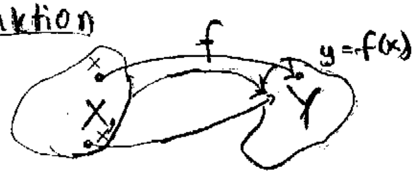
Inl Analys

30kr

Övn.

Analys i en variabel . övn.

Funktion



regel: för varje $x \in X$ fins ett $y = f(x)$

$y = f(\cancel{X})$

ok att två punkter har samma y-värde

Får ej hända:

Ett x- kan ej ge 2 y-värden
Ingen funktion då.

$f : D_f \to \mathbb{R}$ $\quad D_f$ = definitionsmängd

graf

Ex: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ Begränsningar som måste uppfyllas

1. $\sqrt{\ }$: $1-x \geq 0$ $\quad x \leq 1$

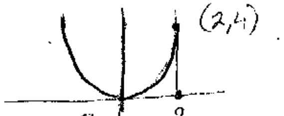
2. nämnare : $\sqrt{1-x} \neq 0$ $\quad x \neq 1$

$\Big\} \; D_f : x < 1$

Graf :

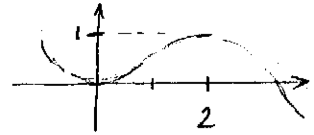
$G_f = \{(x,y) : x \in D_f , y = f(x)\}$

Ex:



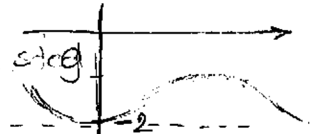
$f(x) = x^2$

1.2 $y = f(x)$



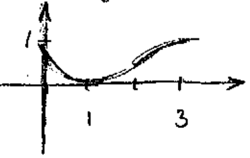
a. $y = f(x) - 2$ $\quad$ d. $f(2x)$
b. $y = f(x-1)$ $\quad$ e. $-f(x)$
c. $y = \frac{1}{2} f(x)$ $\quad$ f. $y = f(-x)$

a. Sänk 2 steg



$f(x) \pm c$
horisontell förflyttning ?

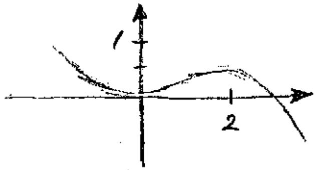
b. $y = f(x-1)$ dvs $x=3$ för toppen, flytta åt höger.



$f(x \pm c)$: vertikal förflyttning

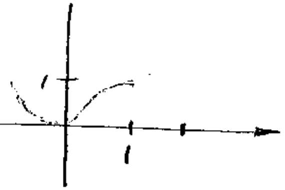
c. $y = \frac{1}{2} f(x)$

halvering



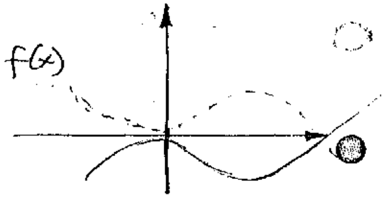
d. $y = f(2x)$

toppen vid ~~$x=2$~~ om $2x=2$ är $x=1$.
dvs: trycks ihop



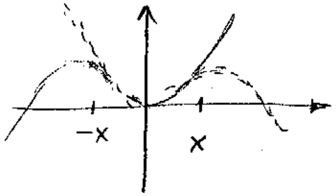
e. $y = -f(x)$

Spegling i x-axeln



f. $y = f(-x)$

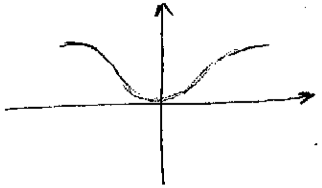
Spegling i y-axeln



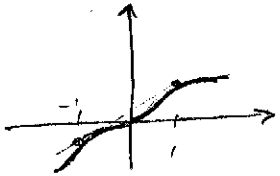
- Den enda funktion som speglas i x-axeln, och förblir densamma är $x=0$

- Spegling i y-axeln: $|x|$, cos $\quad$ Jämna funk.

Jämn Funktion



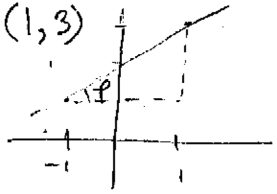
Udda Funktion



.3. $f(x) = x^2+x+1$ $y = g(x)$: ekvationen för den räta linjen genom $(-1, f(-1)), (1, f(1))$

Ange $g(x)$, rita f:s och g:s grafer i samma figur. Var gäller $f(x) < g(x)$?

$P_1 = (-1, f(-1)) = (\overset{x_1}{-1}, \overset{y_1}{1})$, $P_2 = (1, f(1)) = (\overset{x_2}{1}, \overset{y_2}{3})$



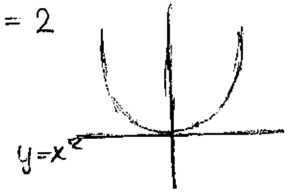
Rät linje genom P_1 och P_2

$y = kx+b$ $k = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \tan(\varphi)$

$k = \dfrac{3-1}{1-(-1)} = \dfrac{2}{2} = 1$

$b = y_1 - kx_1 \Leftrightarrow 1 - 1\cdot(-1) \Leftrightarrow 1+1 = 2$

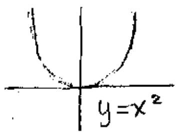
$y = g(x) = x+2$



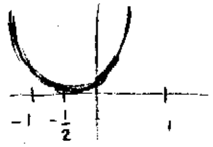
Utgå från den

Hur få fram graften ?

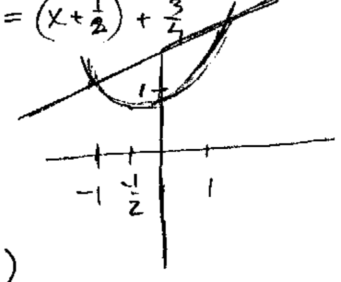
1. Kvadrat komplettera $y = x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1$
$= (x+\frac{1}{2}) + \frac{3}{4}$



x^2 Spets i noll



$(x+\frac{1}{2})$ Spets i
$x+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$



10. $\underline{f(x) < g(x)}$ för $x \in (-1, 1)$
= f's graf under g's graf

$\Leftrightarrow$ 10. Var ligger f's graf under g's graf ?

-1 och 1 är ej med, för i de punkterna sammanfaller linjerna.

$x \in (-1, 1) \Leftrightarrow -1 < x < 1$

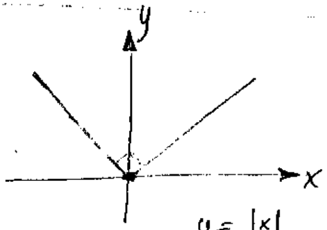
$x \in (-1, 1) \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow]-1, 1[$

$x \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

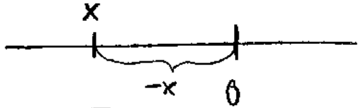
$x \in [-1, 1) \Leftrightarrow -1 \leq x < 1$

Absolutbelopp

def: $|x| = \begin{cases} x & \text{för } x \geqslant 0 \\ -x & \text{för } x < 0 \end{cases}$

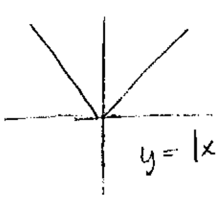


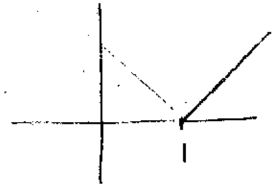
$|x|$ avståndet från x till 0



Ex. $|\underbrace{x+3}_{t}| = \begin{cases} t & \text{om } t \geqslant 0 \\ -t & \text{om } t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 & \text{om } x \geqslant -3 \\ -x-3 & \text{om } x < -3 \end{cases}$

17.b. $y = |x-1|$ spets då $(x-1) = 0$ dvs $x = +1$



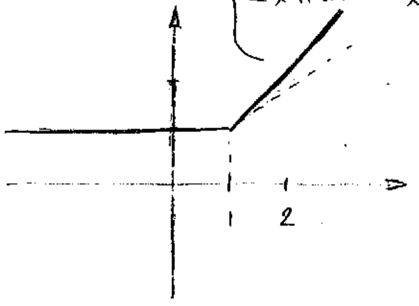


18.c. $y = |x-1| + x$

1. Skriv ut i klammertermen
2. öbs. brytpunkt då $|x-1| = 0$

$y = |x-1| + x \begin{cases} x-1+x & x \geqslant 1 \\ -x+1+x & x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 & x \geqslant 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$

brantare an 1 koef. fram för x som är >1



$|x|$ ← vilken linjär funk. av x ska läggas till för att få ett enkelt fall?

$|x| + x = \begin{cases} 2x & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$|x-1| + (x-1) + 1$

FKM. 30.c.

1. $x+5$ och $x=-5$ händer saker = brytpunkter

Lös ekvationen (i intervallet) $|x-5| + 3|x+5| = 20$

1. $x \in (-\infty, -5)$
   $-\infty < x < -5$

$x-5<0 \; , \; x+5<0.$

$\Leftrightarrow -(x-5) - 3(x+5) = 20 \Leftrightarrow -4x - 10 = 20 \Leftrightarrow -4x = 30$

$x = -\frac{30}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{15}{2}$

Lösningen enbart en lösning om ligger i rätt intervall.

Ligger $x = \frac{-15}{2}$ i $(-\infty, 5)$? Ja! $\Rightarrow \boxed{x_1 = -\frac{15}{2}}$

2. $x \in [-5, +5) \quad -5 \leqslant x < 5$

$x-5<0 \; , \; x+5 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow -(x-5) + 3(x+5) = 20 \Leftrightarrow 2x+20 = 20 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x=0$

$x=0 \in [-5,5) \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$

ta likhetstecken på vänster sid

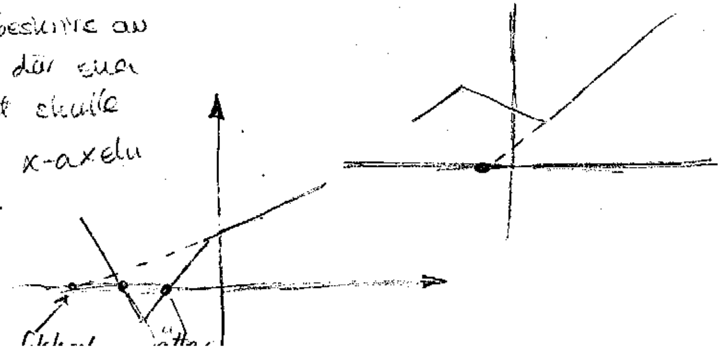
3. $x \in [5, +\infty)$

$x-5 \geqslant 0 \quad x+5 > 0$

$x-5 + 3(x+5) = 20 \Leftrightarrow 4x-5+15 = 20 \Leftrightarrow 4x + 10 = 20$

$\Leftrightarrow x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \notin [5, \infty) \Rightarrow$ ej lösning

Lösningen beskriver av den punkt där ena absolutbeloppet skulle ha skurit x-axeln



19.a. $(x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x - 1) / (x^3+x+1)$

kvot

$$\begin{array}{l}
x^2 + 3x - 3 \\
\hline
x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \quad \boxed{x^3+x+1} \\
-(x^5 + \quad + x^3 + x^2) \\
0 \quad 3x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x - 1 \\
-(3x^4 \quad + 3x^2 + 3x) \\
0 \; -3x^3 - 4x^2 - x - 1 \\
-(-3x^3 - \quad 3x - 3) \\
\hline
-4x^2 + 2x + 2 \text{ - rest}
\end{array}$$

21.g. $x^6 - 64 = (x^3)^2 - 8^2$

$(x^3+8)(x^3-8) \Leftrightarrow (x^3+2^3)(x^3-2^3)$

$(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$

22. $p(x) = x^5 - 10x^2 + 15x - 6$ har nollstället 1.

Bestäm nollställets multiplicitet och faktorisera polynomet.

$P(x) = (x-1)^1 (x+2)^1 (x-3)^3 (x-5)^1 x^2$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -2 \quad (x_{3,4,5} = 3) \quad x_6 = 5 \quad (x_{7,8} = 0)$

multiplicitet 3 multiplicitet = 2

Polynom av grad = 8 har 8 nollställen.

övriga nollställen: enkla nollställen.

$x=1$ är ett nollställe $\Rightarrow p(x)$ delbart med $x-1$

$p(x) = (x-1)(x^4 \; ? \; ? \; ? \; ? \; +6)$

(Försök anpassa koefficienterna genom att tänka sig resten. Prova)

$(x-1)(x^4 + x^3$

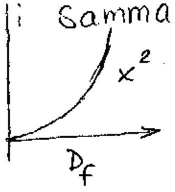
x^3 fås genom x^4 delat med x el.

6/9/2001

INLEDANDE ANALYS ÖVNING 2

46. f är kvadrerings funktionen med $D_f = \{x : x \geq 0\}$
Bestäm den inversa funktionen, och rita graferna till f och f^{-1} i samma diagram.

$f(x) = x^2$



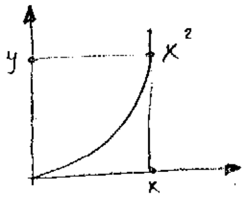
injektiv

Surjektiv: ta bort alla y som inte är bilden av något alls.

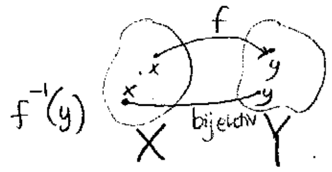
$f : D_f \rightarrow V_f$ förbjuda alla y värden under x-axeln för vilka vi ej kan hitta en x-motsvarig

$V_f = \{y : y \geq 0\}$

$f\ [0, \infty)$ bijektiv



*givet ett y - leta x-värdet för denna.



injektiv: varje x går bara till ett y
surjektiv: varje y är slutet på en pil
bijektiv: varje y är slutet på en enda pil.

Def: $f : X \rightarrow Y$ bijektiv

$f^{-1} : Y \rightarrow X$ "f invers" är en funktion s.a

$f^{-1}(f(x)) = x$

$f(f^{-1}(x)) = y$

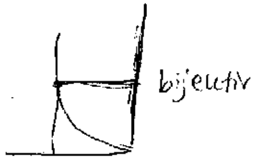
f och f^{-1} "tar ut varandra".

OBS! 1) $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$

2) Givet en formel för f, är f^{-1} i högsta grad beroende av mängderna X, Y.

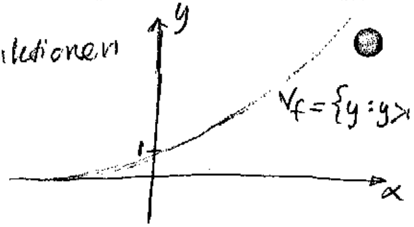
Ex: $f(x) = x^2$ $f : (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty]$

$f^{-1}(y) = -\sqrt{y} \leq 0$



Glöm ej tecknet !!.

b. $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ Exponentialfunktionen



- strängt växande $\Rightarrow$ injektiv

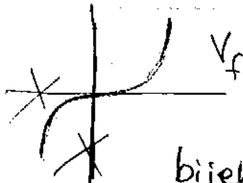
sedan att

kan ei bli noll el. ∞

$f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$

$f^{-1}(y) = ?$ $f(f^{-1}(y)) = y$ $e^{\boxed{f^{-1}(y)}} = y \Leftrightarrow e^{\boxed{\ln(y)}} = y$

c. $f(x) = x^3$, $x \geq 0$



$V_f = [0, \infty)$

(då $x \geq 0 \Rightarrow$ måste skippa även $y < 0$ så att funktionen blir bijektiv)

bijektiv

- Visa att det finns en invers
- Sedan ~~v~~isa att f^{-1} är inversen.

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{3}}$

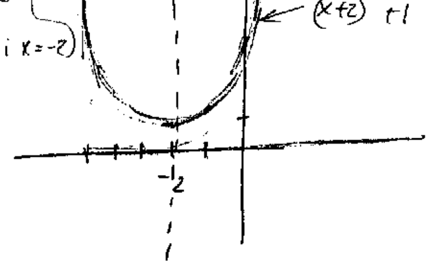
47. de. Bestäm eventuella inverser till funktionerna.

d. $f(x) = x^2 + 4x + 5$ $x \in \mathbb{R}$

e. $f(x) = x^2 + 4x + 5$ $x \geq -2$

Kvadrat komplettera!

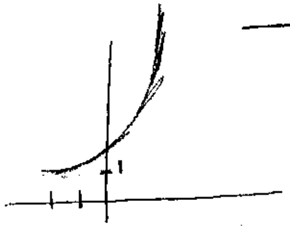
$x^2+4x+5 = \underbrace{(x+2)^2-4}_{x^2+4x}+5 = \underbrace{(x+2)^2}_{\text{nollan i } x=-2}+1$



flytta grafen ett steg upp

d. $x \in R \rightarrow$ ej injektiv

t.ex. $f(-4) = f(0)$



e. $x \geqslant -2$

$f[-2,\infty) \rightarrow [1,\infty)$

bijektiv

$[\text{vet}: y \geqslant 1 \Leftrightarrow y-1 \geqslant 0]$ ok att dra roten

$(x+2)^2+1 = y \quad (x+2)^2 = y-1$

$\overset{x\geqslant 0}{(x+2)} = \sqrt{y-1}$

$x+2 = -\sqrt{y-1}$

$f^{-1}(y) = -2+\sqrt{y-1}$

$f^{-1}(y) = [1,\infty) \rightarrow [-2,\infty)$

Invers: Viktigt vilka mängder det handlar om

52. a. x^2 b. x^3 c. x^2+2x+1. d. $x(e^x+e^{-x})$ e. $x\ln x$

Kra

a. $x^2 =$ jämn

Krav: för varje x måste även ett -x vara med i D_f.
D_f för $x^2 = \mathbb{R}$ symmetrisk m.avseende på 0

jämn $f(-x) = f(x)$

$(-x)^2 = x^2 \Rightarrow x^2$ jämn

b. $x^3 =$ udda

c. $x^2+2x+1 =$

d. $x(e^x+e^{-x}) =$ udda.

e. $x\ln(x) =$ varken eller (frågan kan ej ställas)

b. $x^3 \quad D_f = \mathbb{R}$

udda; $f(-x) = -f(x)$

$(-x)^3 = -x^3 \Rightarrow x^3$ udda

d. $D_f = \mathbb{R}$

$f(-x) = (-x)(e^{-x}+e^x) = -f(x)$

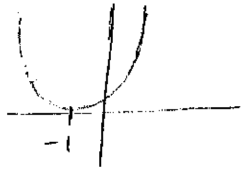
$\Rightarrow$ udda

c. $x^2+2x+1 \quad D_f = \mathbb{R}$

$f(-x) = x^2-2x+1 \neq f(x)$

$\neq -f(x)$

$\Rightarrow$ varken jämn eller udda.



e. $x\ln(x) \quad D_f: x \geqslant 0$

$D_f = (0,\infty)$ Om $x \in D_f \neq -x \notin D_f$

$x\ln|x| \quad D_f = \{x : x \neq 0\}$ udda.

61. $f(x) = 3\cos 2x - 4\sin 2x$

? $f(x) = A\sin(2x+\delta)$

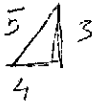
amplitud fasförskjutning

$A\sin 2x\cos\delta + A\sin\delta\cos 2x$

$A = 5$

$\sin\delta = \frac{3}{5}$

$\cos\delta = -\frac{4}{5}$



Sin(summa)

$\overset{\sin\delta\cos x}{a\cos x} + \overset{\sin\delta\sin x}{b\sin x}$

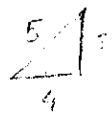
$a^2+b^2=1 \Leftrightarrow \exists\delta \quad a = \sin\varphi$

$b = \cos\varphi$

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\Big(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\varphi}\cos x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\varphi}\sin x\Big)$

$f(x) = 3\cos 2x - 4\sin 2x = \underbrace{\sqrt{9+16}}_{A=5}\Big(\underbrace{\tfrac{3}{5}\cos 2x}_{\sin\varphi} - \tfrac{4}{5}\sin(2x)\Big) =$

$= 5\left(\tfrac{3}{5}\cos 2x + \left(-\tfrac{4}{5}\right)\sin 2x\right)$



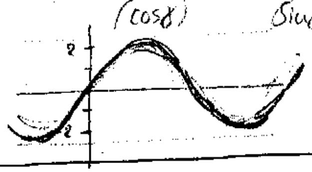
Välj φ så att $\sin\varphi = \frac{3}{5} > 0$

$\cos\varphi = -\frac{4}{5} < 0$ 2:a kvadranten $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$

63. Visa att $|\sin x + 2\cos x| \leq \sqrt{5}$ för alla x

$|\sin x + 2\cos x| = \sqrt{1+4} = \left|\underbrace{\frac{1}{\sqrt5}}_{\cos\delta}\sin x + \underbrace{\frac{2}{\sqrt5}}_{\sin\delta}\cos x\right|$

$= \sqrt{5}\,|\sin(x+\delta)| \leq \sqrt{5}$



69. Visa att: $\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}\right)$ θ theta

förskjutning halva vinkeln

- formeln för halva vinkeln
- använd cosinus: ger halva argumentet

VL: $1-\sin\theta = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$1+\sin\theta = 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = \dfrac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

Lär dig en formel: (härled allt utifrån den)

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$

vör integrerat få som summa

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$

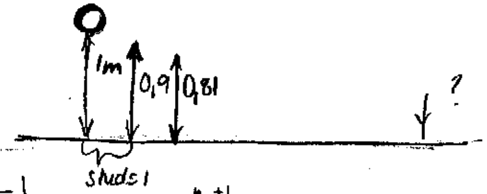
$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha+\alpha)$

Upprag: $\sin\frac{\alpha}{2}$ och $\cos\frac{\alpha}{2}$

Fundera på hur man ska härleda dem.

$1+2\left(\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdots + \left(\frac{9}{10}\right)^9\right)$

Studs1 studs2



$a + aq + \cdots + aq^n = a\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} = a\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$a(1+q+\cdots+q^{n-1})$

(Lika hög potens som antalet termer. Poly
Polynomdivision ger beviset. $\nearrow \dfrac{q^n}{q^{n+1}} \quad \underline{|q-1}$)

$1+2\left(\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^9\right) = 1+2\cdot\frac{9}{10}\;\dfrac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^9}{1-\left(\frac{9}{10}\right)}$

$= 1+2\cdot\left(\dfrac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{10}}{1-\frac{9}{10}} - 1\right)$

ANALYS-ÖVNING 3 7/9/2001

35. För radioaktivt sönderfall gäller

$m(t) = m(0)e^{-\lambda t}$, där $m(t)$ är ämnet massa vid tiden t

och λ = sönderfallskonstanten.

