin t)^\gamma\,dt =$

Inl. mat. analys F1 20/10 – 1999.

$$= \int_0^{\pi/4} \underbrace{(\tfrac{\pi}{2}-t)^{\alpha}(\cos t)^{\beta}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\gamma}}_{\substack{\text{Begränsad på } (0,\pi/4) \\ \text{och } >0 \text{ i en omg.} \\ \text{till } t=0.}} \cdot t^{\gamma}\,dt \; .$$

$\Rightarrow$ I_2 konvergent $\Leftrightarrow \int_0^{\pi/4} t^{\gamma}\,dt$ konv. $\Leftrightarrow \gamma > -1$.

$\underline{I_3}$ konvergent $\Leftrightarrow \gamma > -1$ (pss som för I_2)

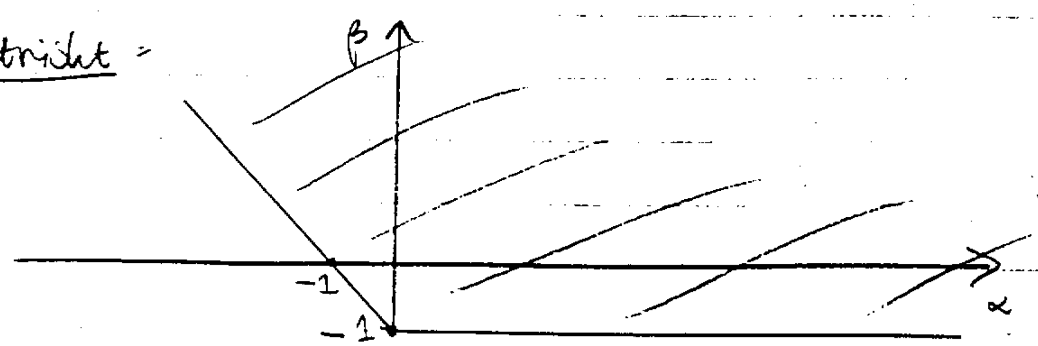
$$\underline{I_4} = [t = \pi - x] = \int_0^{\pi/4} (\pi - t)^{\alpha} (\sin t)^{\beta} (\cos t)^{\gamma}\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \underbrace{(\pi-t)^{\alpha}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\beta}(\cos t)^{\gamma}}_{\substack{\text{Begr. på } (0,\pi/4) \text{ och} \\ >0 \text{ i en omg. till } t=0.}} t^{\beta}\,dt \; .$$

$\Rightarrow I_4$ konvergent $\Leftrightarrow \int_0^{\pi/4} t^{\beta}\,dt$ konv. $\Leftrightarrow \beta > -1$.

Slutsats. I är konvergent $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta > -1 \\ \beta > -1 \\ \gamma > -1 \end{cases}$.

Geometriskt:



och $\gamma > -1$.