Med halveringstiden T menas den tid det tar att reducera massan till hälften. Bestäm sambandet mellan λ och T.

$$m(T) = \frac{1}{2} m(0)$$

$\underline{t=T}$

$$\cancel{m(0)} = \frac{1}{2}\cancel{m(0)}e^{-\lambda T} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln(\tfrac{1}{2}) = \ln e^{-\lambda t} = -\lambda T$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\ln 1)}_{=0} - \ln 2 = -\lambda T \Rightarrow T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

---

inledande problem

IP7 Bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att polynomen $\underline{x^3-2x^2-x+2}$ och x^3+ax-2 för en icke-trivial, gemensam delare och angiv denna.

[ex: 6 och 15 har 3 gemensamt. (1 är trivialt]

[Polynom: triviala gemensamma delare:
alla konstanter $\neq 0$

icke-trivial: av grad minst 1]

Gemensamma faktorer (delare) "$\Leftrightarrow$"

$\Leftrightarrow$ gemensamma nollställen.

x^3-2x^2-x+2 $\qquad x^3+ax-2$

[illegible]

$$x^3-2x^2-x+2 = x^2(x-2)-(x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x+1)(x-1)$$

x-2 är faktor i de två polynomen $\overset{\text{om och endast om}}{\Leftrightarrow}$

2 nollställe till x^3+ax-2.

rot hör ihop med [illegible]
nollställe — " — ekvation
olika saker

$2x^3 + a2 - 2 = 0 \Rightarrow 2a = -6 \quad a = -3$

För a=-3 finns en icke-trivial faktor.

---

nästa nollställe till det första polynomet. $x=-1$

$(-1)^3 + a(-1) - 2 = 0 \qquad a = -3$

$\underline{x=1}$

$1+a-2=0 \qquad a=1$

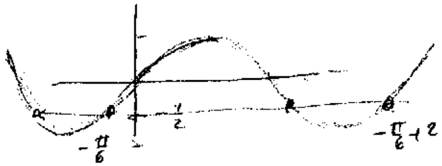
Svar: För a = -3 finns icketrivial gemensam delare.

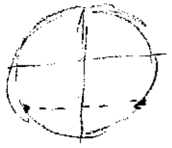
Den är: $(x-2)(x+1)$ $\qquad (x+1,\ x-2,\ (x+1)(x-2))$

För a=1 finns också icke-trivial gemensam delare

som är: $(x-1)$.

72.c.d. Lös $\sin x = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ Bestäm $\operatorname{asin}(-\frac{1}{2})$



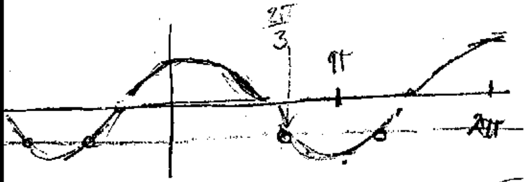


$\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin(\pi-(-\frac{\pi}{6})) = -\frac{1}{2}$

$x_n = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $x'_n = \pi + \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$, ty $\left\{ -\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \right.$

73. cd) Lös $\cos x = -\frac{1}{2}$ Bestäm $\arccos(-\frac{1}{2})$



$\cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

$x_n = \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \, , \, n \in \mathbb{Z}$

$\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$, ty $\begin{cases} \frac{2\pi}{3} \in [0,\pi] \\ \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

---

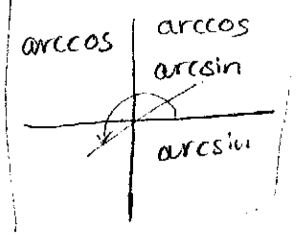
61. $\delta : \sin\delta = \frac{3}{5}$ 2:a kvadranten

$\cos\delta = -\frac{4}{5}$

$\delta = \arcsin\frac{3}{5}$

$\delta = \arccos(-\frac{4}{5}) \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

Vilka arcus funktioner kan vi använda?



III kv.

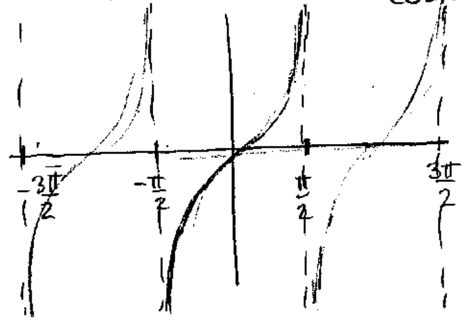
Ex: $\sin\delta = -\frac{1}{2}$

$\cos\delta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\rho = \arcsin|-\frac{1}{2}| + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi$

Om vinkel i 3:e kvadranten:
- hitta en arcus funktion som ger svar i 1:a kvadr.
- Plussa på ett π

Def $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$



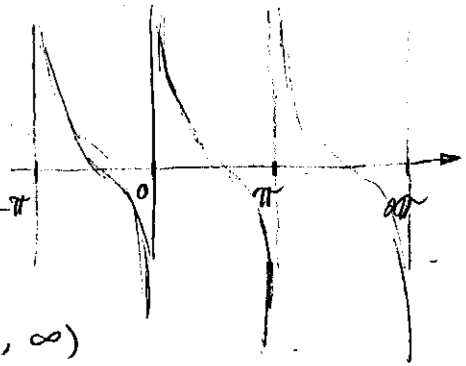
öppet intervall: blir aldrig talet ifråga

$\tan(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, \infty)$

bijektiv

inversen: $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$



$\cot(0,\pi) \to (-\infty, \infty)$

bijektiv

inversen: $\text{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\pi)$

Läxa: Graf till invers funktion. Kolla hur graferna hänger ihop. Spec: arcusfunktioner

---

80.b $\arctan(\underset{\cancel{I}\ IV}{-1}) = -\frac{\pi}{4}$

$\text{arccot}(\underset{\cancel{IV}\ II}{-1}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

83. $f(x) = \underbrace{\arctan(x) + \text{arccot}(x)}_{\text{Kv}}$

Visa att f är konstant och bestäm dess värde

- ex: ta $\tan(f(x))$ el $\cot(f(x))$ för att få en konstant funktion

$\tan(f(x)) = \tan(\arctan x + \text{arccot}\, x)$

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$ $/ \cos\alpha\cos\beta$ $/ \cos\alpha\cos\beta$

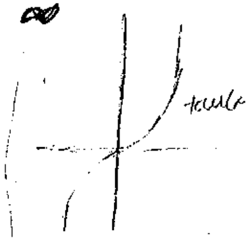
$\Leftrightarrow \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan(\beta)}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\arctan x + \text{arccot}(x)) = \frac{\tan(\arctan x) + \tan(\text{arccot}(x))}{1 - \tan(\arctan x)\cdot\tan(\text{arccot}(x))}$

$\tan(\arctan x) = x$ per definition

$\tan(\operatorname{arccot} x) = \dfrac{1}{\cot(\operatorname{arccot} x)} = \dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow$ "$\dfrac{x + \frac{1}{x}}{\underbrace{1 - x \cdot \frac{1}{x}}_{=0}}$" $= \infty$ ~~vet~~: dan $\frac{\pi}{2} + n\pi$ är ∞



Troligen har vi $\frac{\pi}{2}$ som konstant

$\cot(\arctan x + \operatorname{arccot}(x)) = 0$

(Det som blir noll hamnar i täljaren $\Rightarrow$)
dvs inga problem

Bli ej rädd om för
kan befinna sig i
en punkt som blir ∞.

(LÄXA: Läs igenom bokens fullständiga lösning!)

---

84. Visa att $\arctan \frac{2}{3} \overset{?}{=} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{12}{5}\right)$

$\Leftrightarrow$ Visa att $2 \arctan \frac{2}{3} = \arctan\left(\frac{12}{5}\right)$ tan på båda sidor.

$\tan(vl) = \tan\left(2 \arctan \frac{2}{3}\right) = \dfrac{2 \tan(\arctan \frac{2}{3})}{1 - (\tan(\arctan \frac{2}{3}))^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2 \cdot \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \dfrac{12}{5}$

$H.L: \tan(hl) = \tan\left(\frac{12}{5}\right)$

$\Rightarrow \tan(v.l) = \tan(h.l) \underset{\text{inte direkt}}{\not\Rightarrow} vl = h.l$

Uppskattning av var de ligger

$hl: \quad 0 < \arctan\left(\frac{12}{5}\right) < \frac{\pi}{2}$ större än noll, för arctan av ett positivt tal

$vl: \quad 0 < \arctan\left(\frac{2}{3}\right) < \frac{\pi}{4}$ ligger inom samma intervall

$$\left.\begin{array}{l} \tan(vl) = \tan(hl) \\ vl \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ hl \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow vl = hl$$

- vet ej mkt om arcusfunktioner
- överför i vanliga trigonometriska funkt.
- men de är periodiska
- därför behövs en uppskattning i slutet
om vi fått samma vinkel, eller en förskjutning
(som ej gäller för arcusfunk.)

---

100. Vad är koefficienten framför x^{13} i $(x+1)^{15}$

$(x+1)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^k$

x^{13} : $\binom{15}{13} = \frac{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$

---

102. Bestäm den konstanta termen i $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{15}$

$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{15} = \dfrac{(x^5+1)^{15}}{x^{45}}$

? koefficienten framför x^{45} i $\dfrac{(x^5+1)^{15}}{x^{45}}$

$x^{45} = (x^5)^9$ koeff $\binom{15}{9} = \binom{15}{6} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} =$ [illegible]

IN. ANALYS. ÖVN. 4 $\overset{17}{19}$/9/2001

104. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{k} \overset{?}{=} 2^n$

$(1+x)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\dots+\binom{n}{k}x^n$

Sätt $x=1$ $\quad 2^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{k}$

A1. a. $\cos(2\arctan\frac{1}{2}) = ?$ $\quad [\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1]$

$= 2\cos^2(\arctan\frac{1}{2}) - 1 = 2\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}} - 1 = \frac{3}{5}$

$\cos^2(\arctan\alpha) = ?$

$\tan(\arctan x) = x \iff \frac{\sin(\arctan x)}{\cos(\arctan x)} = x$

$\frac{\sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)} = x^2 \iff \frac{1-\cos^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)} = x^2$

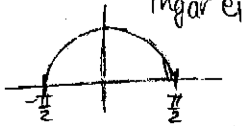
$1-\cos^2(\arctan x) = x^2\cos^2(\arctan x)$

$\cos^2(\arctan x) = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}$

$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\cos(\arctan x) = \overset{+}{\cancel{\pm}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad$ stryk $\ominus$-tecknet. Ingår ej i V_f för arctan(x).

$\arctan: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



---

d) $\cos(\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{25}) > 0$ $\quad$ ty $\arccos x \in [0,\pi]$

$\frac{1}{2}\arccos x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\cos \geq 0$ på $[0,\frac{\pi}{2}]$

$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ $\qquad \cos^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

$\cos(\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{25}) = +\sqrt{\frac{1+\cos(\arccos\frac{7}{25})}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \boxed{\frac{4}{5}} > 0$

A2.a $\quad \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$

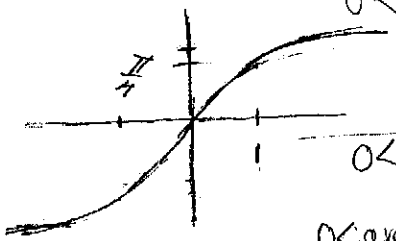
$\tan(\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3}))$

$\frac{\tan(\arctan(\frac{1}{2})) + \tan(\arctan(\frac{1}{3}))}{1-\tan(\arctan(\frac{1}{2}))\cdot\tan(\arctan(\frac{1}{3}))} =$

$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 \qquad \tan(..?) = 1$

Stäng in! $\quad -\frac{\pi}{2} < \arctan(\frac{1}{2}) < \frac{\pi}{2}$ ← i princip

$0 < \arctan(\frac{1}{2}) < \frac{\pi}{4}$, (ty arctan växande, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\frac{1}{2} < 1$)



$0 < \tan(\frac{1}{3}) < \frac{\pi}{4}$

$0 < \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3}) < \frac{\pi}{2}$

$\tan(\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})) = 1$

$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

A2.d $\quad 2\arctan(10) + \arcsin(\frac{20}{101}) = ?$

$\sin(?) = \sin(\arctan(10))\underbrace{\cos(\arcsin(\frac{20}{101}))}_{=\frac{99}{101}} +$

$\cos(2\arctan(10))\underbrace{\sin(\arcsin(\frac{20}{101}))}_{\frac{20}{101}}$

① $\cos(\arcsin(x)) = ?$

$\cos^2(\arcsin(x)) = 1-\sin^2(\arcsin x) = 1-x^2$

$\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos(\arcsin x) \geq 0$

$\Rightarrow \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

② $\cos\left(\arcsin\left(\frac{20}{101}\right)\right) = \sqrt{1-\frac{20}{101}} = \frac{1}{101}\sqrt{101^2-20^2}$ [konjugat-regeln]

$= \frac{1}{101}\sqrt{(101+20)(101-20)} = \frac{1}{101}\cdot 11\cdot 9 = \frac{99}{101}$

③ $\cos(2\arctan(x)) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$\sin(2\arctan(x))$

$\cos(2\arctan(x)) = 2\cos^2(\arctan(x)) - 1 = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$\tan(\arctan(x)) = x \quad |^2$

$\frac{\sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)} = x^2$

$1-\cos^2(\arctan x) = x^2\cos^2(\arctan x)$

$1 = \cos^2[\arctan(x))(1+x^2)]$

$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

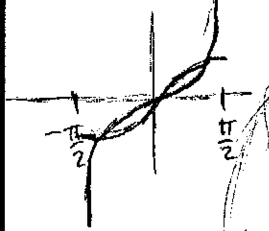
④ $\sin^2(\arctan(x)) = x^2(1-\sin^2(\arctan(x)))$

$\Rightarrow \sin^2(\arctan(x))(1+x^2) = x^2$

$\sin^2(\arctan(x)) = \frac{x^2}{1+x^2}$ [drag roten ur $\frac{x^2}{1+x^2}$]

$\sin(\arctan(x)) = \cancel{\pm}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ OBS! $\sqrt{x^2} = |x|$!!

välj plus-tecknet, ty: ↓



$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

t, $\tan(t)$, $\sin(t)$ har samma tecken

$t = \arctan(x)$

$\left.\begin{array}{l}\arctan(x)\\ \sin(\arctan(x))\end{array}\right\}$ har samma tecken

ursprungliga ekvationen =

$= 2\sin(\arctan(10))\cos(\arctan(10))\cdot\frac{99}{101} + \frac{1-10^2}{1+10^2}\cdot\frac{20}{101}$

$= \frac{2\cdot 10}{\sqrt{1+10^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+10^2}}\cdot\frac{99}{101} - \frac{99\cdot 20}{101^2} =$

$= \frac{20\cdot 99}{101^2} - \frac{99\cdot 20}{101^2} = 0$

Uppskattning av vinkelns storlek:

$2\cdot\frac{\pi}{4} < 2\arctan(10) < 2\cdot\frac{\pi}{2}$

(ty vet: $10 > 1$)

$0 < \arcsin\left(\frac{20}{101}\right) < \frac{\pi}{2}$

(ty $\frac{20}{101} < \frac{1}{2}$)

summera uttrycken

$+\frac{\pi}{2} < \boxed{} < \frac{7\pi}{6}$

↑ π

Svs: $2\arctan(10) + \arcsin\frac{20}{101} = \pi$

A3b Lös ekvationen:

- välj en lämplig trigonometrisk funktion
- cos. kan cos (arctan)

$\arccos(2x) = \arctan(x)$

$\cos(\arccos(2x)) = \cos(\arctan(x)) \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ [kvadrera

$\Rightarrow 4x^2 = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow 4x^2 + 4x^4 = 1 \Leftrightarrow 4x^4 + 4x^2 - 1 = 0$

[sätt $x^2 = t$] $\Rightarrow 4t^2 + 4t - 1 = 0$ [Kvadratkomplettera!]

$(2t+1)^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2t+1 = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow t = \frac{-1\pm\sqrt{2}}{2} = x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \quad x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

- cos av båda sidor.
- Kvadrerat båda sidor.
- Kan vi ha fått fler / färre lösningar än vad vi hade fr. början?

Vi har fått fler!, ty vi har överallt använt oss av "$\Leftrightarrow$" implikationspilar. Dvs. om hl sant är vl sai

$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ skulle kunna vara lösningar

---

"Falska" lösningar kan ha uppstått vid kvadreringen

$2x \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0 \quad \left(-2x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right.$

De "riktiga lösningarna" måste uppfylla $x \geq 0$ $(x > 0)$

$\Rightarrow$ endast $x = +\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ återstår som möjlig lösning.

Exakt samma förslag till lösning hade fåtts för $\underbrace{\arccos(2x) + 100\pi}_{\geq 100\pi} = \underbrace{\arctan(x)}_{\in -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}}$

Vilket ej är möjligt. Gör alltid uppskattningar!

$\arccos(2x) \in [0, \pi]$

$\arctan(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(ty, de måste ligga inom samma intervall!)

Om $\arccos(2x) = \arctan(x) \Rightarrow \arctan(x) \geq 0$

$\Rightarrow 0 \leq \arccos(2x) \leq \frac{\pi}{2}$

cos upprepar ej sina värden inom detta intervall.

Att fundera På:

$\cos(2\arctan(x)) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$\sin(2\arctan(x)) = \frac{2x}{1+x^2}$

- Hur kan man se att uttrycket är rätt?

$\cos(-\text{"}-) = \cancel{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \qquad \cos(-\text{"}-) = \frac{2x}{1+x^2}$

Hur kan man gardera sig mot fel när man vid t.ex integration försöker gissa $\cos(-\text{"}-)$?

11b. Visa att $2^{2n-1}+1$ är delbart med 3 för varje naturligt tal n: $(\forall n \in \mathbb{N})$

1) $n=1$: $2^{2-1}+1 = 2^1+1 = 3$ delbart med 3!

$n=2$: $2^{4-1}+1 = 2^3+1 = 8+1 = 9$ delbart med 3!

$\Rightarrow$ Påståendet är sant för $n=1$, och $n=2$.

---

2) Anta att Påståendet är sant för $n=k$, dvs: anta att $2^{2k-1}+1$ är delbart med 3.

(under antagandet i 2)

3) Gäller under denna förutsättning då att $2^{2(k-1)-1}+1$ är delbart med 3?

$2^{2(k+1)-1}+1 = 2^{2k+1}+1 = \underset{4}{2^2}\cdot\underset{2^{2k-1}}{2^{2k-1}}+1 =$ lägg till och dra ifrån önskade tal för att erhålla uttrycket i 2

$= 4(2^{2k-1}+1) - 4 + 1 = 4\underbrace{(2^{2k-1}+1)}_{\text{delbart med 3 enligt induktions-antagandet}} - 3$ ← delbart med 3

(4.

Påståendet är sant för $n=1$

Om det är sant för $n=k$, så är det sant för $n=k+1$.

Enligt induktionsaxiomet är påståendet sant för alla naturliga tal n. $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Övergången mellan k och k+1.
Alltså att hitta sambandet. Den största tekniska svårigheten

I1e. Visa att: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Vi har visat (föreläsning 3 månd 10/9) att $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

? : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)^2}{2}\right)$

1/ $\underline{n=1}$: vl: $\sum_{k=1}^{1} 1^3 = 1$; hl: $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow$ sant för n=1

2/ Antag att påståendet är sant för $n=m$
dvs att: $1^3+2^3+\dots+m^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$

3/ Gäller (under antagandet i 2.) påståendet för $n=m+1$?

$$1^3+2^3+\dots+m^3+(m+1)^3 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enl. induktions-} \\ \text{antagandet}}}{=} \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 + (m+1)^3$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2\left(\frac{m^2}{4}+m+1\right) = (m+1)^2\ \frac{m^2+4m+4}{4} = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{2^2}$$

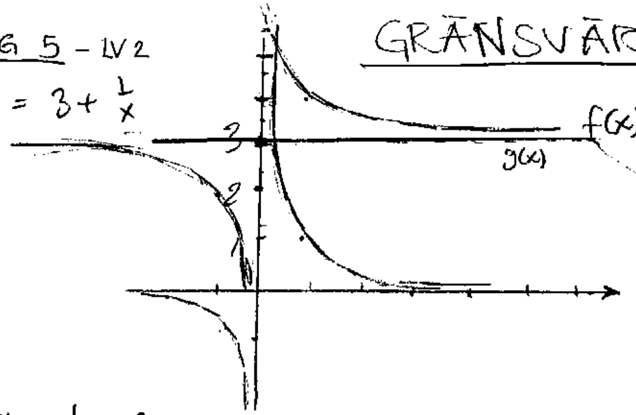
Påståendet är sant för $n=1$,
Om det är sant för $n=m$, så är det sant

Behöver ei bevisa [illegible] i 2 .

ÖVNING 5 - LV2

GRÄNSVÄRDEN

$f(x) = 3 + \frac{1}{x}$



gränsvärdet = 3
alltid samma som funktionsvärdet
dvs = kontinuerlig i alla punkter

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\frac{1}{x} \to 0 \quad x \to \infty$

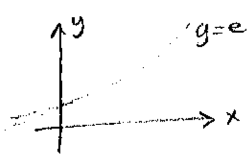
$\lim_{x\to\infty} g(x) = 3 \qquad \lim_{x\to\infty} h(x) = 0$

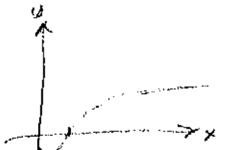
$\lim_{x\to\infty} g(x) + \lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} (g(x)+h(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x)$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + h(x)$

gränvärden : ei alltid definierade
funktionsvärden : definerad i varje punkt

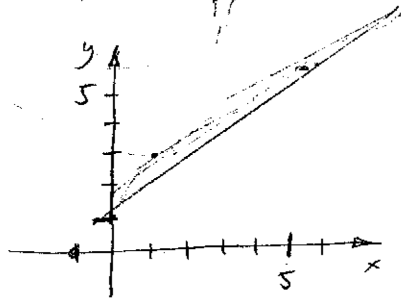
$y=e^x \quad f(y)=x$ Vad är f ?
$f(x) = \ln(x)$





$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ då $x \neq 1$ $\qquad \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$

3 då $x=1$



x	x<1	x=1	x>1
(x−1)	−	0	+
(x+1)	+	+	+
f(x)	− +	3	+

f(3) = [illegible]

$\frac{-1\cdot 1}{-1} = 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} \to \infty \qquad \overset{y=k}{y = k\cdot x + m}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{(x^2-1)}{x(x-1)} = \frac{x(x-\frac{1}{x})}{x(x-1)} \quad \frac{\cancel{x}^2(1-\frac{1}{x^2})}{\cancel{x}^2(1-\frac{1}{x})} \to 1 \quad x\to\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - k\cdot x = f(x) - x = \frac{x^2-1}{(x-1)} - x \quad \frac{(x^2-1) - x(x-1)}{(x-1)}$$

$$\frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}+x}{x-1} = \frac{(x-1)}{(x-1)} \to 1 = m$$

$$y = k\cdot x + m = x+1$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = S(n) = 1 + x + \ldots + x^n$$

$$x\cdot S(n) = x + x^2 + \ldots + x^{n+1}$$

blir borta kvar.

$$x\cdot S(n) - S(n) = x^{n+1} - 1$$

$$(x-1)\cdot S(n) = x^{n+1} - 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = S(n) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

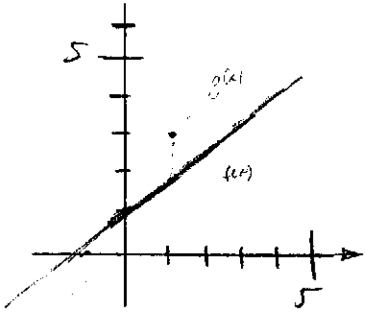
$$\overset{A}{\sum_{k=0}^{n} x^k} = \overset{B}{x^0 + \sum_{k=1}^{n} x^k}$$

alla termer utom den sista i A ingår. lägg till den. Få samma värde.

$$\sum_{k=1}^{n+1} x^{k-1}$$

$$\left(x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n = x^{1-1} + x^{2-1} + x^{3-1} + \ldots + x^{n+1-1}\right)$$

Kolla vad som händer. Ställ upp de första termerna i summorna. Vad ska jag korrigera med för att få samma?



$$g(x) = \begin{cases} 3 & x = 1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{då } x \neq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} \to 2 \text{ då } x \to 1$$

Gränsvärdet för x=1 är 2.

I just x=1 är funktionsvärdet 3.

$$f(x) \begin{cases} 2 & x = 1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{då } x \neq 1 \end{cases}$$

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ skulle ge f' i alla punkter $\neq 1$

Derivatan i just punkten ett.

Blir kontinuerlig

Beter sig som: $h(x) = x+1$

↓ Använd den annars det

Skilj på: när vi är i ettan, och vi är utanför

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\overset{x_1}{1+h}) - f(\overset{x_0}{1})}{\underset{x_1 - x_0}{x+h-x}} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(1+h)^2-1}{(1+h)-1} - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\left(\frac{1+2h+h^2}{h}\right) - 2}{h}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Om } f(a) = A \text{ och om } \lim_{x\to} f(x) = A \\ \text{så är } f(x) \text{ kontinuerlig i punkten} \\ x = a.\end{array}}$$

$$\Delta y \left\{ \underbrace{\frac{\Delta y}{\Delta y}}_{\Delta x} = f(x) \right.$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot\left\{\left(\frac{1+2h+h^2}{-h}\right) - 2\right\}}{h\cdot\{h\}} = \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-2h}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left\{\left(\frac{2h+h^2}{h}\right) - 2\right\}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2}+h-\cancel{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \equiv 1$$

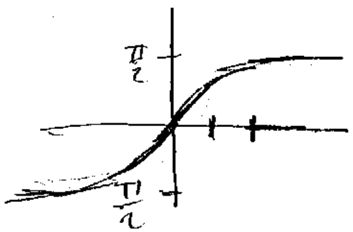
$$(f'(1) = 1)$$

88. $y = \arctan(x)$ $\quad \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$

$\tan(\arctan y) = x$

$\tan y = x$ (per definition) $\quad \tan^2 y = x^2$

$$\frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y} = x^2$$



A2 b. $2\arctan(2) - \arctan(7)$

Metod: ta lämplig trig. funkt. Uppsladtning.

$$\tan(2\arctan 2 - \arctan 7) = \frac{\tan(2\arctan 2) - \tan(\arctan 7)}{1 + \tan(2\arctan 2)\underbrace{\tan\arctan 7}_{=7}}$$

$$\tan(2\arctan 2) = \frac{2\cdot\tan(\arctan(2))}{1-\tan^2(\arctan(2))} = \frac{4}{1-4} = -\frac{4}{3}$$

Sätt in. I ekv.

Intervall: ej mer än π brett för att entydigt kunna bestämma uttrycket

π-brett intervall för uttrycket

$\frac{\pi}{4} < \arctan(2) < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{3} < \arctan(2) < \frac{\pi}{2}$

$2 > 1 \quad 2 > \sqrt{3}$

$1 = \arctan(\frac{\pi}{4}) \quad \sqrt{3} = \tan(\frac{\pi}{3})$

$\overset{\cdot 2}{2\cdot}\frac{2\pi}{3} < 2\arctan(2) < \pi \cdot 2$

alla olikheter vänds

$\frac{\pi}{3} < \arctan(7) < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < -\arctan(7) < \frac{\pi}{3}$

$7 > \sqrt{3}$

$\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} < 2\arctan(2) - \arctan(7) < \pi - \frac{\pi}{3}$

Gör uppsladtningen i steg.

Olikheter vänds. Lägg först [illegible] [illegible] funktion.

$\frac{\pi}{6} < 2\arctan 2 - \arctan 7 < \frac{2\pi}{3}$

bredd : ≤ π

$\Rightarrow \exists!\ (?)\ $ var $\tan(?) = A$

ANALYS ÖVNING 5

$a_n \to a \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a$

$f(x) \underset{x\to\infty}{\to} l \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = l$

$f(x) \underset{x\to x_0}{\to} l \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = l$

$f(x) \underset{x\to x_0}{\to} \infty \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ "oegentligt gränsvärde"

Ex: $\frac{1}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\to} +\infty \qquad \tan(x) \underset{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}{\to} +\infty$

Standardgränsvärden

$\frac{a^x}{x^a} \to \text{"}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\text{"}$ för ostabilas $\quad \frac{a^x}{x^a} \to \infty$ $\boxed{\begin{matrix}a>1\\ \alpha>0\end{matrix}}$ (täljaren dominerar)

$\frac{{}^a\log(x)}{x^\alpha} \to 0$ Potensen är dominant

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{"0"}{"0"}$$ (ingen av dem dominerar) $$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{"0"}{0}$$ (ingen av nollorna dominera) $$\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

samma sätt

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{"0"}{0}$$ (– ") $$\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

40.c. $$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)^3}{(x^3+2)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^6}(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}})^3}{\cancel{x^6}(1+\underset{\to 0}{\frac{2}{x^3}})^2} = \frac{1}{1} = 1$$

måste skrivas efter varje = tecken. insättning av ∞ ger nu.

polynom: uppförandet bestäms av den högsta potensen.
Den dominerar då $x \to \pm\infty$

40d. $$\frac{x^2+10x+1}{2x+1} = \frac{x^{\cancel{2}}(1+\overset{\to 0}{\frac{10}{x}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}})}{\cancel{x}(2+\underset{\to 0}{\frac{1}{x}})} \longrightarrow \frac{"\infty"}{2} = \infty$$

ej obestämbart

43.c $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x+\ln x} = \frac{\cancel{x}\overset{\to\infty}{\ln x}}{\cancel{x}(1+\underset{\to 0}{\frac{\ln x}{x}})} = \frac{"\infty"}{1} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$$

(FKM) 175.d. $$\lim_{x\to 2}\frac{5x^2-9x-2}{x^3-x^2-x-2} \to \frac{"0"}{0}$$ betyder att $(x-2)$ är faktor ; både nämnare och täljare

Bryt ut x- nollstället

$$= \frac{\cancel{(x-2)}(5x+1)}{\cancel{(x-2)}(x^2+x+1)} \xrightarrow[x\to 2]{} \frac{11}{7}$$

x^2
$-2x^2$

177d. $$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+5x} - \sqrt{x^2+2} = "\infty - \infty"$$

Obestämda gränsvärden: $"\frac{\infty}{\infty}"$, $"\frac{0}{0}"$, $"\infty-\infty"$

Förläng med konjugatuttryck!

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+2}\right)\left(\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2+2}\right)}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2+2}} = \frac{\cancel{x^2}+5x-\cancel{x^2}-2}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2+2}} \to -\frac{"\infty"}{\infty}$$

om gränsvärde: negativt

När x blir till abs.beloppet stort, kommer x^2 att dominera över såväl 5x som 2.
Alltså "tas" de lägre potenserna "bort". Bryt ut största möjliga potens

$$\Rightarrow \frac{5x-2}{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{1+\underset{\to 0}{\frac{5}{x}}}+\sqrt{1+\underset{\to 0}{\frac{2}{x^2}}}\right)} = \frac{x(5-\frac{2}{x})}{|x|(-2)} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{5}{2}$$

$\to 2$

$= |x| = -x$ ty $x \to -\infty$ $(x<0)$

Tänk noga på tecknet!
Spec. då $x\to\infty$.
$\sqrt{x^2} = |x|$. tecken beror på om $x \to$ pos el $x \to$ neg

"$\infty - \infty$" = obestämt, ty vi vet ej vilken som är "störst".

Använd konjugat. För då $\infty + \infty$ som går mot ∞

Gröna häftet. 177.f

$$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+6x+1}$$ insättning: "$-\infty + \infty$" [Multiplikation med konjugat]

$$\Rightarrow \frac{\left(x+\sqrt{x^2+6x+1}\right)\left(x-\sqrt{6x+6x+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+6x+1}} = \frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-6x-1}{x-\sqrt{x^2+6x+1}} \longrightarrow \frac{"+\infty"}{-\infty}$$

$-\infty-\infty = -\infty$

bryt ut högsta potensen

$$\Rightarrow \frac{x(-6-\frac{1}{x})}{x-|x|\sqrt{\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{x(-6-\frac{1}{x})}{x-(-x)\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-6-\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}}{1+\sqrt{1+\underset{\to 0}{\frac{6}{x}}+\underset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}} \to \frac{-6}{1+1}$$

$\to -3$

$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$ multiplicera med $\left(\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}\right)$ jmf. $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$= a \quad -b$

$\boxed{\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} \text{ Vad ska man multiplicera med?}}$ → fundera på detta!

$x\to 0 \quad \frac{\sin x}{x} \to 1$ Multiplicera med 2x, ty i x→0 går 2x→0 och sin(2x) uppför sig som 2x

2.3.d.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} \quad \frac{\sin(\overset{\to 0}{2x})}{2x}\cdot 2\cancel{x}\cdot\frac{3x}{\sin(3x)}\cdot\frac{1}{3\cancel{x}} = \frac{2}{3}$$

(uppför sig som)

Alt: $\sin(x) \sim x \;,\; x\to 0$

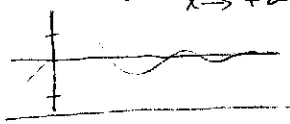
$\sin(2x) \sim 2x \;,\; x \to 0$

$\sin(3x) \sim 3x \;,\; x\to 0$

$$\Rightarrow \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} \sim \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \quad x\to 0$$

3.e $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)} \quad [t=\sin(x)]\begin{bmatrix}x\to 0\\ \sin x \to 0\\ t\to 0\end{bmatrix} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1$$

OBS! $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$ $\quad$ ty: $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x} \to 0$



oscillerande, men med minskande amplitud. Går på sikt mot noll.

4.c. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{\sin(4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}\cdot\frac{1}{\sin(4x)}\cdot\frac{1}{3x}\cdot 3x\cdot 4x\cdot\frac{1}{4x} = \frac{3}{4}$$

5.c. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x} \quad \begin{bmatrix}3x = t\\ x=\frac{t}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\to 0\\ t\to 0\end{bmatrix}$$

$\frac{e^{x}-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{\frac{t}{3}} = \lim_{t\to 0} 3\cdot\frac{e^{t}-1}{t} = 3$$

Alt. $$\frac{3\cdot e^{3x}-1}{3\cdot x} \to 3\cdot 1 = 3$$

5f. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x} \qquad x\to 0 \Rightarrow \sin(x)\to 0$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\frac{\sin(x)}{x}\xrightarrow[x\to 0]{} 1 \Rightarrow \frac{x}{\sin(x)}\xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1}$$

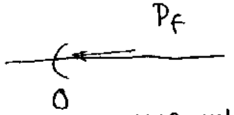
$x+\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

ÖVNINGAR- ANALYS 7 2001/9/17

6c. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot 3 = 3$ $\qquad \frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$

7d. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(3x)}{\ln(2x)} = \frac{\text{"}-\infty\text{"}}{\text{"}-\infty\text{"}}$

$\boxed{\begin{matrix} x\to 0 \\ x>0 \end{matrix}}$



hopningspunkt för D_F

$\frac{\ln 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{3x}\cdot\frac{3x}{2x} \xrightarrow[x\to 0]{} \text{"}\frac{-\infty}{0}\cdot\frac{0}{-\infty}\cdot\frac{3}{2}\text{"}$

bryt ut det snabbast växande

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(3x)}{\ln(2x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(3)+\ln(x)}{\ln(2)+\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{\ln x}\left(\frac{\ln 3}{\ln x}+1\right)}{\cancel{\ln x}\left(\frac{\ln 2}{\ln x}+1\right)} = 1$$

$\frac{\ln 3}{\ln x} \to 0$ $\qquad \text{"}\frac{\text{tal}}{-\infty}\text{"} = 0$

8.c $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \text{"}1^{\infty}\text{"}$ obestämbart

ngt som går mot 1, Alltså ej 1

"0^0" = ngt som går mot noll, upphöjt i ngt som går mot

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{1/2} = e^{1/2}$$

$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} \to e$

Kommentar: $\sqrt{\cdot}$ är en kontinuerlig funktion

$\therefore$ om $\cdot$ går mot ngt. går $\sqrt{\cdot}$ mot $\sqrt{\text{ngt}}$.

8.d. $\lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n = \left(2^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right)$

$2^n \to \infty \quad \cdot \quad \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \to \sqrt{e}$

$\left(2+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2^n$

$\left(2+\frac{1}{n}\right)^n \to +\infty \qquad 2^n \to \infty$

Större än 2^n som in $\to \infty$. $\therefore$ går även $\left(2+\frac{1}{n}\right)^n \to \infty$

9b) $\lim_{x\to 0^+} (\sin(x))^x = \text{"}0^0\text{"}$?? både bas och exponent beror av x.

- Gränsvärden, derivator m.m av funktioner av denna typen. Gör en omskrivning

$$a^b = e^{b\cdot\ln(a)}$$

$$\underline{\text{def}} \quad (f(x))^{g(x)} \overset{\text{def}}{=} e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin(x))^x = e^{x\ln(\sin(x))} \xrightarrow[x\to 0^+]{} e^0 = 1$$

Om vi hittar gränsvärdet för $x\ln(\sin x)$ är detta lika m. gränsvärde för $e^{x\ln(\sin x)}$ pga e's kontinuitet.

$x\cdot\ln(\sin x) \to \text{"}0\cdot(-\infty)\text{"}$

$\frac{x\,(\ln(\sin x)\cdot\sin x)}{\sin x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1\cdot 0 = 0$

$[t=\sin x] \quad t\to 0^+ \quad t\ln(t) \quad \left[t=\frac{1}{s}\right] \quad \frac{1}{s}\cdot\ln\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{-\ln s}{s} \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$

$t\to 0 = s\to +\infty$

10.c, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^4}{2^n}} = \text{"}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^0\text{"} = \text{"}0^0\text{"}$

$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} = e^0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\frac{1}{n}\ln(n) \to 0 \qquad \frac{\ln(n)}{n} \to 0$

$\sqrt[n]{\frac{n^4}{2^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^4}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$

12.b $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1$

$\sqrt[n]{n^2+n} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n+1}$

$\sqrt[n]{n^2+n} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$ "1^0"

$\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1 \qquad \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} \to 1$

Använd instängningsregeln

$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n^2+n} \leq \sqrt[n]{n^3}$

$\sqrt[n]{1} \to 1 \qquad \sqrt[n]{n^3} \to 1 \qquad \sqrt[n]{n^2+n} \to 1$

$n^3 > n^2+n$ för stora n $(n\to\infty)$

instängd mellan 1 och 1

14.b $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1}$ $[x = 1+t]$ SUBSTITUTION $\Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2-1} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{\cancel{1}+2t+t^2\cancel{-1}} =$

$x \to 1$
$t \to 0$

$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \to 1$

$= \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+t)}{t}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2+t}}_{\to \frac{1}{2}\ t \to 0} = \frac{1}{2}$

$\cot(\frac{\pi}{2}-t) =$

SUBSTITUERA SÅ ATT $t \to 0$.

15.b $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cot(x)}{2x-\pi}$ $\left[t = x - \frac{\pi}{2}\right]$ $= \lim_{t \to 0} \frac{\cot(\frac{\pi}{2}+t)}{2t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+t)}{\sin(\frac{\pi}{2}+t)}}{}$

$x \to \frac{\pi}{2}$
$t \to 0$

$\frac{\sin(t)}{t}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{-\sin(t)}{\underbrace{\cos t}_{\to 1 \text{ då } t \to 0} \cdot 2t} \to 1 = -\frac{1}{2}$

Gör en lista med (7) dåliga gränsvärden
ex. "0^0", "∞^0", ... osv

17.b $x \to \infty$ $\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1}$ "$\infty - \infty$" [Multiplicera m. konjugatet]

c. $x \to -\infty$ $\frac{\cancel{x^2}+3x-\cancel{x^2}+1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}$ bryt ut högsta potens $= \frac{x(3-\frac{1}{x})}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$ $\longrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} & x \to \infty \text{ ty } x = |x| \\ -\frac{3}{2} & x \to -\infty \text{ ty } |x| = -x \end{cases}$

b) $x \to +\infty$ "$\frac{+\infty}{+\infty}$" om ngt, så positivt. $x \to -\infty$ "$\frac{-\infty}{+\infty}$" Om ngt, så negativt

Lättare att jämföra om ∞ ser ut som kvot.

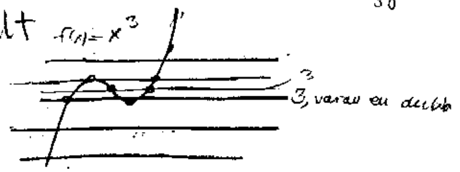
$\sqrt{A} - \sqrt[3]{B}$ Gör en omskrivning $\sqrt[4]{A} - \sqrt[4]{B}$

22. $8x^3 - 36x^2 + 46x - 15 = 0$

? Har minst en rot i vardera av intervallen:

$0<x<1$, $1<x<2$, $2<x<3$

- Udda gradspolynom = minst ett reellt nollställe, ty funktionen är
- kontinuerlig och börjar i $-\infty$ och slutar i ∞.
- Måste därför har passerat x-axeln ty de reella talen ligger på en kontinuerlig linje.
- Beroende på var den reella axeln skär grafen, får man 1, 2, eller 3 reella nollställen.



$\mathbb{Q}$ $\frac{2}{3}, \frac{-5}{2}, \frac{p}{q}$

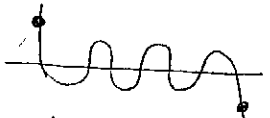
$x^2 - 2 = 0$ Grafen skär ej axeln m. ett rationellt tal.

$p(x) = 8x^3 - 36x^2 + 46x - 15$ • kontinuerlig funktion

intervall
(0,1): $p(0) = -15 < 0$
$p(1) = 8-36+46-15 = 3 > 0$ -tecknet är det viktiga

$\Rightarrow \exists$ nollställe till p i intervallet (0,1)

(1,2): $p(1) = 3 > 0$
$p(2) = 64-144+92-15 = -3 < 0$



Vi kan endast via testning i två punkter säga att nollställen finns. Inte hur många de är.

$\Rightarrow \exists$ nollställe till P i (1,2)

(2,3) $P(2) = -3 < 0$
$P(3) = 216 - 324 + 138 - 15 > 0$

$\Rightarrow \exists$ nollställe till P: (2,3)

Tredjegradspolynom = har tre rötter, vilka vi lokaliserat i vardera av intervallen ovan.

I1g: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\dots+k} = \frac{2n}{n+1}$

Induktion:

1. $n=1$: VL: $\frac{1}{1}=1$ HL. $\frac{2}{2}=1$ $\Rightarrow$ påst. sant för $n=1$.

2. Antag att påståendet är sant för $n=m$, dvs:

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1+2+\dots+k} = \frac{2m}{m+1}$$

3. Gäller under antagandet i 2 att påståendet är sant även för $n=m+1$? (Omarbeta VL, fås vi får HL)

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{1+2+\dots+k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1+2+\dots+k} + \frac{1}{1+2+\dots+(m+1)} = \text{enligt induktionsantagan ersätt m. } \frac{2m}{m+1}$$

$$= \frac{2m}{m+1} + \frac{1}{1+2+\dots+(m+1)} \leftarrow \text{aritmetisk summa } \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2m}{m+1} + \frac{1}{\frac{(m+1)(m+2)}{2}} = \frac{2m}{m+1} + \frac{2}{(m+1)(m+2)} = \frac{2}{(m+1)}\left(m + \frac{1}{(m+2)}\right)$$

$$= \frac{2}{(m+1)}\left(\frac{m^2+2m+1}{m+2}\right) = \frac{2}{\cancel{(m+1)}}\left(\frac{(m+1)^{\cancel{2}}}{(m+2)}\right) = \frac{2\,(m+1)}{(m+2)} = \frac{2(m+1)}{(m+1)+1}$$

Enligt induktionsaxiomet gäller påståendet
gäller påståendet för alla naturliga tal. $\forall n \in N$

Deduktion: Från det allmänna fallet dra en slutsats om ett special fall.
Induktion: från special fall dras slutsats om det allmänna fallet.

Pröva: I1j.

ÖVNINGAR ANALYS NR 8

20/9/2001

29.b. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$

$$= \underbrace{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\dots+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}_{S^n}$$

geometrisk summa

$$S_n = -\frac{1}{3}\,\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n \leftarrow \text{antal termer}}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\to -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4/3} = -\frac{1}{4}$$

def: Serie är en oändlig summa
$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

konvergent $S_n = a_1 + \dots + a_n$

divergent

$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$ Serien är konvergent med summa s.

$S_n \not\to$ ngt tal ($n\to\infty$) Serien är divergent

Serien är konvergent. Dess summa är: $-\frac{1}{4}$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(x+1)^{-j} = 1 + \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} + \dots + \frac{1}{(x+1)^n}$$

För vilka x konvergerar serien? El: eg.

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{x+1}} \quad q = \frac{1}{x+1}$$

Vill att q^n ska vara konv.

$|q|<1 \Rightarrow q^n \to 0$

$q = 1 \Rightarrow q^n \to 1$

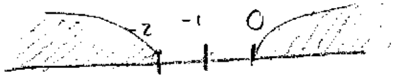
$q = -1 \Rightarrow q^n$ div.

$|q|>1 \Rightarrow |q|^n \to \infty$

Formeln↑ fungerar endast för $q \neq 1$, ty annars blir det division med noll.

$$\frac{1-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{x+1}} \longrightarrow \frac{1}{\frac{x+1-1}{x+1}} = \frac{x+1}{x}$$

$$|q|<1 \Leftrightarrow \frac{1}{|x+1|}<1 \Leftrightarrow |x+1|>1$$



Lösn: $x>0$
$x<-2$

33b. $\lim_{n\to\infty} \binom{2n}{n} 2^{-n}$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}\cdot 2^{-n}$$

Stryka termen fr. ~~täljaren~~ med största i nämnaren. Para ihop. mult. m. en 2:a fr. de n st 2:orna i 2^{-n}

behållit en faktor, ersätt alla andra termer m. 1

$$\underset{>1}{\frac{n+1}{1\cdot2}}\cdot\underset{>1}{\frac{n+2}{2\cdot2}}\underset{>1}{\frac{n+3}{3\cdot2}}\cdots\underset{>1}{\frac{2n-1}{(n-1)\cdot2}}\underset{=1}{\frac{2n}{n\cdot2}} > \frac{n+1}{2}\cdot1 \longrightarrow +\infty$$

$\lim_{k\to\infty}\binom{2n}{n}2^{-n} = +\infty$, ty det är större än ngt som går mot ∞.

Hade kunnat förfina uppskattningen,
så att mindre info. förloras = man lättare
kan uppskatta summans storlek.

$\frac{k\sqrt{n!}}{n!}$

IP8 $\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1!+2!+3!+\ldots+(n-1)!}{n!}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\underset{\searrow 0}{\frac{1!}{n!}} + \underset{\searrow 0}{\frac{2!}{n!}} + \ldots + \underset{\searrow 0}{\frac{(n-2)!}{n!}} + \underset{\searrow 0}{\frac{1}{n}} + 1\right)$$

antalet $\to\infty$

gr.värde av typen: "∞"$\cdot 0$

$ex: \underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{n\,st} = 1$

Om antalet termer går mot ∞?
Oklart om följen $\to 0$, [illegible]
uppskattning
- jämföra antalet termer, med hur snabbt de går mot noll
- ersätta alla termer med en extrem term. Max, eller min.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}+\frac{2!}{n!}+\quad\frac{1}{n}+1\right)$$

$$< \underset{\downarrow 1}{(n-1)\cdot\frac{1}{n}} \quad +1$$

$\frac{1}{n!}+\frac{2}{n!}+\ldots+\frac{(n-2)}{n}$ Ersätt alla termer med den största = sista

$(n-1)\cdot\frac{1}{n}$

$$< \underset{\searrow 0}{(n-2)\cdot\frac{1}{n(n-1)}} \qquad +\underset{\downarrow 2}{\frac{1}{n}}+1$$

(aritmetiskt medelvärde)

Givet $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ Visa att även $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

att härefter är gränsvärdet

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_m+(a_{m+1}+\ldots+a_n)}{n}$$

Antag till en början att $a=0$

Tag $\varepsilon>0$ godtyckligt. $\exists N(\varepsilon): \forall m+1>N \quad |a_{m+1}|<\frac{\varepsilon}{2}$

ty $a_n \longrightarrow 0$

Välj m så att $m+1 >$

$(n-m)$st $<n$

$$\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_m+a_{m+1}+a_n}{n}\right| < \frac{|a_1+\ldots+a_m| + \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}{n}$$

* hela epsilon/2 delen kan ersättas med n.

$$< \frac{|a_1+\ldots+a_n|}{n} + \frac{n\frac{\varepsilon}{2}}{n}$$

? $m < \frac{\varepsilon}{2}$

<u>m fixt</u> $\quad m = m(\varepsilon)$

Välj n så stort att $\frac{|a_1+\ldots+a_m|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$

går, ty vi har ett fixt antal termer

$\Rightarrow$ För m,n så valda $\left|\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$a \neq 0 \quad \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - a = \frac{a_1 + \dots + a_n - n \cdot a}{n} = \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \dots + (a_n - a)}{n}$

$\to 0$

- Gränsövergång
  - * välj brytpunkten
  - * välj n så stort.
  - * ε-def.

TITTA PÅ den här hemma.

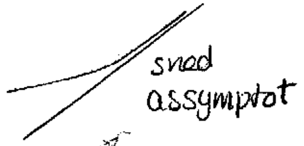
IP 13) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{k+1}}$

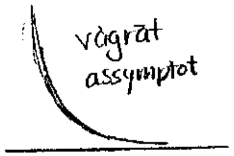
$= \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+1}}$

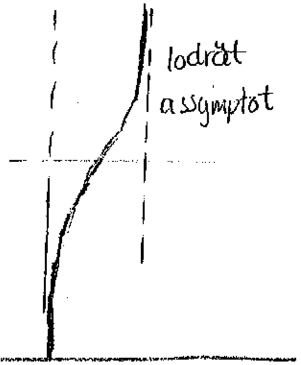
$a_n = \sqrt{\frac{n}{n(1+\frac{1}{n})}} \quad a_n \to 1$

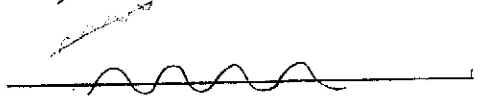
$\frac{\overbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}^{\to 1}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \left[a_n = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right]$

Assymptoten









Ex: sin(x) x-axeln: vågrät assymptot

def: $x = a$ är lodrät assymptot för $f(x)$,

om $\lim_{x\to a^+} f(x) = \begin{cases}\infty \\ -\infty\end{cases}$ eller $\lim_{x\to a^-} f(x) = \begin{cases}\infty \\ -\infty\end{cases}$

Ex: $\tan(x) \quad x = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$

Ex2 $\frac{1}{x} \quad x = 0$ är en lodrät assymptot,

x närmar sig ett ändligt värde,

funktionen går mot $\pm\infty$

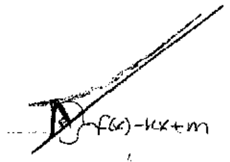
---

def $y = kx + m$ är sned assymptot för $f(x)$ om:

$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx - m) = 0$

el: $x \to -\infty$

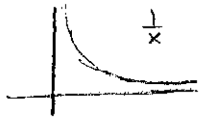
funk. närmar sig en linje

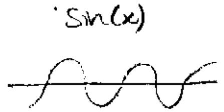


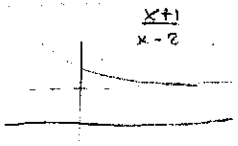
def $k = 0 \Rightarrow y = m$ vågrät assymptot

$\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\to-\infty}} f(x) = m$ Funktionen ändligt gränsvärde

Vågrät:







Sned assymptot:

$\frac{x^2+1}{\underbrace{(x-1)}_{f(x)}} = (x+1) + \frac{2}{x-1} \qquad f(x) - x - 1 = \frac{2}{x-1} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$

$y = x+1$ sned ass till $f(x)$

gradtalet i t. 1 gr. högre än i n. Vi miss[illegible] ass. finns

2.7.a, $\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \infty$

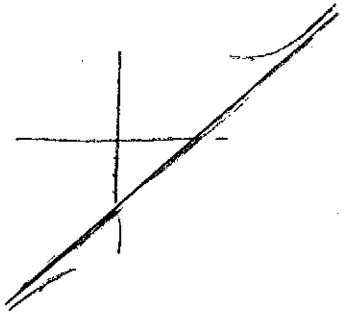
$\xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$

$\frac{x-4}{x^3-4x^2+3x \;\big|\; x^2-1}$

$y = x - 4 + \frac{4x-4}{x^2-1} \Longleftrightarrow y = x - 4 + \frac{4}{x+1}$

$\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2-1} - x + 4 = \frac{4}{x+1} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$

$\Rightarrow y = x - 4$ assymptot i $\pm\infty$

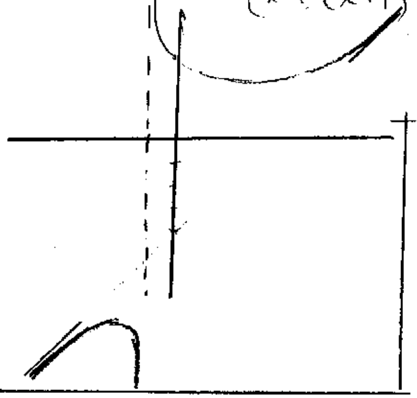


Kunde ha funnits 2 lodräta ass.
Men ett x förkortades bort
Kan end. finnas 1.

Lodräta: Kandidater: $x=-1$ $x=1$ (nämnaren blir noll då)

inget konstigt

$$\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-1} = \frac{x(x^2-4x+3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} \xrightarrow[x\to -1]{} \infty \begin{cases} x\to -1^- & -\infty \\ x\to -1^+ & +\infty \end{cases}$$



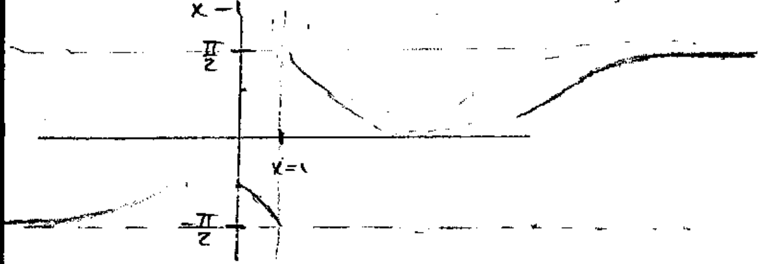
27. $\arctan\left(\frac{x^2}{x-1}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{x^2}{x-1} \to +\infty$ $\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) \to \frac{\pi}{2}$

$\frac{x^2}{x-1} \to -\infty$ $\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) \to -\frac{\pi}{2}$

$x \to 1^-$ $\frac{x^2}{x-1} \to -\infty$ $\arctan\left(\frac{x^2}{x-1}\right) \to -\frac{\pi}{2}$

$x \to 1^+$ $\frac{x^2}{x-1} \to +\infty$ $\arctan\left(\frac{x^2}{x-1}\right) \to +\frac{\pi}{2}$



$f(x) - kx - m \longrightarrow 0$

$f(x) - \boxed{k}x \longrightarrow m$

$$\underset{\pm\infty}{x}\left(\underbrace{\frac{f(x)}{x} - k}_{\to 0} - \underbrace{\frac{m}{x}}_{\to 0}\right) \longrightarrow 0$$

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ om det finns

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right)$ om det finns

---

37b. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x-2}$, $x > 0$.

Sneda assymptoter i $+\infty$:

$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x(x-2)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

$f(x) - k\cdot x = \frac{\ln(x)}{(x-2)} - 0\cdot x \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

$y=0$:= sned (vågrät assymptot)

Vertikala $x=2$
$x=0$

ÖVNING 8 - ANALYS

Kap 3 1d. $\lim_{x \to a} \frac{\ln(x)-\ln(a)}{x-a} = \ln(x)' \Big|_{x=a}$

$$\frac{\ln(x)-\ln(a)}{x-a} = \frac{\ln(\frac{x}{a})}{x-a} = \ln\left(1+\left(\frac{x}{a}-1\right)\right)$$

lång tid, dra ifrån 1

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{\ln\left(1+\overset{\to 0}{\frac{x-a}{a}}\right)}{\underbrace{\frac{x-a}{a}}_{t}\cdot a} \xrightarrow[\substack{x\to a\\ t\to 0}]{} 1\cdot\frac{1}{a}$$

tips på t

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ Alla deluppgifter på 3.1 : hantera dylikt m.h.a. det på derivata - härled.

De elementära funktionernas derivator inversen till $x^{\alpha} = y^{\frac{1}{\alpha}}$

$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{(\alpha-1)}$ potens funktioner - sina egna inverser

$(e^{x})' = e^{x}$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$(\sin(x))' = \cos(x)$

$(\cos(x))' = \sin(x)$

$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} =$

$(\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)} =$

$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\text{arccot}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\ln(\ldots\sqrt{1\ldots 2}))' = \frac{1}{}$

Regler

$(f+g)' = f' + g'$

$(\alpha \cdot f) = \alpha . f'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

7g. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ Skriv om $\sqrt{\ }$ uttrycken som potensfunkt.

9.c $(e^{-x^2})' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$

$f(t) = e^{t}$, $t = g(x) = -x^2$

---

utifrån och in.

9.f. $(\sin^3(x)) = ((\sin(x))^3)' = 3 \cdot (\sin(x))^2 \cdot \cos(x)$

9.i. $(\arcsin(\sqrt{x}))' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} (\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

10.a $(\arcsin(e^{x})) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot e^{x} = \frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

---

b. $e^{\arcsin(x)} = e^{\arcsin(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11.a $(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))'$ $\frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})} \cdot (x+\underset{(1+x^2)^{0.5}}{\sqrt{1+x^2}})' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\right)$

inre derivata av $(1+x^2)$

$$= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

11c. $\ln|\ln|x|| = ?$ $|x|$ ej deriverbar i 0, men 0 är ej med här, ty ingår ej i D_f för $\ln(\ )$.

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot ?$$

⇒ men $\ln|x|$ deriverbar.

$$(\ln|x|)' = \quad \ln|x| \begin{cases} \ln(x) & x>0 \quad (\ln|x|)' = (\ln(x))' = \frac{1}{x} \\ \ln(-x) & x<0 \quad (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

odefinierad i $x = \pm 1$

$$\left(\ln|\underbrace{\ln|x|}_{t}|\right)' = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln|x|} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln|x|}$$

---

13. (LOGARITMISKA DERIVATAN)

$$f = f_1 f_2 \cdot f_3 \cdots f_n$$

$$f' = f_1' \cdot f_2 f_3 \cdots f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdots f_n + f_1 f_2 f_3' f_4 \cdots f_n \ \ldots$$

logaritmera leden. Övergår i summor.

$\ln(f(x)) = \ln(f_1) + \ln(f_2) + \ldots + \ln(f_n)$ Derivera:

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{f_1(x)} \cdot f_1'(x) + \frac{1}{f_2(x)} \cdot f_2'(x) + \ldots + \frac{1}{f_n(x)} f_n'(x)$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2} + \ldots + \frac{f_n'}{f_n}$$

$$f' = f\left(\frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2} + \ldots + \frac{f_n'}{f_n}\right)$$

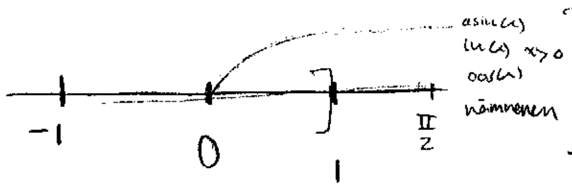
---

14. $$\frac{e^{x^2}(\arcsin(x))^2 \times \sqrt{\cos x}}{(\ln(x))^6 \ \sin(x)}$$

D_f: $\ln(x) > 0$

- $\arcsin(x)$: $x \in [-1, 1]$

$\cos(x)$: $\cup\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$



$\} [0,1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$D_f = (0,1)$$

$f(x) =$

$$\ln(f(x)) = \ln(e^{x^2}) + \ln(\arcsin(x))^2 + \ln(x) + \ln\left(\sqrt{\cos(x)}\right) + \ln\left((\ln(x))^6\right) - \ln(\sin^2 x)$$

$$= x^2 + 2\ln(\arcsin(x)) + \ln(x) + \tfrac{1}{2}\ln(\cos(x)) - 6\ln|\ln(x)| - 2\ln(\sin(x))$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \ \frac{2}{\arcsin(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ \frac{1}{\cos x} \cdot (\sin(x))^{\prime} - 6 \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos$$

$$f'(x) = f(x)\left[\ -\text{"}-\ \right]$$

Derivatan av godtycklig exponentialtillväxt.

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\cdot\ln(a)} \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$$

12d. $(x^x)' =$ Ej potens, ej exponentialfunktion.
Både exponent och bas beror av x.

$$(x^x)' \overset{\text{def}}{=} \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln(x)}(x\ln(x))' = e^{x\ln(x)}\left(1\cdot\ln(x) + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\right) =$$

$$= x^x(\ln(x+1))$$

$(e^{\pi})' = 0$ (tal)$'$ = alltid noll.

16. Bestäm tangent och normal till kurvan $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ i punkten $(0,0)$

$D_f = \mathbb{R}$ ty; $1+x^2 \geq 1$

$\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x|$

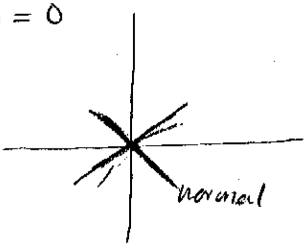
$x+\sqrt{1+x^2} > x+|x| \geqslant 0$ Därför ln alltid definerad

funktionsgraf går genom origo.

$f(0) \overset{?}{=} 0 \quad f(0) = \ln(0+\sqrt{1+0}) = \ln(1) = 0$

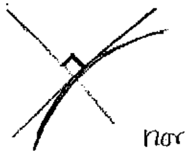
tangentens lutningskoefficient.

$f'(0) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_{x=0} = 1$ Stoppa in x=0



$y-\overset{=0}{y_0} = k(x-\overset{=0}{x_0}) \iff y = x$: tangenten.

Grafiskt: ser att $\boxed{y=-x}$

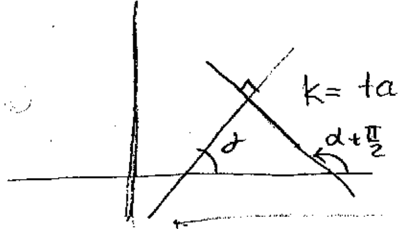


$k = f'(x_0)$

tangenten: $y-y_0 = k(x-x_0) \quad y_0 = f(x_0) \quad y=x$

normalen: $y-y_0 = k_1\,(x-x_0)$

(normalen går också genom (x_0,y_0))



$k = \tan(\alpha) = f'(x_0)$

$k_1 = \tan(\alpha+\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})} = \frac{+\cos(\alpha)}{-\sin(\alpha)} = -\frac{1}{k}$

k tangentens riktningskoeff.
k_1 normalens riktningskoeff. $\Big\}$ $k \cdot k_1 = -1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k}$

I1j. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \overset{?}{\leq} \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$ Induktionsmetod.

1. $n=1$ vl: $\frac{1}{1} = 1$ hl: $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ vl $\leq$ hl.

2. Antag att påståendet är sant för något $n=m \iff$

$\iff \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2m^2}$ under antagandet i 2.

3. Gäller då att påståendet är sant även för $n=m+1$?

$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{(m+1)^3} \underset{\uparrow \text{enligt IA}}{\leq} \frac{3}{2} - \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{(m+1)^3}$ Förra uppskattning.

Kan vi påstå att: $\cancel{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{(m+1)^3} \leq \cancel{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2(m+1)^2}$ (hl för m+1)

$\iff \frac{1}{(m+1)^3} + \frac{1}{2(m+1)^2} \overset{?}{\leq} \frac{1}{2m^2} \iff \frac{2+m+1}{\underbrace{2(m+1)^3}_{>0}} \overset{?}{\leq} \frac{1}{\underbrace{2m^2}_{>0}}$ multiplicera upp nämnarna!

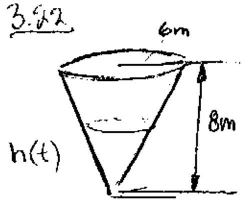
$\iff m^2(m+3) \leq (m+1)^3$

$m^3+3m < m^3+3m^2+3m+1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2(m+1)^2}$

$\left(\leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{(m+1)^3} <\right)$

ANALYS - ÖVNING 9 2001/9/24

3.22



volymenet

Påfyllning sker med $0{,}1\ m^3/min$

Med vilken hastighet stiger vattenytan, då vattendjupet är 4 m?

$V(t)$ = volymen vatten som funktion av t

Ger på fyllnadshastigheten.

$$\frac{dV}{dt} = V'(t) = 0{,}1\ m^3/min$$

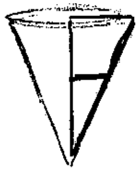
Vid tiden t, så är vattenytan på höjd $h(t)$

Hur mycket är $h'(t_0)$, där $h(t) = 4$ m

Vilken är hastigheten höjden stiger med.

- Hitta samband mellan det givna, och det som sökes.

$$V(t) = \overset{k}{\tfrac{1}{?}} B(t)\,h(t) = k\cdot\pi(r(t))^2 h(t)$$



Likformighet: $\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ $r(t) = \frac{3}{4}h(t)$

$$V(t) = k\cdot\pi\cdot\tfrac{9}{16}(h(t))^3$$

$$V'(t) = k\pi\cdot\frac{9}{16}\cdot 3h^2(t)\,h'(t) = 0{,}1\ m^3/min$$

$$t_0:\ h(t_0) = 4 \quad h'(t_0) = \frac{0{,}1\cdot 16}{9\cdot 3\cdot h^2\pi}\cdot\frac{1}{k} = \frac{0{,}1\cdot\cancel{16}}{9\cdot 3\cdot\cancel{16}\pi}\cdot\frac{1}{k} = \frac{1}{270\pi\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{90\pi}\ m/min$$

Var noga med vad som det frågas efter!

23 b: $D^n f = f^{(n)}$ $\quad f(x) = x^3 e^x$

Leibniz formel; derivera n gånger

$$\left(f(x)\,g(x)\right)^{(n)} = f^{n}(x)\,g^{(0)}(x) + \binom{n}{1}f^{(n-1)}g^{(1)}(x) + \binom{n}{2}f^{(n-2)}g^{2}(x) + \ldots$$

$$\ldots + f^{(0)}(x) + g^{(n)}(x)$$

ÖVNING: Bevisa Leibniz formel mha induktion.

Använd dessa egenskaper hos binomialkoefficienterna:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

1. exponentialfunktionen kommer att ge sig själv vid derivation
2. x^3e^x kommer att ge nollor.

$(x^3)^{k} = 0 \quad k \geqslant 4$ Bara derivator fram till 3 som ger tal, ty potensen sjunker.

$f(x) = e^x \qquad g(x) = x^3$

$$(x^3e^x)' = 3x^2e^x + x^3e^x$$

$$(x^3e^x)'' = e^x x^3 + \binom{2}{1}\overset{f'(x)}{e^x}\overset{g'(x)}{3x^2} + \overset{g(x)\cdot\ f''(x)}{e'(x)\cdot 6x} = e^x(x^3 + 6x^2 + 6x)$$

$$(x^3e^x)''' = \overset{f'''(x)}{e^x x^3} + \binom{3}{1}e^x 3x^2 + \binom{3}{2}e^x\cdot 6x + e^x\cdot\overset{g'''(x)}{6} = e^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6)$$

$n > 3$:

$$\underset{g\ \ f}{(x^3e^x)^{(n)}} = e^x x^3 + \binom{n}{1}e^x\overset{g'(x)}{3x^2} + \binom{n}{2}e^x\overset{g''(x)}{6x} + \binom{n}{3}e^x\overset{g'''(x)}{6} + 0 + 0\ldots$$

alla $k \geqslant 4 = 0$

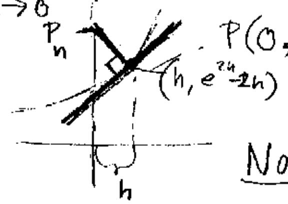
$$= e^x\left(x^3 + 3nx^2 + \overset{\left(\frac{(n-1)(n-2)}{3}\right)}{3n(n-1)x} + n(n-1)(n-2)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)\,g^{(k)}(x)$$

3.25 Kurva $y = f(x) = e^{2x} - 2x$

P_h: punkten där normalen i punkten med x-koordinaten h till kurvan skär y-axeln.

$\lim_{h \to 0} P_h = ?$ (frågas efter en punkt.) Gränsvärdet av $y(h)$ $h \to ?$ söks



$P(0, y_0)$ $P_h(0, \boxed{y(h)})$

Normalens ekvation genom $(h, e^{2h} - 2h)$

riktningskoefficient : k_1

$k_1 \cdot k = -1$, där k är tangentens riktningskoeffi.

$k = f'(h) = e^{2x} \cdot 2 - 2 \Big|_{x=h} = 2(e^{2h} - 1)$

$k_1 = -\frac{1}{2(e^{2h}-1)}$

Normalens ekvation:

$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$

$y - e^{2h} + 2h = -\frac{1}{2(e^{2h}-1)}(x-h)$ Skärningen med y-axeln $\Leftrightarrow x=0$

[Sätt $x=0$]

förläng m 2 $e^{2h} \to 1$ $2h \to 0$

$y_n = e^{2h} - 2h + \frac{h \cdot 2}{2 \cdot 2(e^{2h}-1)} \xrightarrow[h \to 0]{} 1 - 0 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ $\to 1$

Svar: P: $\left(0, \frac{5}{4}\right)$

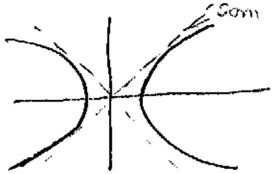
$\cosh(x) \overset{def}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ De hyperboliska funktionerna

$\sinh(x) \overset{def}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ hyperboliska ettan

som ½ fast i dessa linjer

$x^2 - y^2 = 1$



← hyperbel

UPPG. 187.d

$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$

$Vl: \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$ $hl: \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + \cancel{2} + e^{-2x} + e^{2x} - \cancel{2} + e^{-2x}}{4}$

$= \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = coh(2x)$

$(\sinh(x))' = \frac{e^x + e^{-x}(+1)}{2} = \cosh(x)$

$(\cosh(x))' = \frac{e^x + e^{-x}(-1)}{2} = \sinh(x)$

(Lika trig. formler
olikheter: vissa tecken)

$\cos(ix) = \cosh(x)$

$\sin(ix) = i\sinh(x)$

3.30 a. Bestäm inversen till $\sinh(x)$

$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \quad /2$ $\quad e^x - e^{-x} = 2y \; |\cdot e^x$ förläng allt m. e^x

$e^{2x} - 2y e^x - 1 = 0$ [sätt $e^x = t$]

$t^2 - 2y \cdot t - 1 = 0$

Kvadrat komplettera!

$(t-y)^2-y^2-1=0 \qquad (t-y)^2=1+y^2$ två möjligheter

$t=y+\sqrt{1+y^2} \qquad t=y-\sqrt{1+y^2}$

$t=e^x$ Inversen till $\sinh(x)$

① $e^x=y+\sqrt{1+y^2} \qquad x=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$

② $e^x=y-\cancel{\sqrt{1+y^2}}<0$ VL alltid positiv HL alltid neg. går ej!

○ b. Derivatan $\ln(y+\sqrt{1+y^2}))' = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

motsvarigheten till arcus sinus.

---

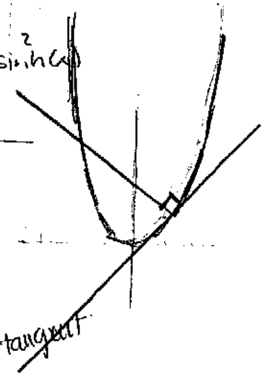
c. Hade uppg. i b. kunnat lösas utan att lösa uppg a?

$$\left(f^{-1}(y)\right)'\Big|_{y=a} = \frac{1}{\text{derivatan för } \sinh(x)} = \frac{1}{\cosh(x_0)}$$

$x_0=f^{-1}(a)$ inversen till $\sinh(x_0)$

Vet ej vad x_0 är, innan vi löst. Om a godt. krävs ∴ ej att vi löst ut a. Annars krävs det.

Hyperboliska ettan $\cosh^2(x)=1+\sinh^2(x)$ ger oss svaret.



34. $y=x^2$

i (a,a^2) dra normalen. Var skär den parabeln?

tangenten i (a,a^2): $y-a^2=2a(x-a)$

normalen i (a,a^2): $y-a^2=-\frac{1}{}(x-a)$

EKV.SYST

$$\begin{cases} y-a^2=\frac{1}{2}(x-a) \\ y=x^2 \end{cases}$$

$x^2-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a)$

$(x-a)(x+a)=-\frac{1}{2a}(x-a)$ två möjligheter

$(x-a)=0$

$x=a$

$y=a^2$

(a,a^2)

OBS! Förkorta ej med $(x-a)$ utan att hälla den möjl. först

$(x-a)\neq 0$ kan den förkortas bort

$x+a=-\frac{1}{2a}$

$x=-a-\frac{1}{2a}$, $y=(a+\frac{1}{2a})^2$

Punkten: $\left((-a-\frac{1}{2a}),(a+\frac{1}{2a})^2\right)$

Två punkter uppfyller ekv. Varav den ena var given i början. Denna måste vi få också. Detta är en koll på att man har gjort rätt.

GRÖNA HÄFTET FKM

ansats till lösning

165.a. Bestäm $a,b\in\mathbb{R}$ s.a $e^{ax}\cos(bx)$ satisfierar $y''+2y'+3y=0$

Troligt, ty e^P och $\cos(P)$ och $\sin(P)$ ger ungefär sig själva vid derivation.

$(e^{ax}\cos bx)'=e^{ax}\cos bx+e^{ax}(-\sin bx)b$

$(e^{ax}\cos bx)''=e^{ax}\cdot a^2\cos(bx)+2e^{ax}\cdot a(-\sin(bx))\cdot b+e^{ax}(-\cos(bx))\cdot b^2$

byt ut: $e^{ax}\Big[\underbrace{a^2\cos(bx)-2ab(\sin(bx)-b^2(\cos(bx)}_{y''}\underbrace{-(2b\sin(bx)}_{y'}$

$+\underbrace{3\cos(bx)}_{y}\Big]$

$\Longleftrightarrow e^{ax}\left[(a^2-b^2-2a+3)\cos(bx)-2b(a+1)(\sin(bx))\right]=0$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a + 3 = 0 \\ 2b(a+1) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} b = 0 \\ a = -1 \end{matrix}$$

$\underline{b=0}$

$a^2 + 2a + 3 = 0$ inga reella lösningar för a = ej möjligt.

$\underline{a=-1}$

$1 - b^2 - 2 + 3 = 0 \quad b^2 = 2 \quad b = \sqrt{2}$

$\big(\cos(\sqrt{2}\,x) = \cos(-\sqrt{2}\cdot x)$ cos är jämn.

Alltså behöver vi ej kolla $-\sqrt{2}\,\big)$

$$\boxed{e^{-x}\cos(x\sqrt{2})}$$

Vanligt problem.

Misstankar om lösning. Stoppa in i ekv.

derivera. Kolla.

ANALYS ÖVNING 10

2001/09/27

FKM. 167.d. $\left(x^{\ln x}\right)' = \left(e^{\ln x \ln x}\right)' = \left(e^{(\ln x)^2}\right)'$

$= e^{(\ln x)^2} \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} = x^{\ln(x)-1} \cdot 2\ln(x)$

$\left(f(x)\right)^{g(x)} \underset{=}{\text{def}} e^{g(x)\cdot\ln(f(x))} \qquad a^b = e^{b\ln(a)}$

168.c. $f'(4) \quad f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$

(Om logaritmer inblandade kan vi använda logaritmlagar för att förenkla?)

$f'(x)\Big|_{x=4} \quad \left(e^{\sqrt{x}\cdot\ln(\sqrt{x})}\right)'\Big|_{x=4} = \left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}\ln(x)}\right)'\Big|_{x=4} =$

$= e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}\ln(x)}\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x) + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=4} =$

ersätt tillbaka alltid då ekv. klar

$\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x) + \cancel{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\Big|_{x=4} = 4\cdot\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(4)+1\right)$

$= \ln(2) + 1$

---

172 d. Bestäm ekvationer för tangent och normal till

$x^3 + xy + y^3 = 1$ i punkten $(0,3)$

ekvationen för en kurva, exempelvis en cirkel. $x^2+y^2=1$ $\begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} \\ y = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

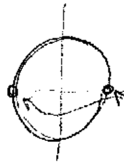
alltså ej grafen till en funktion.

givna punkten bestämmer vilken av ovan lösn.

<u>Implicit derivering.</u> $\forall\, y(x)$ Implicit funktion

Ekvationen kan ge upphov till flera implicita funktioner

Vilken vi väljer bestäms av punkten som är given.

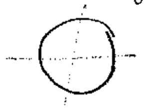


I närheten av dessa punkter : finns inga implicita funktioner.

Kravet för att det ska gå:

$F(x,y)=0$ Krav: $F'_y(0,1) \neq 0$

x^2+y^2-1



$F'_y = 2y$

$F(x,y) = x^3 + xy + y^3 - 1$

$F'(y) =$ (x behandlas som konstant, derivera m.avseende på y).

$F'_y = x + 3y^2 \quad F_y'(0,1) = 3 \neq 0$

Implicit funktion $y = y(x)$ $\quad (x,y) = (0,1)$

$x^3 + xy(x) + (y(x))^3 = 1 \quad \Rightarrow y(0) = 1$

Derivera likheten m.avseende på x. (Implicit)

$$3x^2 + y(x) + xy'(x) + 3y^2(x)\cdot y'(x) = 0$$

derivatan av 1

flytta över allt

$$y'(x) = \frac{-3x^2 - y(x)}{x + 3y^2(x)} \quad = F'_y$$

$$y'(0) = \frac{0-1}{0+3} = -\frac{1}{3}$$

IP16 Visa att $\exists\, f(x)$ som är kontinuerlig $\forall x$ så att

$$f'(x) = \frac{x^3+1}{|x+1|}, \quad x \neq 1$$

Bestäm en sådan funktion.

Konstruktivt bevis: Vi visar en funktion. Därmed är dess existens bevisad.

$f'(x) = \frac{x^3+1}{|x+1|}$ för $x \neq 1$ ska vara kont. för alla x ändå

$$\frac{x^3+1}{|x-1|}\begin{cases} \frac{x^3+1}{-(x+1)} = -x^2+x-1, & x<-1 \\ \quad -1+1-1=-3 & \\ \frac{x^3+1}{(x+1)} = x^2-x+1 & x>-1 \\ \quad 1+1+1=3 & \end{cases}$$

$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = -3 \qquad \lim_{x\to -1^+} f'(x) = 3$

Olika höger- och vänster-gränsvärden. Det går ej att definera den funk så att funk blir kontinuerlig

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C_1 & x < -1 \\ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C_2 & x > 1 \end{cases}$$

Välj konstanter C_1 och C_2 s.a $f(x)$ kont även i $x=-1$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + C_1 = \frac{11}{6} + C_1$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 + C_2 = -\frac{11}{6} + C_2$

Välj $C_1 = 0$

$C_2 = \frac{11}{3}$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 0 & x < -1 \\ \frac{11}{6} & x = -1 \\ -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \frac{11}{3} & x > -1 \end{cases}$$

Vi definerar f(-1) som

$\lim f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = \frac{11}{6} \Rightarrow f$ kont. även i -1.

$f(x) = x^2 - 2x + 3$

f kont. i $x_0 = 2$? f deriverbar i $x_0 = 2$?

Kontinuitet $\boxed{\lim_{x \to 2} f(x) = 3} = f(2)$ måste visa att gränsvärdet är 3.

Tag $\varepsilon > 0$ $\overset{?}{\exists} \delta_\varepsilon > 0 : \forall x$ $|x-2| < \delta_\varepsilon$ $\underbrace{|f(x)-3|}$ $< \varepsilon$

(Börja i det som vi vill ska vara uppfyllt. Förenkla.)

(ersätt x med ngt större än 2, som x går mot)

$|x^2 - 2x + \cancel{3} - \cancel{3}| = |x(x-2)| < 3|x-2| < \varepsilon$

$\delta_\varepsilon :$ $3|x-2| < 3\delta_\varepsilon \leq \varepsilon$ $|x| < 3$ $|x-2| < 1$

$0 < \delta_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{3}$ $\boxed{\delta_\varepsilon < 1}$

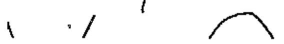
Deriverbarhet: $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x^2-2x+\cancel{3}-\cancel{3}}{x-2} = \frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = x \underset{x \to 2}{\to} 2$

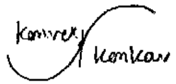
Grafritning

f(x) 1. Hitta D_f (strecka där f(x) ej definierad), V_f, nollställe)
2. lim, assymptoter
3. Symmetrier (=jämn, udda, periodicitet)
4. kontinuitet

---

5. f'(x) Derivera en gång: extrempunkter, terasspunkter
(i de punkter där det går) : växande, avtagande
6. f''(x) Konvex, konkav





inflexionspunkter (där den byter fr. konvex till konkav)

(terasspunkter = specialfall av inflexionspunkter)

KAPITEL 4

1.c. hitta extrempunkter   4.c. Rita grafen

$f(x) = x^2 e^x$ $D_f = \mathbb{R}$

nollställen : $x = 0$

2. Limes

$\lim_{x \to \infty} x^2 e^x = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2}{e^t}$ $[t = -x]$

$V_f : [0, \infty)$

ej gränsvärdet
Som ger slutet intervall

2. Assymptoter ; $y = 0$ i $-\infty$

$\frac{f(x)}{x} = xe^x \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \infty$ ingen ass i $+\infty$

3. Ej jämn, udda el. periodisk

$f(-x) = x^2 e^{-x} \neq f(x)$
$\neq f-(x)$

4. Kontinuerlig : Ja, och oändligt deriverbar.

$x=-2$ $x=0$

5. $f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = e^x \cdot x(x+2)$

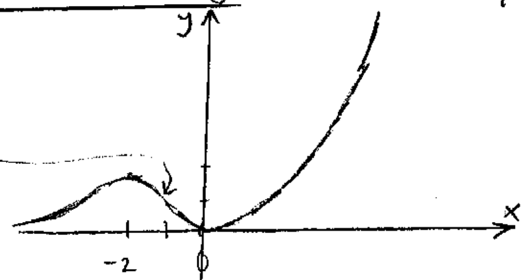
$x = -2$ och $x = 0$ stationära punkter. (terass el. extrem)

x		-2		0	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	lok max	↘	lok min	↗

globalt min.

Kolla efteråt! Stämmer detta med gränsvärden o dyl!?

minst en inflexions punkt



Allt som är sammansatt av elementära funktioner: kontinuerlig i alla punkter där funktionen är definerad.

Ex 6B $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{1+\frac{1}{2}\cos(3x)}$ $\geq \frac{1}{2}$ ty cos kan aldrig bli noll

$D_f = \mathbb{R}$

nollställen = $3x = n\pi$ $x = \dfrac{n\pi}{3}$, n = heltal $\in \mathbb{Z}$

periodisk = gränsvärden saknas, assympt. saknas

period $\leq \frac{2\pi}{3}$ (här är den $= \frac{2\pi}{3}$)

$\Rightarrow$ vi kan nöja oss med ett $\frac{2\pi}{3}$ långt intervall. Sedan ser grafen likadan ut på hela x-axeln.

Kontinuerlig - elementära funktioner. nämnaren blir aldrig no

udda $f(-x) = \dfrac{\sin(-3x)}{1+\frac{1}{2}\cos(-3x)} = -\dfrac{\sin(x)}{1+\frac{1}{2}\cos(3x)} = f(x)$

kolla alltid ?

ÖVNING: demera tips: m-

$\Rightarrow$ Vi kan nöja oss med $[0, \frac{\pi}{3}]$.

Mha udda symmetri får vi då

ÖVNING. tors LV 5

4.6. $\dfrac{\sin(3x)}{1+\frac{1}{2}\cos(3x)}$, $x \in \mathbb{R}$

f udda $\Rightarrow$ Räcker titta på halva intervallet $x \in [0, \infty)$

$(f(-x) = -f(x))$ $\forall x$

f periodisk med period $\frac{2\pi}{3}$

Räcker att titta på $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$

$f'(x) = \dfrac{3\,(\cos(3x)+\frac{1}{2})}{(1+\frac{1}{2}\cos(3x))}$, $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$

- $f'(x) = 0$, $x \in I = [0, \frac{\pi}{3}]$

$\Leftrightarrow \cos(3x) = -\frac{1}{2}$, $x \in I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(\pi - 3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi - 3x = \frac{\pi}{3}$, $x \in I$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{9}$

x	0		$\frac{2\pi}{9}$		$\frac{\pi}{3}$
f'	+	+	0	−	−
f		↗	⌢	↘	

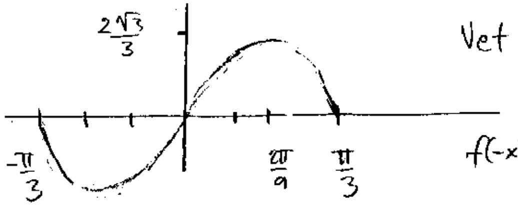
Assymptoter saknas! periodisk funkt.

Värdetabell:

x	f(x)
0	0
$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$f\left(\frac{2\pi}{9}\right) = \dfrac{\sin\left(3\cdot\frac{2\pi}{9}\right)}{1+\frac{1}{2}\underbrace{\cos\left(3\cdot\frac{2\pi}{9}\right)}_{-\frac{1}{2}}}$

$= \dfrac{\sin(\frac{2\pi}{3})}{\frac{3}{4}} = \dfrac{\sin(\pi - \frac{\pi}{3})}{3/4} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{3/4} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$



Vet : f(x) är udda, ty :

$$f(-x) = \frac{\sin(-3x)}{1+\frac{1}{2}\cos(-3x)} = \frac{-\sin(3x)}{1+\frac{1}{2}\cos(3x)} = -f(x$$

Speglar där för f(x) i $[-\frac{\pi}{3}, 0]$.

Vet : f periodisk med $\frac{2\pi}{3}$. Likadan graf till ∞.

9.d. $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1} + 2\arctan(x) \quad x \in \mathbb{R}$

Bestäm lokala extrempunkter, och en största och minsta värden till f.

<u>Lösn</u>: (teckenschema)

$$f'(x) \overset{\text{av kvot}}{=} \frac{1\cdot(x^2+1) - (x+2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} + 2\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

- Gemensamt bråkstreck.
- Faktorisera

$$= \frac{x^2+1-2x^2-4x}{(x^2+1)^2} + \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-x^2+1-4x+2+2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2-4x+3}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x^2+1)^2}$$

x		1		3	
f'(x)	+	0	−	0	+
f(x)	↗	⌒	↘	⌣	↗

<u>Lokala extrema</u>: x = 1 lok. max

x = 3 lok. min

<u>Globala extrema</u>:

kandidat max: x=1

kandidat min: x=3

Vi undersöker om f(x) överstiger f(1) när $x \to \infty$

— " — understiger f(3) när $x \to -\infty$

$x=1 \quad f(1) = \frac{3}{2} + 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3+\pi}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to\infty} f(x) = \underset{\text{täljarens grad < än nämnarens}}{0} + \frac{2\pi}{2} \\ f(1) = \frac{3+\pi}{2} < \frac{\pi+\pi}{2} = \pi \end{array}\right\} x=1 \text{ är } \underline{\text{ej}} \text{ globalt max!}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{x=3} \quad f(3) = \frac{1}{2} + 2\arctan(3) > 0 \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 + 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=3 \text{ } \underline{\text{ej}} \text{ globalt min}$$

<u>12b.</u> Visa att $e^x > 1+x \quad , \quad x \neq 0$

<u>lösning</u>: sätt $f(x) = e^x - x - 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

Vill visa att $f(x) > 0$ för $x \neq 0$

= ta reda på det glob. minimet, visa att det är större än noll.

$$f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{för } x > 0 \\ f'(x) = 0 & \text{för } x = 0 \\ f'(x) < 0 & \text{för } x < 0 \end{cases}$$

e^x str. växande

x		0	
f'(x)	−	0	+
f(x)	↘	⌣	↗
		glob. min	

Teckenschemat ger:

$f(x) \geq f(0) = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$

med likhet omm $x = 0$

$\Rightarrow f(x) > 0$ för $x \neq 0$

12d Visa att $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$, $x>0$

Lösn: sätt $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, $x \geqslant 0$

Vill visa $f(x) > 0$ för $x>0$

Man har $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1}{1+x} + \frac{(x-1)(x+1)}{1+x}$

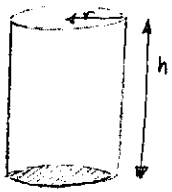
$= \frac{x^2}{1+x} > 0$ för $x>0$

$\Rightarrow f(x) > f(0)$ för $x>0$, v.s.v

positiv derivata = $f(x)$ växande

---

13. Minimera arean av plåtburken, förutsatt konstant area.



Vet att $\underset{\text{givet}}{V} = \pi r^2 \cdot h$ Kan även ha arean som funktion av höjden

Arean $= A(r) = \pi r^2 + \underbrace{2r\pi}_{=0} \cdot h$

$= \pi r^2 + 2r\pi \underbrace{\left(\frac{V}{\pi r^2}\right)}_{=h} = \pi r^2 + \frac{2V}{r}$

- Vill minimera $A(r)$, $0 < r < \infty$

$A'(r) = 2\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2}{r^2}\left(\pi r^3 - V\right)$ $\left(\begin{array}{l}\text{noll, då } (\pi r^3 - V) = 0 \\ \Leftrightarrow r = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{1/3}\end{array}\right)$

Tecken schema

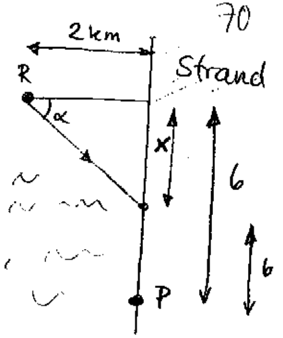
	0	$\left(\frac{V}{\pi}\right)^{1/3}$	
A'	{	− 0	+
A	{	↘ ◡	↗

$\Rightarrow A(r) \geqslant \underbrace{\left(\left(\frac{V}{\pi}\right)^{1/3}\right)}_{\text{optimal plåtburk}}$, $r>0 \dots$

$r_{min} = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{1/3}$

$h_{min} = \frac{V}{\pi \cdot r^2} = \frac{V}{\pi r_{min}} = \frac{V}{\pi \left(\frac{V}{\pi}\right)^{2/3}} = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{1/3}$

16. Kan välja antingen (α) el sträckan x som variabel.



Lösn: $S = \sqrt{2^2 + x^2}$ (Pyth.sats)

$= \sqrt{4 + x^2}$

$\left(S = v \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{S}{V}\right)$

tid fr. R till P

$T(x) = \frac{S}{6} + \frac{6-x}{10} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{6} + \frac{6-x}{10}$

Vi vill minimera $T(x)$ $(0 \leq x \leq 6)$

$T'(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4+x^2}} \cdot 2x - \frac{1}{10} = \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10} = [\text{MGN}]$

$= \frac{1}{30\sqrt{4+x^2}}\left(5x - 3\sqrt{4+x^2}\right)$ förläng m. konjugat, om ni vill

(svår-faktoriserad)

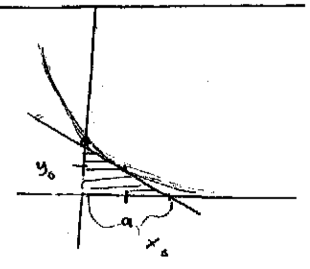
$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x = 3\sqrt{4+x^2} \overset{\substack{\text{annars abs.belopp} \\ x \geqslant 0}}{\Longleftrightarrow} 25x^2 = 9(4+x^2)$

$\Leftrightarrow 16x^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 = \frac{6^2}{4^2} \overset{x \geqslant 0}{\Longleftrightarrow} x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

X		3/2		6
T'(x)	−	0	+	+
T(x)	↘			↗

Svar: För $x = \frac{3}{2}$ minimerar roddaren tiden.

4.18 $y = f(x) = e^{-x}$, $x \geqslant 0$



Dra tangenten till $y = f(x)$ i $x = a$

Riktnings koeff. $k = f'(a) = -e^{-a}$

Enpunktsformeln ger:

$y - f(a) = f'(a)(x-a) \Leftrightarrow y - e^{-a} = -e^{-a} \cdot x + a \cdot e^{-a}$

$\Leftrightarrow \quad y = -e^{-a}x + (a+1)e^{-a}$

Vi får $y_0 = -e^{-a}\cdot 0 + (a+1)e^{-a} = (a+1)e^{-a}$

Lös ut x_0 ur uttrycket ovan.

På samma sätt fås $0 = -e^{-a}x_0 + (a+1)e^{-a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_0 = (a+1)$

Arean $= A(a) = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{x_0\cdot y_0}{2} = \frac{(a+1)^2\cdot e^{-a}}{2}$

Uppg: Maximera $A(a)$!

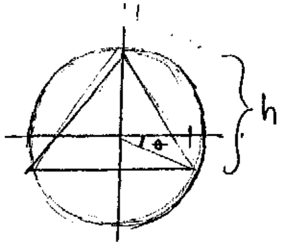
$A'(a) = \frac{1}{2}\left(2(a+1)e^{-a} + (a+1)^2\cdot(-e^{-a})\right) = \frac{1}{2}e^{-a}(a+1)\left(2-(a+1)\right)$

$= \frac{1}{2}e^{-a}(a+1)(1-a)$ (-1) ∉ Intervallet. Kolla end. på $a=1$

	0		1	
A'		+	0	−
		↗	⌢	↘

$\Rightarrow A(a) \leqslant A(1) = \frac{2}{e} \quad \forall a \geqslant 0$

4.20. Likbent triangel inskriven i enhetscirkeln. Bestäm dess maximala arean.



basen $b = 2\cos(\theta)$

$h = 1 - \sin(\theta)$

θ både kopplat till arean och enhetscirkeln = bra variabelval

$A'(\theta) = \frac{b\cdot h}{2} = \cos(\theta)\cdot(1-\sin(\theta))$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Maximera $A(\theta)$

Om man ska optimera ngt som är symmetriskt, är den optimala lösn. den mest symmetriska.

$A'(\theta) = -\sin(\theta)(1-\sin(\theta)) + \cos(\theta)(-\cos(\theta))$

$= -\sin(\theta) + \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)$

$= \sin^2(\theta) - \sin(\theta) - (1-\sin^2\theta) = 2\sin^2(\theta) - \sin(\theta)$

$= (\sin\theta - 1)(2\sin(\theta) + 1) = 2(\sin\theta - 1)(\sin\theta + \frac{1}{2})$

$A'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin(\theta) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$

$\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
A'		+	0	−	−
		↗	⌢	↘	

$\Rightarrow A(\theta) \leqslant A(-\frac{\pi}{6}) = ?$

ÖVNING:
- Räkna ut $A(-\frac{\pi}{6})$
- Kolla att den ger en liksidig triangel!!

ANALYSÖUNING 5/10/2001

4.26. $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

Systematisk koll:

- $D_f: \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$
- Nollställen: $f(x) = 0$ ger $x = 0$
- Gränsvärden då $x \to$ intervall ändarna

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 1^+} \text{"}\frac{1}{+0}\text{"} = +\infty \\ \lim_{x \to 1^-} \text{"}\frac{1}{(-0)^2}\text{"} = +\infty \end{array} \right.$$

$x = 1$ vertikal assymptot

- Sneda assymptoter

$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3}{x(x-1)^2}$ samma gradtal, samma koeff. framför x^3 $\longrightarrow 1 = k$

$f(x) - kx = \frac{x^3}{(x-1)^2} - x = \frac{x^3 - x(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-x}{(x-1)^2} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 2$

$\Rightarrow$ linjen: $y = x+2$ är assymptot i $\pm\infty$

$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(x-1)}x^3}{(x-1)^{\cancel{4}3}}$ förkort $= \frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$

f'=0 förbjudet värde f'=0

x	$-\infty$		0		$+1$		3		$+\infty$
f	$-\infty$ $x+2$ = as.	↗	terasspunkt ⓪	↗ $+\infty$		$+\infty$ ↘	lok min $\frac{27}{4}$	↗	$+\infty$ as: $x+2$
f'		+ +	0	+		−	0	+ +	
f''									

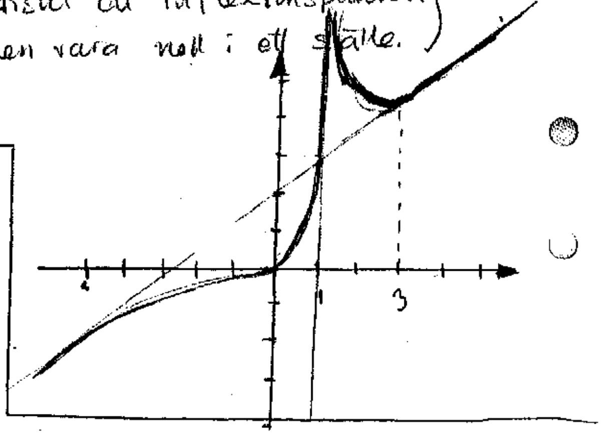
dy vi har x^2 växlar ej tecken.

$f''(x) = \frac{(2x(x-3)+x^2)(x-1)^{\cancel{3}} - 3\cancel{(x-1)}x^2(x-3)}{(x-1)^{\cancel{6}4}}$ >0

$= \frac{x}{(x-1)^4}\left[(3x-6)(x-1) - 3x(x-3)\right] = \frac{x}{(x-1)}\left[\cancel{3x^2} - 3x - 6x + 6 - \cancel{3x^2} + 9x\right]$

$= \frac{6x}{(x-1)^4}$

(terasspunkt: automatiskt en inflexionspunkt.
Om f'' ∃ ⇒ måste den vara noll i ett ställe.)



(Inledande Problem)

IP 18)

$f(x) = \frac{1}{x} + \arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(x)$

$D_f = \{x > 0\}$

Gränsvärden:

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \text{"}+\infty\text{"} + 0 - \text{"}\infty\text{"}$

$f(x) = \arctan(x) + \frac{1 + \overbrace{\frac{1}{2}x \cdot \ln(x)}^{\xrightarrow[x\to 0^+]{} 0}}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

⇒ vertikal assymptot $x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 + \frac{\pi}{2} + \infty$

Sneda assymptoter

$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{\arctan(x)}{x} + \frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 =$ kandidat för k

$f(x) - 0 \cdot x \xrightarrow[x \to \infty]{} +\infty \Rightarrow \nexists$ sned assymptot.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+x^2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{-2(1+x^2) + 2x^2 + x(1+x^2)}{2x^2(1+x^2)}$

$(x+\frac{1}{2})^2 + ..$

$= \frac{x^3+x-2}{2x^2(1+x^2)} = \frac{(x-1)\underbrace{(x^2+x+2)}}{2x^2(1+x^2)} \Rightarrow f'(x) = 0$ för $x = 1$

ej reella nollställen

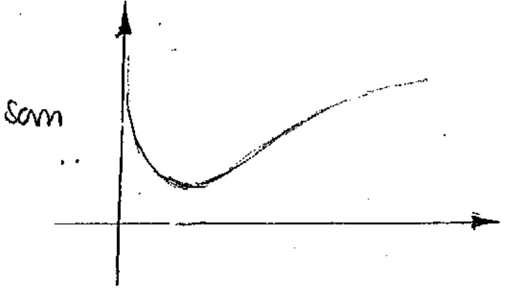
x	0^+	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	lok min	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$			

$f(1) = 1 + \frac{\pi}{4} + 0 > 0$

$\Rightarrow$ om min punkten > 0

$\Rightarrow \nexists$ nollställen

- för stora x beter sig f(x) som en logaritm.
- behöver ej beräkna $f''(x)$



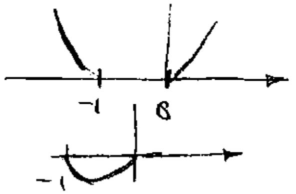
IP 19. $f(x) = \sqrt{|x^2+x|} + \sqrt{|x^2-x|}$

$D_f = \mathbb{R}$

"Brytpunkter" (om man vill få bort beloppen)

Ex: Det ena abs.bel.

$|x^2+x| = \begin{cases} x^2+x & x^2+x \geq 0 \\ -(x^2+x) & x^2+x < 0 \end{cases}$



Troligen ej deriverbar. i$(0, \pm 1)$ Så är det!

$\ln|x|$ deriverbar

$|x|^{3/2}$ —"—

- Fyra delintervall
- Fyra derivator
- Kan vi förenkla på något sätt?

$(-\infty, -1)$

$(-1, 0)$ $f(x) = \sqrt{x^2+x} + \sqrt{x-x^2}$

$(1, \infty)$

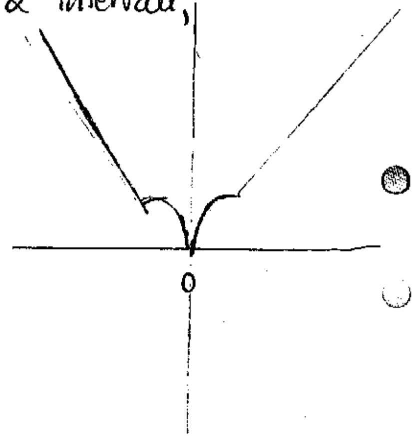
$f(-x) = \sqrt{|\underbrace{(-x)^2}_{x^2} - x|} + \sqrt{|\underbrace{(-x)^2}_{x^2} + x|} = f(x)$ jämn

$\Rightarrow$ Vi behöver endast kolla i 2 intervall, och sedan spegla.

$f(x) = \underbrace{\sqrt{|x^2+x|}}_{\sim x} + \underbrace{\sqrt{|x^2-x|}}_{\sim x}$ för stora x.

Assymptot: $y = 2x$ i $+\infty$

$y = -2x$ i $-\infty$



Derivatorna: oändliga = vertikala tangenter

TIPS: Titta på symmetrier ex: jämn, udda, periodisk. } slipper räkna
Titta på brytpunkter. } för mkt.

Kap 5.

$\frac{1}{2} \cdot (1-3x)^{-2}$

3L. $\int \frac{2}{(1-3x)^2} dx = 2\int (1-3x)^{-2} dx = -\frac{1}{3} 2 \int (1-3x)^{-2} \overset{\text{inre der.}}{(-3)} dx$

$\boxed{\int x^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C} = -\frac{2}{3} \frac{(1-3x)^{-1}}{-1} + C = \frac{2}{3} \frac{1}{1-3x} + C$

Variabelsubst: $t = 1-3x$, $x = \frac{1-t}{3}$

$dx = \left(\frac{1-t}{3}\right)'_t dt = -\frac{1}{3} dt$

$= 2\int (-\frac{1}{3}) dt = -\frac{2}{3} \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{2}{3} \frac{(1-3x)^{-1}}{-1} + C$

---

summa i täljaren - vi kan dela upp integralen, men ej om det hade varit i nämnaren

4d. $\int \frac{3+5x^{2/3}}{x^3} dx = \int \frac{3}{x^3} dx + \int \frac{5x^{2/3}}{x^3} dx =$

$= 3\int x^{-3} dx + 5\int x^{-7/3} dx = 3\frac{x^{-2}}{-2} + 5 \cdot \frac{x^{-4/3}}{-4/3} + C$

$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{x^{4/3}}$

5d. $\int \sin(2x + \frac{\pi}{3}) dx = -\cos$

jämnar ut så att inget ändras

$\frac{1}{2} \int \sin(2x + \frac{\pi}{3}) \cdot \overset{\text{inre derivata}}{2} dx = -\frac{1}{2} \cos(2x + \frac{\pi}{3}) + C$

6. f. $\int x\cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \underset{(x^2)'}{(2x)} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sin(x^3) + C$

* Osäker? Derivera svaret. Fås ursprungsuttrycket?

Träna på att se inre derivator snabbt = lättare att beräkna integraler.

8d. $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 (x^3+1)^{-1} dx = \frac{1}{3} \ln|x^3+1| + C$

log.

8g. $\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \sin x (\cos x)^{-1} dx =$ (log)

$= -\int (\cos x)' \cdot (\cos x)^{-1} dx = -\ln|\cos(x)| + C$

9f. $\int \frac{1-\tan(x)}{1+\tan(x)} dx = \int \frac{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}} dx \overset{\text{Gemensam nämnare}}{=}$

$= \int \frac{\frac{\cos x - \sin x}{\cancel{\cos x}}}{\frac{\cos x + \sin x}{\cancel{\cos x}}} dx = \int \frac{(\cos x + \sin x)'}{\cos x + \sin x} dx$

$\boxed{\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))'}$ $= \ln|\cos x + \sin x| + C$

Integralen: trälton.

ANALYS-ÖVNING Mån LV5

Variabelbyte

12.c $\int \boxed{\sin x}\cdot \cos^{-4/3} x \,\boxed{dx}$ $\begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{bmatrix}$

$$= \int t^{-4/3}\,dt = \frac{-t^{-1/3}}{-\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{\sqrt[3]{t}} + C = \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + C$$

12f. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$ $\begin{bmatrix} t = x^2+5 \\ dt = 2x\,dx \\ \boxed{x\,dx} = \frac{1}{2}\,dt \end{bmatrix}$ (Skriv om som potens om du vill)

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+5} + C$$

$(\int t^{1/2}\,dt)$

13.c. $\int \frac{x}{\sqrt{2x+5}}\,dx$ $c=0,\ d=1$

$R\left(x, \underbrace{\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}}_{=t}\right)$

$\begin{bmatrix} \text{Sätt } t = \sqrt{2x+5} & t^2 = 2x+5 \quad x = \frac{t^2-5}{2} \\ dx = t\,dt & \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \int \frac{\frac{t^2-5}{2}}{\cancel{t}}\cdot \cancel{t}\,dt = \frac{t^3}{6} - \frac{5t}{2} + C = \frac{(2x+5)^{3/2}}{6} - \frac{5}{2}\sqrt{2x+5} +$$

ersätt med en funk. av x

Substitution som fungerar, då vi har uttryck av typen!

13.d $\int \frac{dx}{x+x^{1/3}} = \left[\text{Ej en funktion av typ } R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\right]$

$\begin{bmatrix} t = x^{1/3} \\ x = t^3 \\ dx = 3t^2\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{3t^2\,dt}{t^3+t} =$ {faktorisera nämnaren}

Partialbråk

$$= \int \frac{3t^{\cancel{2}}\,dt}{\cancel{t}(t^2+1)} \text{ [förkorta]} = \int \frac{3t+0}{(t^2+1)}\,dt =$$

Likt derivatan av nämnaren

$\begin{bmatrix} \text{Sätt } (t^2+1) = u \\ 2t\,dt = u \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2}\ln|u| + C$

återsubst,

$$= \frac{3}{2}\ln|\underbrace{t^2+1}_{>0}| + C = \frac{3}{2}\ln(x^{2/3}+1) + C,$$

(Om man har tid + funktionen relativt enkel; derivera för att kolla om du fått rätt svar)

14.e $\int x \arctan x \, dx$ Typ: $\int$ Polynom(x) arctan(x) dx

$\int P(x) \ln(x)\,dx$ (ger rationella funktioner)

$\int P(x) \arcsin(x)\,dx$ (ger rötter så man behöver göra ytterligare variabelbyte)

$$\boxed{\int f'g = fg - \int fg'\,dx}$$

$$\int x \arctan x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \arctan(x)\,dx =$$

$$\frac{x^2}{2}\arctan(x) - \int \frac{x^{②}}{2}\cdot\frac{1}{1+x^{②}}\,dx$$

deg(täljaren) = deg(nämnaren) = 2

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int 1\cdot dx + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

← lägg till, dra ifrån

$\int 1$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan(x) + C$$

[Annars: polynomdivision. Ställ upp!]

14g. $\int 1\cdot\ln^2 x\,dx$ Potens av ln, eller av arctan x sätt en etta framför

$$= \int x'(\ln x)^2\,dx = x\ln^2 x - \int \cancel{x}\cdot 2\ln(x)\cdot\frac{1}{\cancel{x}} =$$

$$= x\ln^2 x - 2\int x'\ln x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx =$$

$$= x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + C$$

14.h. $\int x^2\sin(x)\,dx =$ [När vi integrerar polynom, fås polynom av högre gradtal.]

$$\left\{\begin{array}{l}\int P(x)\sin(ax)\,dx\\ \int P(x)\cos(ax)\,dx\\ \int P(x)e^{ax}\,dx\end{array}\right.$$

$$= \int\left(\frac{x^3}{3}\right)'\sin x\,dx = \frac{x^3}{3}\sin x - \int\frac{x^3}{3}\cos x\,dx$$

Rätt, men ingen bra idé. Ty vi vill få mindre potens, ej högre.

$$\int x^2(-\cos x)'\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cdot\cos x\,dx =$$

(Bra, ty vår potens är nu mindre) flytta över derivatan från sin till cos

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\cdot\sin x\,dx =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

15a. $\int e^x\sin x\,dx$ En speciell typ av integraler.

$$\int e^{ax}\left\{\begin{array}{l}\sin bx\\ \cos bx\end{array}\right\}dx$$

- Integrera partiellt två gånger
- Få en ekvation för den obekanta integralen.

$$\underbrace{\int e^x\sin x\,dx}^{I(x)} = \int(e^x)'\sin x\,dx \overset{P.I}{=} \overset{F}{e^x}\cdot\sin x - \int e^x\cdot\cos x\,dx$$

Samma sak engång till (sin x)'

$$= e^x\cdot\sin x - \int(e^x)'\cos x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x + \underbrace{\int e^x(-\sin x)\,dx}_{-I(x)}$$

flytta över alla integraler på en sida

S.... alla primitiva funk. till integranden.

$$2I(x) = e^x(\sin x - \cos x) + C$$

$$\int e^x\sin x\,dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$$

[Varje gång man skriver en obestämd integral = alla lösningarna till funktionen. Glöm ej +C!]

Rationella Funktioner:

17.b $\int\frac{x^3+5x^2+2x-1}{x+3}\,dx = \int(x^2+2x-4)\,dx + 11\int\frac{dx}{x+3}$

deg(täljaren) > deg(nämnaren)

⇒ vi behöver utföra polynomdivision

$$\begin{array}{l|l} x^2+2x-4 & \\ \hline x^3+5x^2+2x-1 & x+3\end{array}$$

rest: $\frac{11}{x+3}$

$\int (x^2+2x-4)\,dx + 11\int \frac{dx}{x+3} = \frac{x^3}{3} + x^2 - 4x + \ln|x+3| + C$

Fundera: Är detta verkligen "samtliga" primitiva funk.?
Vad skulle kunna ändras, så att vi får samtliga?

$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + C$ samma fråga här

---

18c. $\int \frac{5x^2-7x+13}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx$

LISTA PÅ ÅTGÄRDER

① Polynomdivision – behövs ej $\deg(\text{tälj}) < \deg(\text{nämn})$

② Faktorisera nämnare
hitta ett nollställe. Dividera bort det. Lösa ut de 2 övriga nollställena.

② $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$a_n = a_3 = 1$

$a_0 = 6$

Om det finns en rationell rot $\frac{p}{q}$; p & q relativt prima, så att p delar $a_0 = 6$, och q delar $a_3 = 1 \Rightarrow q = 1$

$p \in \mathbb{Z}$ $\quad q \in \mathbb{N}$

$p: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$x_0 = 1$ är en rot!

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{1}{l}{x^2 - 5x + 6} & \\ \hline x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x-1 \\ -(x^3 - x^2) & \\ 0 \;\; -5x^2 & \\ -(5x^2 + 5x) & \\ 0 \;\; 6x & \\ -(6x - 6) & \\ 0 \;\; 0 & \end{array}$$

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$

$= (x-1)(x-2)(x-3)$

$(-1)^n x_1 x_2 x_3 \dots x_n = a_0$ $\quad$ (-1) upphöjt i gradtalet gånger produkten av alla rötter ger oss konstanten.

① Polynomdivision
② Faktorisera nämnaren
③ Partialbråksuppdela

③ Partialbråksuppdela

$$\frac{5x^2 - 7x + 13}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

Hur ska vi bestämma konstanterna A, B och C?

Multiplicera upp nämnaren

$5x^2 - 7x + 13 = A\,(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2) \quad \forall x$

2 Metoder

"HANDPÅLÄGGNING"

①: Ge x konkreta värden. Då försvinner en del termer.

$x = 1: \quad 11 = \underbrace{A(-1)(-2)}_{2A} + 0 + 0 \Rightarrow A = \frac{11}{2}$

$x = 2: \quad 19 = 0 - B + 0 \Rightarrow B = -19$

$x = 3: \quad 37 = 0 + 0 + 2C \Rightarrow C = \frac{37}{2}$

Bara reella rötter.
Bara första-potenser i rötterna

Bästa metoden att använda är den ovan.

Egentligen gäller allt ovan för alla $x \notin 1, 2, 3$ ty då fås division med noll. Men vi har en kontinuerlig funktion, och om vi använder gränsövergång, får vi sätta x till dessa värden.

$$\int \frac{5x^2 - 7x + 13}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}\,dx = \int \left(\frac{11/2}{x-1} + \frac{-19}{x-2} + \frac{37/2}{x-3} \right) dx$$

$$= \frac{11}{2}\ln|x-1| - 19\ln|x-2| + \frac{37}{2}\ln|x-3| + C$$

19 d. $\int \frac{dx}{x^3+2x^2+x}$

Kommer ge upphov till 2 partialbråk

② Faktoruppdela: $x(x^2+2x+1) = x(x+1)^{②}$

$$\frac{1}{x^3+2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

[Multiplicera upp nämnaren]

[Enl. Sats får vi så många partialbråk som potensen i nämnaren. $(x+1)^2$ ger då $\frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$
$(x+1)^3$ hade gett: $\frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$]

$$\Rightarrow 1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

$x=0$ $\quad 1 = A + 0 + 0 \; \boxed{\Rightarrow A=1}$

$x=-1$ $\quad 1 = 0 + 0 - C \; \boxed{\Rightarrow C=-1}$

hand påläggning ej effektivt i detta fall.

Metod 2: Jämföra koefficienterna framför potenserna av x; (HL och VL):

	V.L		H.L
$\boxed{x^2}$:	$\boxed{0}$	=	$\boxed{A+B}$ $\Rightarrow B=-1$
x^1:	0	=	$2A+B$
$\boxed{x^0}$:	1	=	A

[LINJÄRT EKV-SYSTEM (Lika mång ekv som obekanta)
Alltid lätta att hitta. Svårare att se om många potenser.]

$$19.d \quad \int \frac{d}{x^3+2x^2+x} = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}\right)dx =$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| - \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x| + C$$

Skriv om $= -\int \frac{dx}{x-1}$

23d. $\ast \int \frac{x+1}{(x^2+4x+6)}$ partialbråk

inga reella nollställen

1. Polynomdividera
2. Faktoruppdela nämnare

$\frac{x+1}{x^2+4x+6}$ Kvadratkomplettera nämnare

vill ha typen: $\frac{t}{t^2+1}$ $\quad \frac{1}{t^2+1}$

$$= \frac{x+1}{(x+2)^2+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

[Sätt $t = \left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)$
$x = \sqrt{2}\,t - 2$
$dx = \sqrt{2}\,dt$]

$$\ast \int \frac{x+1}{x^2+4x+6} = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}t-2+1}{t^2+1}\sqrt{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{\boxed{2t}}{t^2+1}dt - \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{t^2+1}$$

inre derivatan till $\ln(t^2+1)$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan t + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+4x+4}{2}+1\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+6) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{2}} + C$$

$\left(-\frac{1}{2}\ln(2) = \text{konst}\right.$ inbakad i detta C

Detta $C \neq C$

[Det blir alltid en logaritm och en arctan,
el: en log. / el. en arctan vid uttryck]

25.b $\int \frac{dx}{x^4-1} = \int \frac{-1/4}{x+1}\,dx + \int \frac{1/4}{x-1} + \int \frac{-1/2}{x^2+1}\,dx$

$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x+1)(x-1)(x^2+1)$ ②

③ Partialbråksuppdela

$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ /. (x^4-1)

$1 \overset{\text{identitet } \forall x}{\equiv} A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)$

(Hitta x så att alla utom en term försvinner)

$x=1 \Rightarrow 1 = 4B \Leftrightarrow$

$x=-1 \Rightarrow 1 = -4A \Leftrightarrow$

$(x=\pm i)$ Jämför Koefficienter framför högsta och lägsta potensen (konstanten)

Koeff. framför $x^3 = 0 = \overbrace{A+B}^{0} + C \Rightarrow C = 0$

$x^0 = 1 = A+B-D$

$1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}-D \Rightarrow D = \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}$

$\int \frac{dx}{x^4-1} = \int \frac{-1/4}{x+1}\,dx + \int \frac{1/4}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/2}{x^2+1}\,dx =$

$= -\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\arctan(x) + C$

Fundera: Är detta verkligen alla lösningar?

Varför ej? Har att göra m. konstanten

Kolla på lösningen till $\frac{x^3+1}{x+1}$ i extrauppg.häftet.

27.c * $\int \frac{3}{(x+1)^2}\underbrace{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}_{=t}\,dx$ $(x>1)$

$\left[\frac{x-1}{x+1} = t^2 \quad x-1 = t^2x+t^2 \quad x = -\frac{t^2-1}{t^2-1} = \frac{1+t^2}{1-t^2}\right]$

(Gör sådana här subs, då vi har rotuttryck i täljare el. nämnare. Dock ej vid ln(rotuttryck))

$dx = \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right) dt = \frac{2t(1-t^2)-(-2t)(1+t^2)}{(1-t^2)^2}\,dt = \frac{4t}{(1-t^2)^2} =$

* $\int \frac{3}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = \int \frac{3}{\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}+1\right)^2}\cdot t \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2}\,dt =$

$= \int \frac{12t^2}{\frac{2}{\cancel{(1-t^2)^2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{(1-t^2)^2}}\,dt = \int 3t^2\,dt = t^3 + C = \left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)^3 + C$

28b $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}} = \left[\begin{matrix} t = x+2 \\ dt = dx \end{matrix}\right] = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$

tabellintegral

$\pm t^2 + \alpha$

$= \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) + C = \ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right) + C$

29c. $\int \sqrt{x^2+2x+3}\,dx \overset{\text{Kvadrat-komplettera}}{=} \int \sqrt{(x+1)^2+2}\,dx$

$\left[\begin{matrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{matrix}\right] = \int \sqrt{t^2+2}\,dt$ (Finns olika sätt att göra. Bra att använda $\ln\left(t+\sqrt{t^2+c}\right)$ ngt av typ)

Variabelsubstitution: $\boxed{u = t + \sqrt{t^2+2}}$

uttrycket innanför logaritmen

uttryck t och dt i termer av u.

$u = t + \sqrt{t^2+2} \Leftrightarrow u - t = \sqrt{t^2+2}$ $(u > t)$ ty $u = t + $ ngt positiv

$\Leftrightarrow u^2 - 2tu + \cancel{t^2} = \cancel{t^2} + 2 \Leftrightarrow 2tu = u^2 - 2 \Leftrightarrow t = \frac{u^2-2}{2u}$

(VIKTIGT! Flytta över t innan du kvadrerar!)

$$dt = \frac{2u2u - 2(u^2-2)}{4u^2} = \frac{2u^2+4}{4u^2}du = \frac{u^2+2}{2u^2}du$$

$$= \begin{bmatrix} u = t + \sqrt{t^2+2} \\ t = \frac{u^2-2}{2} \\ dt = \frac{u^2+2}{2u^2}du \end{bmatrix} = \int \left(u - \frac{u^2-2}{2u}\right) \underbrace{\frac{u^2+2}{2u^2}du}_{dt}$$

- Gå tillbaka till t
- Gå tillbaka till x

31.b $\int \frac{dx}{2 + \sin x}$ *

- hitta en direkt metod att lösa
- Eller: universal subst.

$\boxed{x = 2\arctan t \quad x \in (-\pi, \pi)}$ ← ingen inskränkning, ty allt som händer m. sin händer här.

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Om $x \in (\pi, 3\pi)$

(Sätt $x = 2\arctan(t) + 2\pi$ märks ej i t, x eller dt)

$\sin x = \sin(2\arctan(t)) = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \cos(2\arctan(t)) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$* = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+2t^2+2t} = \int \frac{dt}{t^2+t+1}$$ ← Partialbråk

$$\begin{bmatrix}\text{Kvadrat-}\\ \text{komplettera}\end{bmatrix} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dt}{\underbrace{\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)}_{=u}^2 + 1}$$

$$\begin{bmatrix} u = \left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 \\ t = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2} \\ dt = \frac{\sqrt{3}}{2}du \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}du}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(u) + C$$

- Gå tillb. till t: $= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right) + C$
- Gå tillb. till x: $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C$

31.c $\int \frac{dx}{\sin(x)}$ * (Gör det själva m. universalsubstitutionen!)

Ett annat sätt:

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$$* = \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \begin{bmatrix}\text{förläng nämnaren}\\ \text{m. } \cos\left(\frac{x}{2}\right)\end{bmatrix} = \int \frac{dx}{2\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}_{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ är inre derivatan till $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$= \int \frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}}dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

32.b $\int \frac{\sin(2x)}{\cos^3 x}dx$

En standardtyp: $\int \sin^m(x) \cdot \cos^n(x)\, dx$

- lätta då minst en av är udda
- uttrycket i täljaren kan tolkas som derivatan av nämnare
- jämn potens kvar i täljaren. Använd trig-ettan

- Universalsubstitution: ej en bra idé

$$= \int \frac{2\sin x \cos x}{\cos^{\cancel{3}} x}dx = \int \frac{2\sin x}{\cos(x)}dx$$

$$= 2\int \frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}dx = 2\frac{1}{\cos(x)} + C$$

32 d. ✱ $\int \cos x \sin^9 x \, dx$ – ta cos som derivatan av sin.

$= \int (\sin x)' \cdot \sin^9(x) \, dx = \frac{\sin^{10}(x)}{10} + C$

[ev: $t = \sin(x)$]

AH. 2: Trigettan

Tolka ett exemplar som inre derivatan.

$✱ = \int \cos x \sin^{\textcircled{8}} (-\cos x)' \, dx = -\int \cos x (1-\cos^2 x)^4 (\cos x)' \, dx$ samt

$\begin{bmatrix} u = \cos x \\ du = (\cos x)' dx \end{bmatrix} = -\int u (1-u^2)^4 \, du$

---

32. f. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$ (Gör universalsubstitutionen själv!)

[dela namnaren m. $\cos^2 x$] $= \int \frac{dx}{\cos^2 x (\tan x + 2)} = \int \frac{(\tan x)' dx}{\tan^2 x + 2} = \int \frac{dt}{t^2+1}$

[$t = \tan(x)$]

(Lättare än universalmetoden]

(Försök titta på exempel. Bolla med uttryck. Hitta enklare sätt.)

33c. $\int \sin(5x) \cos(x) \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin(6x) + \sin(4x))$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(\alpha) \cos\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ +\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \hline \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \end{array}\right]$$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} (-\cos(6x))$

$+ \frac{1}{2} \frac{1}{4} \cdot (\cos(4x)) \, dx$

Alt. lösn: Partiell integration:

$\int \sin(5x) \underset{I}{(\sin x)'} \, dx = \sin 5x \sin x - \int 5 \cos 5x \overset{-\cos x}{\overbrace{(\sin x)}} \, dx -$

$= \sin(5x) \sin(x) + 5\cos(5x)\cos x - 5 \int (-\sin 5x) \cdot 5 \cdot \cos x \, dx$

33. e. $\int e^{2x} \sin(3x) \, dx$ PI.

Tolka den som derivata hela tiden.

en sin tolkas som cos:s derivata

33. e $\int \underbrace{\sin^4 x \cos^2 x \, dx}_{I(x)} = -\int \sin^3 x \, \underbrace{(\cos)' \cos^2(x)}_{\left(\frac{\cos^3 x}{3}\right)'} dx =$

$= -\frac{1}{3}\sin^3 x \cos^3 x + \cancel{\frac{1}{3}}\int \underbrace{\cancel{3}\sin^2 x \cdot \cos x}_{\sin^3 x} \cdot \cos^3 x \, dx =$

$= -\frac{1}{3}\sin^3 x \cos^3 x + \int \sin^2 x \underbrace{\cos^4 x}_{\cos^2(x)(1-\sin^2 x)} dx$

(Sinus potens har sjunkit, fast cos har höjts.)

$= \frac{1}{3}\sin^3 x \cos^3 x + \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx - \underbrace{\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx}_{I(x)}$

Samma som den första, med en annan koeff.

$I(x) = \int \sin^4 x \cos^2 x = -\frac{1}{6}\sin^3 x \cos^3 x + \frac{1}{2}\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

(Fortsätter så länge det behövs)

låna ett sin → cos der.

$\int \sin^2(x)\cos^2(x)\, dx = -\int \sin x \, \underbrace{(\cos x)' \cos^2 x}_{\left(\frac{\cos^3 x}{3}\right)'} dx =$

$-\frac{1}{3}\sin x \cos^3 x + \frac{1}{3}\int \underbrace{\cos x \cdot \cos^2 x}_{\cos^2 x(1-\sin^2 x)} dx$

$= -\frac{1}{3}\sin(x)\cos^3 x + \frac{1}{3}\int \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3}\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

$\Rightarrow \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{4}\sin x \cos^3 x + \frac{1}{4}\int \cos^2 x \, dx$

[använd dubbla vinkeln, då du har $\sin^2 x$ eller $\cos^2 x$]

$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

[En iterativ metod = varje element bygger på den förra.
Följd av sin-funktioner, vars potenser minskar för varje delsteg.]

[Genväg:
$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2(2x)\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos(4x)}{2} dx$
Använd då du är nere på potens 2 av cos el sin]

KAPITEL 6 $15 - 14 = 1$

b. $\int_{-6}^{6} g(x)\, dx \quad A = -2 + 4 + 4 + 1 + 1 - 12 + 5 = 1$

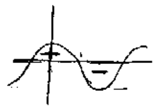
Ett tal, ej integral av x.

$I = \int_{-6}^{-4} (-1)\, dx + \int_{-4}^{-2} (2)\, dx + \int_{-2}^{-1} 4\, dx + \int_{-1}^{1} 1\, dx + \int_{1}^{5} (-3)\, dx + \int_{5}^{6} 5\, dx$

Riem-integral = orienterad area

Rektangel areorna ▨ $= 2\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 1\cdot 4 + 2\cdot 1 + 4(-3) + 1\cdot 5 = 1$
(baslängd x höjd)

Detta är en typisk trapp funktion.



---

6. $\lim_{n\to\infty} \int_{n}^{n+1} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = 1$

$x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right) \to 0}{\left(\frac{1}{x}\right) \to 0} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$

En funktion som går mot 1.
Nästan en rektangel med basen 1 och höjden 1.

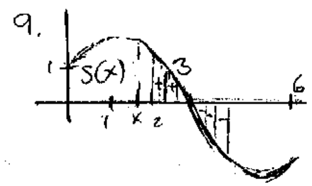
Fundera! Hur kan man uppskatta integralen, från båda håll, så att man ser att den är 1?
två hållet = lätt

$$\int_n^{n+1} \underbrace{\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}}_{\leq 1} dx \leq \int_n^{n+1} 1\, dx = 1$$

?

Använd gränsvärdet åt andra hållet. Svårare

9.



$$S(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

För vilket x är arean maximal?

$$\max_{x \in [0,6]} S(x) = S(3)$$

Teor. Alt. Lösn.Metod:

Funktionen är deriverbar. (Newton-Liebniz sats)

$$S'(x) = f(\underline{\underline{x}})$$

$$f \quad \overset{+}{}\;\; \underset{3}{\overset{0}{|}}\;\; \overset{-}{}$$

S(x) har lokalt maximum i 3 (av. största värdet)

$$S(0) = 0 \qquad S(6) = 0$$

11b. $$\Bigg(\underbrace{\int_1^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt}_{}\Bigg)' \quad x \geq 0$$

Sammansatt funktion

$$F(u) = \int_1^u \cos(t^2)\,dt$$

$$\big(F(\sqrt{x})\big)' = F'(\sqrt{x}) \cdot \underset{\text{inre deriv}}{\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}} = \cos(\sqrt{x})' \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \cos(x) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

derivatan av F, i punkten $\sqrt{x}$

Derivera först m.avseende på den övre gränsen.

Derivera själva den övre gränsen

13. Visa olikheten

$$\underbrace{\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt - x + 1}_{F(x)} < 0 \qquad \forall x > 1$$

[vi har en metod för att bevisa olikheter utan derivator]

$$F(1) = \underbrace{\int_1^1 \frac{\sin t}{t}\,dt}_{=0} - 1 + 1 = 0$$

? $F'(x) < 0$ för $x > 1$? Visa att funktionen är avtagande

$$F'(x) = \frac{\sin(x)}{x} - 1 < \frac{\overset{\text{största möjliga sin-värdet}}{1}}{\underset{\text{minsta möjliga x-värde}}{1}} - 1 = 0 \implies F'(x) < 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow F \text{ strängt avtagande} \\ F(1) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow F(x) < 0 \quad \forall x > 1$$

15d. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot (\tan x)'\,dx$$

(om man identifierar en bit av integralen: Pröva Partiell Integration) Välj metod

$$= \Big[x \tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot 1\,dx = \frac{\pi}{4} \cdot 1 - 0 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos(x))'}{\cos(x)}\,dx = \frac{\pi}{4} + \Big[\ln(\cos(x))\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\Big(\underset{\cos\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big) - \overset{\ln(0)}{\ln(1)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$$

Lägg ej till + C !!

19.b $\int_0^{2\pi} e^{-x}|\sin(x)|\,dx =$ [Dela upp i så många intervall, att sin är positiv/neg. på hela intervallet, då bort beloppstecknet.]

$= \int_0^{\pi} e^{-x}\sin(x)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin(x)\,dx$ [Hitta en primitiv]

[Integrera partiellt 2 ggr. Sedan får vi en ekv. för det första uttrycket]

Välj en att ranna på:

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin(x)\,dx = -\int_0^{\pi}(e^{-x})'\sin(x)\,dx = [PI]$$

$$= -\underbrace{\left[e^{-x}\sin(x)\right]_0^{\pi}}_{=0} + \int_0^{\pi} e^{-x}\cos(x)\,dx = -\int_0^{\pi}(e^{-x})'\cos(x)\,dx =$$

$$= -\left[e^{-x}\cos(x)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x}(-\sin(x))\,dx$$

Vi har nu fått en ekv. för den ursprungliga funktionen;

$$2\int_0^{\pi} e^{-x}\sin(x)\,dx = -\left(e^{-\pi}(-1) - e^{0}\cdot 1\right) = e^{-\pi} + 1$$

Samma procedur görs i intervallet $\int_{\pi}^{2\pi}$. Summera resultaten.

21.b. $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)\,dx}{\sqrt{\cos^2(x)+\cos(x)+3}} = \int_0^{\pi}\frac{-(\cos(x))'\,dx}{\sqrt{\cos^2(x)+\cos(x)+3}}$ Krångligt att behöva gå tillbaka till x. Omvandla gränserna.

$$\left[\begin{array}{l} t=\cos(x) \\ dt=(\cos(x))'dx \\ x=0 \Leftrightarrow t=1 \\ x=\pi \Leftrightarrow t=-1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \int_1^{-1}\frac{-dt}{\sqrt{t^2+2t+3}} = \int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+3}} = \int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2+2}}$$

Räkna direkt på t-integralen

Variabelbyte

Efter v.subst. kan

$$\left[\int_1^{-1} f(x) = -\int_{-1}^{1} f(x)\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} u=t+1 \\ du=dt \\ t=-1 \Leftrightarrow u=0 \\ t=1 \Leftrightarrow u=2 \end{array}\right] = \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{u^2+2}} = \left[\ln\left(u+\sqrt{u^2+2}\right)\right]_0^2 =$$

$$= \ln\left(2+\sqrt{6}\right) - \ln\left(\sqrt{2}\right) = \ln\left(\frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$$

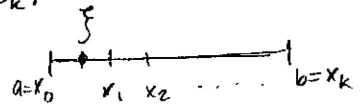
---

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\boxed{\textcircled{\frac{1}{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$ ✱

Vad är kopplingen till integraler?

Vad är gränserna (a och b)? Vilken är funktionen f(x)?

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \begin{cases} f(x) \\ a=0 \\ b=1 \end{cases} \quad f(\xi_k) \Rightarrow f(x) = x\ln(1+x)$$



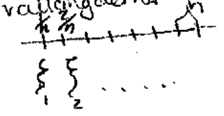
$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\underbrace{(x_k - x_{k+1})}^{\text{längden av intervallet}}$$

$\xi_k = \frac{k}{n}$ indelningen

✱ $= \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$

· Beräknas med Part. Integr.

intervallängderna $\frac{1}{n}$



Kap 6

ANALYSÖVNING MÅN. LV 7

Intervallängden är 1.
Höjdstaule: allt → 1

6. $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} x \sin(\frac{1}{x})\, dx \overset{?}{=} 1$

$$\frac{\sin(\frac{1}{x})}{(\frac{1}{x})} \leq 1 \qquad \int_n^{n+1} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{(\frac{1}{x})}\, dx \leq 1\,(\cancel{n}+1-\cancel{n}) = 1$$

uppskattning åt andra hållet?

Vore bra om funktionen var monoton.

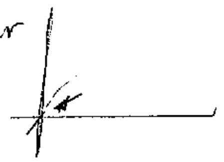
$[n, n+1]$ Uppskatta x med olika saker

$x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \geqslant n \sin(n+1)$

vill få ngt mindre
uppskatta med n

x växer $\Rightarrow (\frac{1}{x})$ avtar $\Rightarrow \sin(\frac{1}{x})$ avtar

$\to \infty \qquad \to 0 \qquad \to 0$



$$= \frac{\sin(\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n}(n+1) \cdot \frac{1}{(n+1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Resonemang: För stora n är n och $n+1$ i princip lika.

$$n \sin(\tfrac{1}{n+1}) \leq \frac{\sin(\frac{1}{x})}{1(\frac{1}{x})} \leq 1 \iff \underbrace{n \sin(\tfrac{1}{n+1})(n+1-n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} \leq \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} dx}_{\to 1 \quad n\to\infty} \leq 1$$

Samma sak kan även beräknas mha:

Integralkalkylens medelvärdes-sats:

$$\int_n^{n+1} (x \sin \tfrac{1}{x}\, dx) = f(\xi_n)(\cancel{n}+1-\cancel{n}) = \xi_n \sin(\tfrac{1}{\xi_n}) = \frac{\sin(\frac{1}{\xi_n})}{(\frac{1}{\xi})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Generaliserade integraler

Krav:

Riemann integral — $[a, b]$
— f begränsad på $[a, b]$ (Annars kan vi ej approximera m. trappfunktioner)

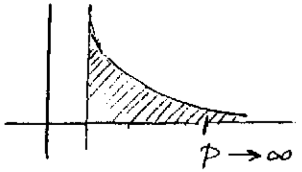
Låt oss släppa på en av kraven.

Generaliserad integral.

- Vi släpper på 1:a kravet. Integraler på oändligt intervall fås.

$[a, \infty)$

$\int_a^{\infty} f(x)\, dx$



Kan arean under en oändlig graf vara en ändlig storlek?

Beräkna integral $\int_a^P$ flytta sedan P mot ∞.

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx \overset{def}{=} \lim_{P\to\infty} \int_a^P f(x)\, dx \quad \text{om gränsvärdet finns.}$$

Om $\lim_{P\to\infty} \int_a^P f(x)\, dx$ finns, så kallas $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ konvergent

annars divergent.

25c. $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx \overset{\text{(om det finns)}}{=} \lim_{P\to\infty} \int_0^P x e^{-x} dx = \lim_{P\to\infty} (1 - e^{-P} - Pe^{-P}) = 1 - 0 - 0 =$

Konvergent.

$\frac{P}{e^P}$

$$\int_0^P x e^{-x} dx = -\int_0^P x(e^{-x})'\, dx = -\left[x e^{-x}\right]_0^P + \int_0^P e^{-x} \cdot 1\, dx$$

$$= -Pe^{-P} + 0 - \left[e^{-x}\right]_0^P = -Pe^{-P} - e^{-P} + 1$$

Detta är ej en Riemannintegral, utan ett gränsvärde av en

25e. $\int_2^\infty \frac{x}{x^4-1}\,dx \overset{\text{om } \exists \text{ lim}}{=} \lim_{p\to\infty} \int_2^p \frac{x}{x^4-1}\,dx$

$\int_2^p \frac{x}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^p \frac{(x^2)'}{(x^2-1)(x^2+1)}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = (x^2)'dx = x\,dx \end{array}\right]$

$= \frac{1}{2}\int_4^{p^2} \frac{dt}{(t-1)(t+1)}$ [Partialbråks-uppdela]

$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{(t-1)} + \frac{B}{t+1}$ (mult. upp nämnaren)

$1 = A(t+1) + B(t-1)$

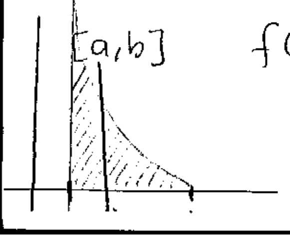
$\begin{cases} t=1 & 1 = 2A \\ t=-1 & 1 = -2B \end{cases}$

$= \frac{1}{4}\int_4^{p^2} \left(\frac{1}{(t-1)} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{1}{4}\Big[\ln(\overset{\text{ty } t>4}{t}-1) - \ln(t+1)\Big]_4^{p^2} =$

[omarbeta, innan vi stoppar in gränserna.] $= \frac{1}{4}\Big[\ln\frac{t-1}{t+1}\Big]_4^{p^2} = \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\ln\underbrace{\frac{p^2-1}{p^2+1}}_{1}}_{0} - \ln(\tfrac{3}{5})\Big) \xrightarrow[p\to\infty]{} -\frac{1}{4}\ln(\frac{3}{5}$

$= \frac{1}{4}\ln(\frac{3}{5}$

Vi släpper även på det andra kravet. (= funktionen begränsad)



$f(x)$ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ (el. $-\infty$)

(el. $x\to b$)

f begränsad på alla intervall av typen $[c, b]$, där

Intiakta en gräns. Som vi

$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$

Om gränsvärdet finns: konvergent.

Om ej: divergent.

$\int_0^1 \ln(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \ln(x)\,dx;$

$\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$

$\int_0^1 1\cdot\ln(x)\,dx = \Big[x\ln(x)\Big]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \cancel{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$

$= \underbrace{1\cdot\ln(1)}_{=0} - \underbrace{\varepsilon\cdot\ln(\varepsilon)}_{\to 0} - (1-\overset{0}{\varepsilon}) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 - 1 = -1$

$-\varepsilon\ln(\varepsilon) = \frac{\ln\overset{\to\infty}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}}{\underbrace{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}_{\to\infty}}$ (logaritm) / (potens) $\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

27d. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

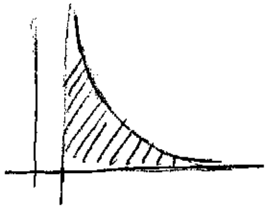
$\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \Big[\ln(x+\sqrt{x^2-1})\Big]_{1+\varepsilon}^2 = \ln(2+\sqrt{3}) - \ln\left(1+\varepsilon+\sqrt{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-1}\right)$

$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \ln(2+\sqrt{3}) - \underbrace{\ln(1)}_{0}$

Svar: Konv.

Hur kan man avgöra om en integral är konv.

Universalsubst. $\begin{bmatrix} x = \arctan(t) \\ t = \tan(x) \\ dx = \frac{1}{t^2+1}\, dt \end{bmatrix}$ när man bara har sin x el. cos x

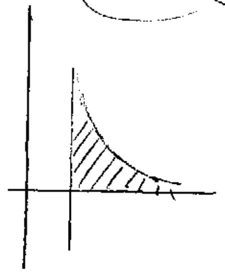


$f \geq 0$

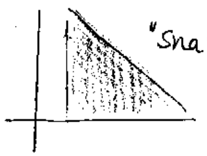
$f \to 0$ tillräckligt snabbt
(kompenserar oändlig höjd)

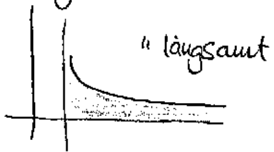
$\int_0^\infty x e^{-x} dx$ → 0 snabbt

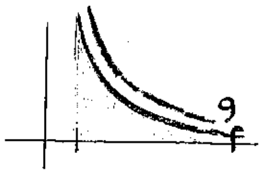
$\int_2^\infty \frac{x\,dx}{x^{4/3} - \frac{1}{x}} \to 0$ tillräckl. snabbt



$f \to \infty$ tillräckl. långsamt


"snabbt"


"långsamt"



Vet: g's integral konvergerar
$f < g$
$\Rightarrow$ f's integral konv.

Jämförelsekriteriet

1. $[a, \infty)$ $f \geq 0$, $g \geq f$

$\int^\infty g(x)\,dx$ konvergent $\Rightarrow \int^\infty f(x)\,dx$ konvergent

$f \geq h \geq 0 : \int_a^\infty h(x)\,dx$ div
$\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ div

2. $f \xrightarrow[x \to a]{} \infty$ $g \geq f$

$\int_a^b g(x)\,dx$ Konvergent $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ konvergent.

$f \geq h \geq 0 : \int_a^b h(x)\,dx$ div
$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ div

TyPiska Jämförelse Funktioner

$$\ast \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{p \to \infty} \int_1^p \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{p \to \infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^p = \lim_{p \to \infty} \left(\frac{1}{p^{\alpha-1}(1-\alpha)} - \frac{1}{1-\alpha}\right)$$

$\alpha \neq 1$

$$= \begin{cases} 0 - \frac{1}{1-\alpha} & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha = 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

kon för $\alpha > 1$ · avtar till r. snabbt för potenser > 1
diV för $\alpha = 1$
div för $\alpha < 1$

$$\alpha = 1 : \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{p \to \infty} \left[\ln x\right]_1^p = \lim_{p \to \infty} (\ln p - \ln 1) = \infty \text{ div}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\beta} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{x^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{\varepsilon^{1-\beta}}{1-\beta}\right)$$

konstanter

(divergerar då ε i täljaren = potensen ej neg)

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\beta} - 0 & \beta < 1 \\ \infty & \beta = 1 \\ \infty & \beta > 1 \end{cases}$$

konv
div
diV

$$\beta = 1 : \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \left[\ln(x)\right]_\varepsilon^1 = \ln(1) - \ln(\varepsilon) \longrightarrow +\infty$$

div

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ konv: för $\alpha > 1$

div: för $\alpha \leq 1$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\beta}}$ konv: för $\beta < 1$

div: för $\beta \geq 1$

$f \geq h \geq 0$: $\int_a^{\infty} h(x)\,dx$ divergent

$\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)\,dx$ divergent

30.c. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 \ln(x)}$

x^2 dominerande termen i nämnaren då $x \to \infty$.

Vill visa konvergens =

Visa att den är mindre än ngt konv.

Vill ha mindre nämnare, poten av x.

$\frac{1}{x^2 - \ln(x)} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$

$\frac{1}{x^2 - \ln(x)} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}x^2}$ för stora x.

- Minska potensen eller:
- Minska koefficienten.

30.d. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \ln(x)}$

Vill visa att den är div.

Visa att den är större än ngt som divergerar.

$\frac{1}{x + \ln(x)} \geq \frac{1}{2x}$ Gäller för stora x.

dominerar då $x \to \infty$ — mindre än x

(

27.c) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (x+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(x-1)^{1/2}(x+1)^{1/2}} \leq \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}}$ — konv

$\beta < 1$ $\quad \sqrt{2} - \sqrt{3}$ $\quad$ får ngt större

32.a. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x + x^5}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ Konv!

konv bevis använd — ger nämnaren mindre för att få allt större

dominant då $x < 1$

32.b. $\int_0^1 \frac{dx}{\sin(x)}$ div? $\frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{x}$

större nämnare

32.c $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(e^x+1)}$

Se som 2 integraler $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(e^x+1)}$. kon?

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(e^x+1)}$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(e^x+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ ngt konv. mindre nämnare — Konv. nära noll

$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(e^x+1)} \leq \frac{1}{e^x}$ mindre nämnare — konv i ∞ $\leq \frac{1}{x^2}$

(eller $e^{x^2}, e^{x^3}, \ldots$)

ANALYS - ÖVNING TORSDAG LV 7

Dessa satser: Måste kunna formulera, men ej bevisa:

Sats C.2,3
Sats C6
Sats 6.11

Jämförelsesatsen för generaliserade integraler.

typ Ⓘ $\int^{\infty} \int_{-\infty}$ f begr. I varje tillåts en singularitet

typ Ⓘⓘ $\int_a^b f \xrightarrow[x \to a\,(b)]{} +\infty\ (-\infty)$

---

kapa av till vänster och höger

Typ 1 $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\substack{M\to\infty \\ N\to\infty}} \int_{-M}^{N} \frac{dx}{x^2+1} \qquad \int^{\infty} + \int_{-\infty}$$

oberoende av varandra

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \left[\int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1}\right] = \lim_{\substack{\delta\to 0 \\ \delta>0}} \int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ \varepsilon>0}} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$$

oberoende av varandra

Kombinera singulariteter

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ N\to\infty}} \int_{\varepsilon}^{N} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$ alltid divergent

$$\int_0^1 + \int_1^{\infty}$$ Båda kommer inte att konvergera samtidigt.

konvergent för $\alpha < 1$ konvergent för $\alpha > 1$

$\alpha < 1$ ger x i täljaren. Ofarligt.
$\alpha > 1$ ger x i nämnaren. —"—. $\alpha = 1$ ger $\ln(x)$. divergens i båda fallen.

Ⓘ $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ $\quad 0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, \infty)$

$\Rightarrow$ 1). $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ konv. $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)\,dx$ konv.

2). $\int_a^{\infty} f(x)dx$ div $\Rightarrow \int_a^{\infty} g(x)\,dx$ div.

mindre större

Ⓘⓘ $\int_a^b f(x)\,dx \quad \int_a^b g(x)\,dx \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$

$\Rightarrow$ 1, $\int_a^b g(x)\,dx$ konv. $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ konv

2, $\int_a^b f(x)dx$ div $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ div

Villkor för $f(x)$ och $g(x)$

Ⓘ f, g integrerbara på $[a, N]$. $\forall N$

Ⓘⓘ f, g integrerbara på $[a+\varepsilon, b]$. $\forall \varepsilon > 0$
$[a, b-\varepsilon]$

JÄMFÖRELSEKRITERIUM

För att avgöra om en integral konv:
hitta en större integral. Visa att denna konvergerar.
Kan vara svårt att formulera en olikhet.
Kan då skriva på gränsvärdes form.

Satsen på gränsvärdesform

$f(x),\ g(x) \geqq 0$ Blanda ej in funktioner som växlar tecken

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$$

$\Rightarrow \int^{\infty} f(x)\,dx$ & $\int^{\infty} g(x)\,dx$ samtidigt konvergenta eller divergenta.

$\frac{1}{2} A < \frac{f(x)}{g(x)} < 2A$ för stora x

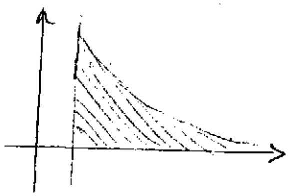
(behöver ej betyda ∞ dock)

$0 \leq \frac{1}{2} A g(x) < f(x) < 2A g(x)$

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 - \ln(x)}$ $f(x) = \frac{1}{x^2 - \ln(x)}$ $g(x) = \frac{1}{x^2}$

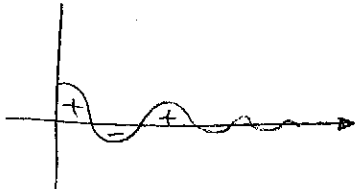
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^2 - \ln(x)} = \frac{1}{1 - \frac{\ln(x)}{x^2}} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1 \neq 0$$

Mha vissa resonemang kan vi uppskatta såväl funktioner som går mot 0 och ∞.



Typ ① "Plattas ut" tillräcklig snabbt

$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ konv.



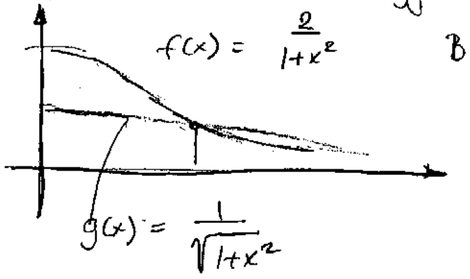
Ty plus, och minus-areorna tar ut varandra.

Titta på kapitlet gener. integraler.

Försök se vilka funktioner man ska jämföra med.

KAPITEL 7

7.2. Area av det skuggade partiet.



Beräkna gränserna.

a: Kurvorna skär varandra:

$(a, f(a)) = (a, g(a))$

$f(a) = \frac{2}{1+a^2} = g(a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

$= 2\sqrt{1+a^2} = \left(\sqrt{1+a^2}\right)^{\cancel{2}}$ Om vi vet att vi har strikt positiva tal, ok att kvadrera

$0 \leq \sqrt{1+a^2} = 2 > 0$

$\Longleftrightarrow 1 + a^2 = 4 \Longrightarrow a^2 = 3 \quad a = \pm\sqrt{3}$

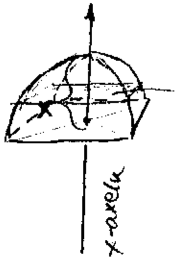
$$\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \Big[2\arctan(x) - \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| \Big]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2 \cdot \pi}{3} - \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

---

13. Gör den själv. Hoppas över

14. SKIVFORMELN



Varje snitt vi tar = en kvadrat

Kvadrat t med sidan $\sqrt{4-x^2}$

Vi lägger i hop oändligt många areor.

$$\int_a^b A(x)\,dx$$

$$\overset{\text{höjd}}{\int_0^2} \underbrace{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}_{\text{Kvadratens area på höjd } x} dx = \int_0^2 (4-x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

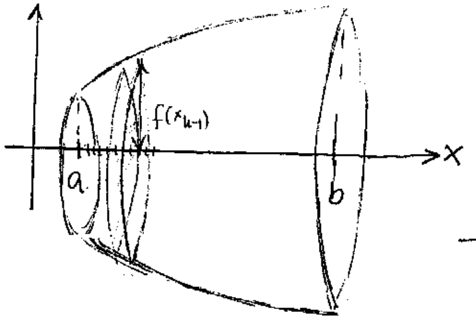
[illegible]

---

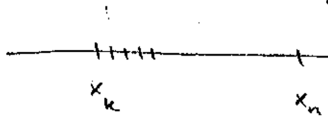
20. Bestäm volymen av rotationskroppen som bildas när $y = \dfrac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}}$, $x \geq 1$ roterar runt x-axeln

underförstått: $x \to \infty$

Varje snitt = en cirkel $r^2 \pi$

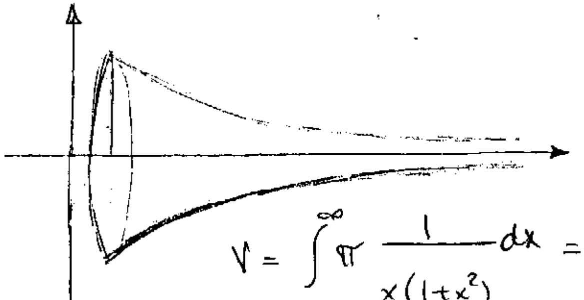


$$\int_a^b \pi \left(f(x)\right)^2 dx$$



dela in axeln i delintervall.

$$\sum_{k=1}^{n} \pi \left(f(x_{k-1})\right)^2 (x_k - x_{k-1}) \longrightarrow \int_a^b \pi \left(f(x)\right)^2 dx$$



$$V = \int_1^{\infty} \pi \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \lim_{N\to\infty} \pi \int_1^N \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

Konv $x^3 > x'$

Jmförelse kriteriet ger enbart konvergensen.

$$\frac{\frac{1}{x(1+x^2)}}{\frac{1}{x^3}} = \frac{x^3}{x^3+x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$$

$$V = \int_1^N \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}\,dx$$

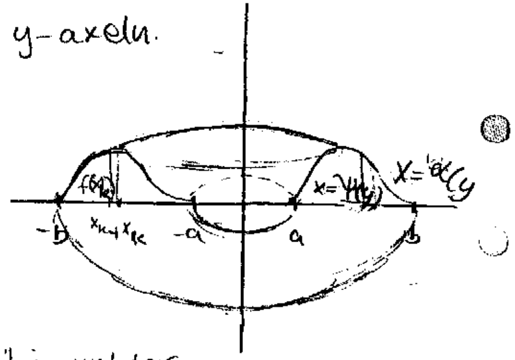
---

21. Roterar ist. kring y-axeln.

Rotation av $y = f(x)$ kring y-axeln.

- Bestäm den yttre volymen
- subtrahera bort den inre.

$$V = \int_c^d \left(\pi\left(\left(e(y)\right)^2 - \left(\psi(y)\right)^2\right)\right) dy$$



$$\sum_{k=1}^{n} \left(\pi \overset{\text{stora radien}}{x_k^2} f(x_k) - \pi \overset{\text{lilla radien}}{x_{k-1}^2} f(x_k)\right) =$$

tra punkter.

$$= \sum_{k=1}^{n} \pi f(x_k)(x_k + x_{k+1})(x_k - x_{k-1})$$

(då intervallängderna förfinas, gör x_k och x_{k-1} mot samma x.)

$$\longrightarrow \int_a^b \pi f(x) \cdot 2x \cdot dx$$

[illegible] i fråga.

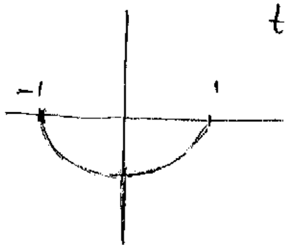
26. Beräkna längden av $y = x^2 - 1$ som ligger under x-axeln.

Formeln:

Kurva

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \leftarrow$$ (Eftersom kurvan ersatts med sekanter.)



$$t \in [-1, 1] \quad \begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$$

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{\overset{(x')^2}{1} + \overset{(y')^2}{4t^2}}\, dt = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{t^2 + \tfrac{1}{4}}\, dt$$

$u = t + \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}$ Räkna med denna subst. själv.

Alt. lösn:

$$\int \sqrt{t^2 + \alpha}\, dt \overset{[P.I]}{=} t\sqrt{t^2+\alpha} - \int t \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{t^2+\alpha}} \cdot \cancel{2} t\, dt =$$

inrederivata

trick

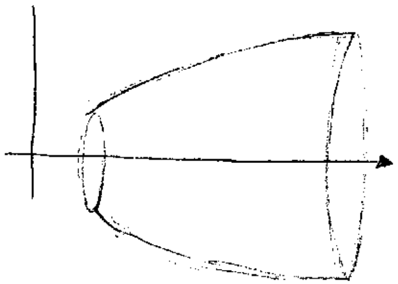
$$= t\sqrt{t^2+\alpha} - \int \frac{t^2+\alpha-\alpha}{\sqrt{t^2+\alpha}}\, dt = t\sqrt{t^2+a} - \int \sqrt{t^2+a}\, dt + \alpha \int \frac{1}{\sqrt{t^2+\alpha}}$$

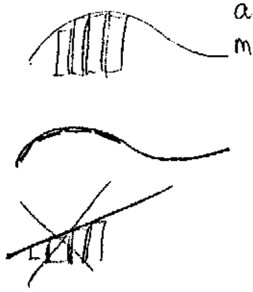
$I(x)$

$= \begin{bmatrix} \text{flytta över } I(x) \\ \text{till VL} \end{bmatrix} \Rightarrow \int \sqrt{t^2+\alpha}\, dt = \frac{1}{2}\ t\sqrt{t^2+\alpha} + \frac{a}{2} \ln\left(t + \sqrt{t^2+\alpha}\right) + c$

Stoppa in värdena själv. Beräkna

Area av rotationsyta





area approximeras m. rektanglar

längd approximeras med sekanter

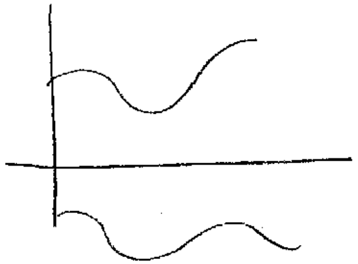
$$A(x) = \int_a^b \left(2\pi \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot f(x)\right) dx$$

Sätt nu in värdena....

Låt $f(x) = x^2 - x - \ln(x) + a$

Bestäm a : f ej har nollställen

f Kontinuerlig i hela $D_f \; \{x > 0\}$ ← pga ln



Inga nollställen innebär:

- $f > 0 \quad \forall x > 0$

~~$f < 0 \quad \forall x > 0$~~

Visa att $\min f > 0$ d. $\min x > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \text{ "}= 0 - 0 - (-\infty) + a\text{"} = +\infty$$

$\lim_{x \to +\infty}$ "$\infty - \infty$". Testa $\frac{f(x)}{x^2} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{a}{x^2} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$

$$\Rightarrow \underset{\to \infty}{f(x)} > \underset{\to \infty}{\tfrac{1}{2}x^2} \text{ för stora } x$$

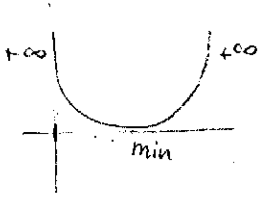
$f(x) \longrightarrow +\infty$ i båda ändar.

Leta minima   Finns ej ändpunkter.

$f'(x) = 0$ $f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x} = \frac{(x-1)(2x+1)}{x}$

$\Rightarrow$ Lokalt extremum i $x_0 = 1$

Kan ej vara maximum. ty $\rightarrow$



$f(1) = \min_{(0,\infty)} f = \cancel{1} - \cancel{1} - \underbrace{\ln(1)}_{0} + a = a$

f saknar nollställen för $a > 0$.

Svar på övning. [illegible]

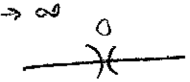
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Är detta samtliga primitiva funktioner.

Sats Om $f' = 0 \Rightarrow f \equiv \text{const}$

Villkor: på ett intervall.

Men för $\int \frac{dx}{x} =$ def mängd för alla funktioner från till 0 och från $0 \rightarrow \infty$



Ex: $\overset{|x|}{}$ $\begin{cases} \ln(-x) + 1 & x < 0 \\ \ln(x) - 107 & x > 0 \end{cases}$